JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

2. travnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **srijeda, 10. travnja 2013. u 9:30 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.)

(a) Napišite definiciju **Čebiševljevog** polinoma prve vrste T_n, za $n \geq 0$, i navedite neka osnovna svojstva tih polinoma.

(b) Iskažite teorem o "minimalnom otklonu od nule".

(c) Opišite primjenu tog teorema na izbor čvorova kod interpolacije polinomom. Precizno argumentirajte što je "optimalno" kod takvog izbora čvorova.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

2. travnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relacijom

$$f(t) = 6t - 3.$$

Za bilo koju početnu vrijednost $t_0 \in \mathbb{R}$, definiramo niz vrijednosti t_n i niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za $n \in \mathbb{N}$, na sljedeći način

$$t_n = f(t_{n-1}) = f_n(t_0) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ puta}})(t_0).$$

(a) Nađite eksplicitni izraz za vrijednost funkcije $f_n(t_0)$ u ovisnosti o n i t_0.

(b) Izračunajte relativnu uvjetovanost $(\operatorname{cond} f_n)(t_0)$ funkcije f_n u točki t_0 i analizirajte njezino ponašanje za **velike** vrijednosti n, tj. kad $n \to \infty$.

(c) Iz te analize izvedite zaključak: za koje vrijednosti t_0 je računanje $t_n = f_n(t_0)$ stabilno (u relativnom smislu), a za koje vrijednosti je nestabilno?

(d) Za početnu vrijednost $t_0 = 1$, uzmimo aproksimaciju $\widehat{t_0} = 1.01$, s relativnom greškom 0.01 (1%). Za $n = 1, \ldots, 4$, izračunajte točne vrijednosti t_n, približne vrijednosti $\widehat{t_n} = f_n(\widehat{t_0})$, relativne uvjetovanosti $(\operatorname{cond} f_n)(t_0)$ i stvarne relativne greške izračunatih vrijednosti $\widehat{t_n}$ obzirom na prave vrijednosti t_n.

Uputa: Relativna uvjetovanost funkcije f u točki t je $(\operatorname{cond} f)(t) = t f'(t)/f(t)$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

2. travnja 2013.

$(8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

(b) U LR faktorizaciji bez pivotiranja, koje "strukture" nul-elemenata u matrici A se sigurno prenose u matrice L, odnosno, R? Kolika je složenost računanja takve faktorizacije za tridijagonalnu matricu A, reda n?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

2. travnja 2013.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 13 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ -1 & -4 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -16 \\ -10 \\ 30 \end{bmatrix}.$$

(b) Kako se radi pivotiranje u faktorizaciji Choleskog i kojem pivotiranju u LR faktorizaciji to odgovara? Napišite precizno kako se tada bira pivotni element u pojedinom koraku faktorizacije. Kako izgleda konačna faktorizacija (razlika obzirom na faktorizaciju Choleskog bez pivotiranja)?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

2. travnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$f(x) = (x+3)\exp\left(-\frac{4}{3}x + 2\right)$$

na intervalu $[0, 1]$. Nađite Hermiteov interpolacijski polinom koji interpolira funkciju f i njezinu derivaciju u rubnim čvorovima zadanog intervala.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na zadanom intervalu.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1/3$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

2. travnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **srijeda, 10. travnja 2013. u 9:30 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $\{x_0, \dots, x_n\}$ zadana mreža međusobno različitih čvorova.

(a) Napišite kako izgleda **Newtonova** baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, za problem interpolacije na zadanoj mreži čvorova.

(b) Opišite kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije $p(x_i) = f_i$, za $i = 0, \dots, n$, gdje je p polinom.

(c) Što su koeficijenti interpolacijskog polinoma zapisanog u Newtonovoj bazi? Navedite neka osnovna svojstva tih koeficijenata i opišite kako ih možemo efikasno računati.

(d) Koja je prednost Newtonove baze nad Lagrangeovom?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

2. travnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relacijom

$$f(t) = 5t - 4.$$

Za bilo koju početnu vrijednost $t_0 \in \mathbb{R}$, definiramo niz vrijednosti t_n i niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za $n \in \mathbb{N}$, na sljedeći način

$$t_n = f(t_{n-1}) = f_n(t_0) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ puta}})(t_0).$$

(a) Nađite eksplicitni izraz za vrijednost funkcije $f_n(t_0)$ u ovisnosti o n i t_0.

(b) Izračunajte relativnu uvjetovanost $(\operatorname{cond} f_n)(t_0)$ funkcije f_n u točki t_0 i analizirajte njezino ponašanje za **velike** vrijednosti n, tj. kad $n \to \infty$.

(c) Iz te analize izvedite zaključak: za koje vrijednosti t_0 je računanje $t_n = f_n(t_0)$ stabilno (u relativnom smislu), a za koje vrijednosti je nestabilno?

