

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ

1. srpnja 2008.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Predajete samo papire koje ste dobili.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: ponedjeljak, 7. srpnja 2008. u 9h

1

ZADATAK 1

(10 bodova.) “Teorijsko pitanje” — dopisati odgovor.

Napišite oblik i osnovna svojstva Householderovog reflektora reda n .

2

ZADATAK 2

(10 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = \frac{a}{x} + bx$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y_i	1.5	1.4	1.7	2.1	2.5

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S . **Zabranjeno** je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 3
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_{-1}^0 e^{-x} \sin x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktanu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 4
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_2 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx \approx w_1 f(0) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \sqrt{x}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 5
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Nađite najmanje rješenje jednadžbe

$$xe^x = 1 + x^2$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ

1. srpnja 2008.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter.

Predajete samo papire koje ste dobili.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati i uvid u kolokvije: ponedjeljak, 7. srpnja 2008. u 9h

ZADATAK 1

1

(10 bodova.) “Teorijsko pitanje” — dopisati odgovor.

Ortogonalni polinomi $\{p_n \mid n \geq 0\}$ zadovoljavaju rekurziju oblika:

ZADATAK 2

2

(10 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = ax + b \ln x$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y_i	0.3	1.7	2.7	3.4	4.1

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S . **Zabranjeno** je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 3
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^1 \sin^3 x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 4
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvorove x_1 , x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_{-1}^1 \sqrt{|x|} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = \sqrt{|x|}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 5
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Nađite najveće rješenje jednadžbe

$$x \ln x = e^{-x} - \frac{1}{2}$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/4$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ

1. srpnja 2008.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter. Predajete samo papire koje ste dobili.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova! Rezultati i uvid u kolokvije: ponedjeljak, 7. srpnja 2008. u 9h

ZADATAK 1

1

(10 bodova.) “Teorijsko pitanje” — dopisati odgovor.

Koliki je red konvergencije Newtonove metode za rješavanje nelinearnih jednadžbi u okolini:

(a) jednostruke nultočke, (b) višestruke nultočke?

ZADATAK 2

2

(10 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = a\sqrt{x} + bx$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y_i	2.1	3.1	3.9	4.7	5.4

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S . **Zabranjeno** je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 3
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-3}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktnu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 4
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvor x_1 u Gauss–Radauovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(1)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = (1-x)^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 5
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Nađite najveću nultočku funkcije

$$f(x) = xe^x - x^3 - 1$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/2$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ

1. srpnja 2008.

Na kolokviju je dozvoljeno koristiti samo pribor za pisanje, neprogramabilni kalkulator, te službeni šalabahter.

Predajete samo papire koje ste dobili.

Izračunata rješenja (tj. brojevi) **bez ocjene greške** koja garantira traženu točnost **ne vrijede**, tj. donose 0 bodova!

Rezultati i uvid u kolokvije: ponedjeljak, 7. srpnja 2008. u 9h

1

ZADATAK 1

(10 bodova.) “Teorijsko pitanje” — dopisati odgovor.

Nultočke ortogonalnog polinoma p_n , stupnja n , s težinskom funkcijom w na intervalu $[a, b]$, imaju sljedeća svojstva:

2

ZADATAK 2

(10 bodova.) Diskretnom metodom najmanjih kvadrata nađite funkciju oblika

$$y(x) = ax + be^{-x}$$

koja aproksimira sljedeći skup podataka (točaka):

x_i	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y_i	1.2	1.7	2.3	3.0	3.8

Koristite sustav normalnih jednadžbi. Nađite aproksimacije i pogreške u čvorovima x_i i sumu kvadrata apsolutnih grešaka S . **Zabranjeno** je mijenjati oblik aproksimacijske funkcije!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 3
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Zadan je integral

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sh} x \cdot \sin x \, dx$$

i tražena točnost $\varepsilon = 10^{-3}$. Nađite potrebne brojeve podintervala n_T i n_S za garantiranu točnost ε u produljenoj trapeznoj i produljenoj Simpsonovoj formuli. Jednom od ovih formula izračunajte približnu vrijednost zadanog integrala s točnošću ε .

Izračunajte egzaktanu vrijednost integrala i pripadnu pogrešku.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za ocjenu greške!

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 4
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Odredite težine w_1 , w_2 i čvorove x_1 , x_2 u Gaussovoj integracijskoj formuli oblika

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} f(x) dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

iz uvjeta egzaktnosti ove formule na vektorskom prostoru polinoma što je moguće većeg stupnja. Koliki je polinomni stupanj egzaktnosti ove formule?

Pomoću ove formule izračunajte približnu vrijednost integrala za $f(x) = |x|^{3/2}$ i nađite pravu grešku.

NUMERIČKA MATEMATIKA – 2. KOLOKVIJ – ZADATAK 5
1. srpnja 2008.

(15 bodova.) Nađite najmanju nultočku funkcije

$$f(x) = e^{2x} - 2 - \sin x$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-6}$. Duljina početnog intervala za nalaženje nultočke mora biti barem $1/4$.

Napomena: Detaljno obrazložite sve svoje tvrdnje vezane za lokaciju nultočke i ocjenu greške!