

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se potpisati na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati i uvid u kolokvije: idući tjedan. Točno vrijeme i datum objavit ćemo na webu naknadno.

ZADATAK 1.

(5 bodova)

Izračunajte broj uvjetovanosti za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Normu odaberite proizvoljno.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 2.

(10 bodova)

Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & 7 & 13 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Nađite LU faktorizaciju matrice A . Nadalje, nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i U tako da je $PA = LU$.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 3.

(5 bodova)

Metodom Choleskog riješite sustav $Ax = b$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 6 & 10 & 26 \\ 4 & 26 & 801 \end{bmatrix} \text{ i } b = \begin{bmatrix} 15 \\ 98 \\ 876 \end{bmatrix}.$$

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 4.

(5 bodova)

Izračunajte složenost (broj računskih operacija) za Gaussovu metodu eliminacija.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 5.

(5 bodova)

Dokažite da za podijeljene razlike vrijedi

$$f[a, b, c] = \frac{f[b, c] - f[a, b]}{c - a}.$$

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 6.

(10 bodova)

Funkciju $f(x) = \cos^2(x - 1)$ aproksimirajte Lagrangeovim oblikom interpolacijskog polinoma stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži intervala $[-1, 1]$. Odredite pravu grešku u točki 0, ocjenu prave greške i ocjenu uniformne pogreške.

Koristeći Hornerovu formu, aproksimirajte funkciju f interpolacijskim polinomom stupnja 4 na istom intervalu koristeći ekvidistantnu mrežu.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 7.

(5 bodova)

Odredite parabolički splajn s definiran čvorovima $\{0, 1, 2\}$ koji zadovoljava interpolacijske uvjete $s(0) = 1$, $s(1) = 2$, $s(2) = 2$ i $s'(0) = 0$.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 8.

(5 bodova)

Neka je zadana subdivizija segmenta $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Odredite najmanji prirodni broj k takav da kubični splajn B_i zadovoljava:

$$\begin{aligned} B_i &\in C^2(a, b), \\ B_i(x) &= 0 \quad \text{za } x \notin [x_i, x_{i+k}], \\ B_i &\neq 0, \end{aligned}$$

za $i = 0, \dots, n - k$.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se potpisati na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.

Rezultati i uvid u kolokvije: idući tjedan. Točno vrijeme i datum objavit ćemo na webu naknadno.

ZADATAK 1.

(5 bodova)

Izračunajte broj uvjetovanosti za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Normu odaberite proizvoljno.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 2.

(10 bodova)

Riješite sustav $Ax = b$ LU faktorizacijom ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 10 \\ 3 & 4 & 10 & 18 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } b = \begin{bmatrix} 17 \\ 38 \\ 65 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, nađite LU faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P , te matrice L i U tako da je $PA = LU$.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 3.

(5 bodova)

Metodom Choleskog odredite skup svih $\lambda \in \mathbf{R}$ za koje je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & 13 & 13 & 14 \\ -1 & 13 & \lambda & -11 \\ 7 & 14 & -11 & 69 \end{bmatrix}$$

pozitivno definitna.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 4.

(10 bodova)

Funkciju $f(x) = \sin^2(x - 1)$ aproksimirajte Lagrangeovim oblikom interpolacijskog polinoma stupnja 3 na Čebiševljevoj mreži intervala $[-1, 1]$. Odredite pravu grešku u točki 0, ocjenu prave greške i ocjenu uniformne pogreške.

Koristeći Hornerovu formu, aproksimirajte funkciju f interpolacijskim polinomom stupnja 4 na istom intervalu koristeći ekvidistantnu mrežu.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 5.

(5 bodova)

Odredite parabolički splajn s definiran čvorovima $\{-1, 0, 1\}$ koji zadovoljava interpolacijske uvjete $s(-1) = 1$, $s(0) = -1$, $s(1) = 0$ i $s'(1) = 2$.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 6.

(5 bodova)

Dokažite da za podijeljene razlike ne ovise o redosljedu čvorova:

$$f[x_1, x_2, \dots, x_n] = f[(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})],$$

gdje je σ permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 7.

(5 bodova)

Neka je zadana subdivizija segmenta $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Odredite najmanji prirodni broj k takav da splajn B_i reda 5 zadovoljava:

$$\begin{aligned} B_i &\in C^3(a, b), \\ B_i(x) &= 0 \quad \text{za } x \notin [x_i, x_{i+k}], \\ B_i &\neq 0, \end{aligned}$$

za $i = 0, \dots, n - k$.

NUMERIČKA MATEMATIKA

Prvi kolokvij – 28. travnja 2014.

ZADATAK 8.

(5 bodova)

Izračunajte složenost (broj računskih operacija) za Gaussovu metodu eliminacija.