JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

27. svibnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 31. svibnja 2013. u 12 sati**.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.)

(a) Napišite oblik i osnovna svojstva **Givensove rotacije** u ravnini. Kako izgleda matrica rotacije reda n u (i, j) ravnini?

(b) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(G) = n$. Opišite kako se primjenom ravninskih rotacija računa **QR faktorizacija** matrice G — svođenje matrice G na trokutasti oblik i računanje matrice Q.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

27. svibnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 x^{1/3} + a_1 x^{5/3}$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte koeficijente ove aproksimacije za $p = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

27. svibnja 2013.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 \frac{2x+1}{(3x+2)^{2/3}}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

27. svibnja 2013.

$(10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite čvor x_0 i težinu w_0 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_{-1}^{1} x \sin x \, f(x) \, dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvorove x_1, x_2 i težine w_1, w_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 2

$$\int_{-1}^{1} x \sin x \, f(x) \, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približne vrijednosti integrala za $f(x) = x^4$ i nađite prave greške.

(b) Napišite iskaz teorema o karakterizaciji interpolacijskih integracijskih formula (kod kojih možemo uzeti da su čvorovi unaprijed zadani, kao kod Newton–Cotesovih formula). Što vrijedi za težinske koeficijente u interpolacijskim integracijskim formulama? Jesu li ti koeficijenti uvijek pozitivni?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

27. svibnja 2013.

$(10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$\ln(x+2) = \operatorname{ch}\left(\frac{3}{4}\,x\right) - 1$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(b) Napišite iskaz teorema o globalnoj konvergenciji Newtonove metode za nalaženje nultočaka funkcije f u intervalu $[a, b]$. Kako treba izabrati startnu točku za iteracije Newtonovom metodom i koja je geometrijska interpretacija tog izbora?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij

27. svibnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 31. svibnja 2013. u 12 sati**.

1

Zadatak 1

(15 bodova.) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\operatorname{rang}(G) = n$.

(a) Napišite "puni" i "skraćeni" oblik **QR faktorizacije** matrice G.

(b) Napišite iskaz teorema o **egzistenciji i jedinstvenosti** QR faktorizacije matrice G.

(c) Ukratko komentirajte što se događa ako G **nema** puni rang po stupcima.

(d) Ukratko opišite neku **numeričku** metodu za **računanje** QR faktorizacije.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

27. svibnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 x^{1/2} + a_1 x^{5/4}$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte koeficijente ove aproksimacije za $p = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

27. svibnja 2013.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 \frac{x+2}{(3x+2)^{1/3}}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

27. svibnja 2013.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite čvor x_0 i težinu w_0 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x\, f(x)\, dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvorove x_1, x_2 i težine w_1, w_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 2

$$\int_{-1}^{1} \operatorname{ch} x\, f(x)\, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približne vrijednosti integrala za $f(x) = x^4$ i nađite prave greške.

(b) Neka je $\{p_n \mid n \geq 0\}$ niz ortogonalnih polinoma obzirom na integralni skalarni produkt definiran težinskom funkcijom $w \geq 0$ na intervalu $[a, b]$, gdje je p_n polinom stupnja n. Kako izgleda tročlana rekurzija za polinome p_n? Što se zna o nultočkama ortogonalnog polinoma p_n i koje to veze ima s Gaussovim integracijskim formulama?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

27. svibnja 2013.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Nađite najveće negativno rješenje jednadžbe

$$\ln(x+5) = 3 - \operatorname{ch}\left(\frac{4}{3}\,x\right)$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(b) Na primjeru Newtonove metode pokažite koja je veza između iterativnih metoda za nalaženje nultočke funkcije funkcije f i jednostavnih iteracijskih funkcija φ. Iskažite teorem koji garantira da niz jednostavnih iteracija generiranih funkcijom φ "lokalno" konvergira prema fiksnoj točki α funkcije φ, s redom konvergencije (barem) p, gdje je $p > 1$ prirodan broj.

JMBAG | IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

27. svibnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 31. svibnja 2013. u 12 sati**.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.) Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, uz $n \geq m$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\text{rang}(A) = m$, i neka je $b \in \mathbb{R}^n$ zadani vektor.

(a) Napišite pripadnu matričnu formulaciju problema **najmanjih kvadrata**.