(d) Za početnu vrijednost $t_0 = 1$, uzmimo aproksimaciju $\widehat{t_0} = 1.01$, s relativnom greškom 0.01 (1%). Za $n = 1, \ldots, 4$, izračunajte točne vrijednosti t_n, približne vrijednosti $\widehat{t_n} = f_n(\widehat{t_0})$, relativne uvjetovanosti $(\operatorname{cond} f_n)(t_0)$ i stvarne relativne greške izračunatih vrijednosti $\widehat{t_n}$ obzirom na prave vrijednosti t_n.

Uputa: Relativna uvjetovanost funkcije f u točki t je $(\operatorname{cond} f)(t) = tf'(t)/f(t)$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

2. travnja 2013.

$(8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

(b) Napišite definiciju dijagonalne dominantnosti po stupcima za kvadratnu matricu A, reda n. Što vrijedi za takve matrice u Gaussovim eliminacijama bez pivotiranja i je li potrebno parcijalno pivotiranje?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

2. travnja 2013.

$(8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & -4 & 14 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ -12 \\ 44 \end{bmatrix}.$$

(b) Napišite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti faktorizacije Choleskog kvadratne matrice A, reda n. Koje pretpostavke na matricu A garantiraju egzistenciju ove faktorizacije? Koji uvjet daje jedinstvenost faktorizacije i što bismo mogli "varirati" u faktorizaciji, ako njega nema?

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 5

2. travnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$f(x) = (x+3)\,\exp\left(-\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right)$$

na intervalu $[0, 1]$. Nađite Hermiteov interpolacijski polinom koji interpolira funkciju f i njezinu derivaciju u rubnim čvorovima zadanog intervala.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na zadanom intervalu.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 1/4$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ

2. travnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **srijeda, 10. travnja 2013. u 9:30 sati**.

1

ZADATAK 1

(10 bodova.) Neka je $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ zadana mreža čvorova i neka je f zadana funkcija na intervalu $[x_0, x_n]$.

(a) Napišite definiciju **linearne splajn** interpolacije za funkciju f na zadanoj mreži. Koje uvjete interpolacije i glatkoće zadovoljava ova interpolacija? Mora li uvijek postojati i je li jedinstvena?

(b) Ukratko komentirajte je li linearna splajn interpolacija lokalna ili ne.

(c) Uz koje uvjete na mreže čvorova dobivamo uniformnu konvergenciju linearne splajn interpolacije prema funkciji f?

(d) Kojeg reda je konvergencija za dovoljno glatke funkcije f?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

2. travnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relacijom

$$f(t) = 7t - 4.$$

Za bilo koju početnu vrijednost $t_0 \in \mathbb{R}$, definiramo niz vrijednosti t_n i niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za $n \in \mathbb{N}$, na sljedeći način

$$t_n = f(t_{n-1}) = f_n(t_0) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ puta}})(t_0).$$

(a) Nađite eksplicitni izraz za vrijednost funkcije $f_n(t_0)$ u ovisnosti o n i t_0.

(b) Izračunajte relativnu uvjetovanost $(\operatorname{cond} f_n)(t_0)$ funkcije f_n u točki t_0 i analizirajte njezino ponašanje za **velike** vrijednosti n, tj. kad $n \to \infty$.

(c) Iz te analize izvedite zaključak: za koje vrijednosti t_0 je računanje $t_n = f_n(t_0)$ stabilno (u relativnom smislu), a za koje vrijednosti je nestabilno?

(d) Za početnu vrijednost $t_0 = 1$, uzmimo aproksimaciju $\widehat{t_0} = 1.01$, s relativnom greškom 0.01 (1%). Za $n = 1, \ldots, 4$, izračunajte točne vrijednosti t_n, približne vrijednosti $\widehat{t_n} = f_n(\widehat{t_0})$, relativne uvjetovanosti $(\operatorname{cond} f_n)(t_0)$ i stvarne relativne greške izračunatih vrijednosti $\widehat{t_n}$ obzirom na prave vrijednosti t_n.

Uputa: Relativna uvjetovanost funkcije f u točki t je $(\operatorname{cond} f)(t) = t f'(t)/f(t)$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

2. travnja 2013.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

(b) Napišite precizno kako se bira pivotni element kod potpunog pivotiranja u k-tom koraku Gaussovih eliminacija, odnosno, LR faktorizacije. Kako tada izgleda konačna LR faktorizacija matrice A i kako se iz nje dobije rješenje linearnog sustava $Ax = b$?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 4

2. travnja 2013.

$(8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 13 & -3 \\ -4 & 2 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ -42 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

(b) Za koje matrice se može koristiti faktorizacija Choleskog? Za takve matrice, koje su prednosti faktorizacije Choleskog obzirom na LR faktorizaciju?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

2. travnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$f(x) = (x - 4) \exp\left(\frac{4}{3}x + 1\right)$$

na intervalu $[0, 1]$. Nađite Hermiteov interpolacijski polinom koji interpolira funkciju f i njezinu derivaciju u rubnim čvorovima zadanog intervala.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na zadanom intervalu.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 2/3$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij

2. travnja 2013.