(b) Napišite iskaz teorema o **karakterizaciji** rješenja problema najmanjih kvadrata preko sustava **normalnih jednadžbi** i njegovu geometrijsku interpretaciju.

(c) Ukratko komentirajte što se događa ako A **nema** puni rang po stupcima.

(d) Ukratko opišite neku **numeričku** metodu za **računanje** rješenja sustava normalnih jednadžbi.

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

27. svibnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 x^{2/3} + a_1 x^{4/3}$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte koeficijente ove aproksimacije za $p = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

27. svibnja 2013.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (2x+1)\cdot(3x+2)^{2/3}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

27. svibnja 2013.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite čvor x_0 i težinu w_0 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_{-1}^{1} x \operatorname{sh} x \, f(x) \, dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvorove x_1, x_2 i težine w_1, w_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 2

$$\int_{-1}^{1} x \operatorname{sh} x \, f(x) \, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približne vrijednosti integrala za $f(x) = x^4$ i nađite prave greške.

(b) Što mora zadovoljavati polinom čvorova i što vrijedi za težinske koeficijente u Gaussovim integracijskim formulama? Što se zna o konvergenciji Gaussovih formula?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

27. svibnja 2013.

$(10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$\ln(x+3) = \operatorname{ch}\left(\frac{3}{2}\,x\right) - 3$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(b) Što je jednostavna iteracijska funkcija φ za generiranje niza iteracija x_n? Iskažite teorem o konvergenciji niza generiranog neprekidnom funkcijom φ prema fiksnoj točki α funkcije φ. Koja je brzina konvergencije tog niza (u općem slučaju)?

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 2. KOLOKVIJ

27. svibnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent.
Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!
Rezultati i uvid u kolokvije: **petak, 31. svibnja 2013. u 12 sati**.

1

ZADATAK 1

(15 bodova.)

(a) Napišite oblik i osnovna svojstva **Householderovog reflektora** reda n.

(b) Neka je $G \in \mathbb{R}^{m\times n}$, uz $m \geq n$, pravokutna matrica koja ima puni rang po stupcima, tj. $\mathrm{rang}(G) = n$. Opišite kako se primjenom reflektora računa **QR faktorizacija** matrice G — svođenje matrice G na trokutasti oblik i računanje matrice Q.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 2

27. svibnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija

$$f(x) = x^p$$

na intervalu $[0, 1]$, gdje je $p > 0$ zadani realni parametar. Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$\varphi(x) = a_0 x^{3/4} + a_1 x^{3/2}$$

koja aproksimira funkciju f na zadanom intervalu s težinskom funkcijom $w(x) = 1$. Izračunajte koeficijente ove aproksimacije za $p = 1$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 3

27. svibnja 2013.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 (x+2)\cdot(3x+2)^{1/3}\,dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε.

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 4

27. svibnja 2013.

($10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Odredite čvor x_0 i težinu w_0 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 1

$$\int_{-1}^{1} \cos x \, f(x) \, dx \approx w_0 f(x_0),$$

te čvorove x_1, x_2 i težine w_1, w_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli reda 2

$$\int_{-1}^{1} \cos x \, f(x) \, dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ovih formula?

Pomoću ovih formula izračunajte približne vrijednosti integrala za $f(x) = x^4$ i nađite prave greške.

(b) Napišite iskaz teorema o karakterizaciji integracijskih formula "visokog" stupnja egzaktnosti, kad se čvorovi određuju tako da se poveća stupanj egzaktnosti formule. Koliki je maksimalni stupanj egzaktnosti? Što vrijedi za težinske koeficijente u Gaussovim integracijskim formulama?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 2. kolokvij — Zadatak 5

27. svibnja 2013.

$(10 + 5 = 15$ bodova.)

(a) Nađite najveće negativno rješenje jednadžbe

$$\ln(x+3) = 4 - \operatorname{ch}\left(\frac{3}{2}\,x\right)$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje rješenja mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

(b) Definirajte pojam reda konvergencije niza iteracija x_n koji konvergira prema broju α (nultočki neke funkcije f). Koliki je (najmanji) red konvergencije Newtonove metode u okolini jednostruke nultočke funkcije f i o čemu to ovisi? Koliki je red konvergencije Newtonove metode (bez modifikacija) za višestruke nultočke?