Upute: Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Sva rješenja napišite isključivo na papire sa zadacima, jer jedino njih predajete. Ne zaboravite se **potpisati** na svim papirima! Skice smijete raditi i na drugim papirima koje će vam dati dežurni asistent. Rezultati i uvid u kolokvije: **srijeda, 10. travnja 2013. u 9:30 sati**.

1

Zadatak 1

(10 bodova.) Neka je $\{x_0, \ldots, x_n\}$ zadana mreža međusobno različitih čvorova.

(a) Napišite kako izgleda **Lagrangeova** baza u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n, za problem interpolacije na zadanoj mreži čvorova.

(b) Navedite osnovna svojstva te baze i njezin zapis preko polinoma čvorova. Koja je prednost tog zapisa?

(c) Opišite kako izgleda pripadna matrica linearnog sustava za problem interpolacije $p(x_i) = f_i$, za $i = 0, \ldots, n$, gdje je p polinom.

(d) Što su koeficijenti interpolacijskog polinoma zapisanog u Lagrangeovoj bazi?

JMBAG IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 2

2. travnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ relacijom

$$f(t) = 4t - 3.$$

Za bilo koju početnu vrijednost $t_0 \in \mathbb{R}$, definiramo niz vrijednosti t_n i niz funkcija $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za $n \in \mathbb{N}$, na sljedeći način

$$t_n = f(t_{n-1}) = f_n(t_0) = (\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ puta}})(t_0).$$

(a) Nađite eksplicitni izraz za vrijednost funkcije $f_n(t_0)$ u ovisnosti o n i t_0.

(b) Izračunajte relativnu uvjetovanost $(\operatorname{cond} f_n)(t_0)$ funkcije f_n u točki t_0 i analizirajte njezino ponašanje za **velike** vrijednosti n, tj. kad $n \to \infty$.

(c) Iz te analize izvedite zaključak: za koje vrijednosti t_0 je računanje $t_n = f_n(t_0)$ stabilno (u relativnom smislu), a za koje vrijednosti je nestabilno?

(d) Za početnu vrijednost $t_0 = 1$, uzmimo aproksimaciju $\widehat{t_0} = 1.01$, s relativnom greškom 0.01 (1%). Za $n = 1, \ldots, 4$, izračunajte točne vrijednosti t_n, približne vrijednosti $\widehat{t_n} = f_n(\widehat{t_0})$, relativne uvjetovanosti $(\operatorname{cond} f_n)(t_0)$ i stvarne relativne greške izračunatih vrijednosti $\widehat{t_n}$ obzirom na prave vrijednosti t_n.

Uputa: Relativna uvjetovanost funkcije f u točki t je $(\operatorname{cond} f)(t) = t f'(t)/f(t)$.

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 3

2. travnja 2013.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite LR faktorizaciju matrice A korištenjem parcijalnog pivotiranja, tj. nađite matricu permutacije P, te matrice L i R tako da je $PA = LR$.

(b) Napišite iskaz teorema o egzistenciji i jedinstvenosti LR faktorizacije kvadratne matrice A, reda n. Ukratko komentirajte što se događa ako bitni uvjeti teorema nisu ispunjeni.

JMBAG

IME I PREZIME

NUMERIČKA MATEMATIKA — 1. KOLOKVIJ — ZADATAK 4

2. travnja 2013.

($8 + 2 = 10$ bodova.)

(a) Korištenjem faktorizacije Choleskog riješite linearni sustav $Ax = b$, gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 13 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 12 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

(b) Napišite definiciju pozitivne definitnosti kvadratne matrice A, reda n, i navedite neka ekvivalentna svojstva. Može li se algoritam za faktorizaciju Choleskog iskoristiti za provjeru pozitivne definitnosti simetrične matrice? Što se tada događa ako matrica nije pozitivno definitna?

JMBAG

IME I PREZIME

Numerička matematika — 1. kolokvij — Zadatak 5

2. travnja 2013.

(10 bodova.) Zadana je funkcija (exp označava eksponencijalnu funkciju, tj. $\exp(z) = e^z$)

$$f(x) = (x - 4)\,\exp\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)$$

na intervalu $[0, 1]$. Nađite Hermiteov interpolacijski polinom koji interpolira funkciju f i njezinu derivaciju u rubnim čvorovima zadanog intervala.

(a) Izračunajte (u decimalnim brojevima) Newtonov oblik ovog interpolacijskog polinoma.

(b) Nađite ocjenu uniformne pogreške ove interpolacije na zadanom intervalu.

(c) Izračunajte vrijednost interpolacije u točki $x = 3/4$, ocjenu lokalne pogreške i pripadnu pravu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!