Akra-Bazzi rekurzije

Tomislav Dragušica

PMF - MO

10.11.2023.

Akra-Bazzi rekurzije

- Rekurzivne funkcije oblika

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & , 1 \leq n \leq n_0 \\ f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \, T\left(\frac{n}{b_i}\right) & , n > n_0 \end{cases}$$

  - $n_0 \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $n_0 \geq \max_i b_i$
  - $k \in \mathbb{N}$
  - sve konstante $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ su strogo pozitivne
  - sve konstante $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \mathbb{R}$ su strogo veće od 1
  - f je nenegativna funkcija definirana na jako velikim nenegativnim realnim brojevima

$$T(n) = f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \, T\left(\frac{n}{b_i}\right)$$

- opisuju složenost podijeli pa vladaj algoritama koji problem raščlanjuju na podprobleme različitih veličina
- Zašto funkcija $T(n)$ kao argument prima $\frac{n}{b_i}$, što nije nužno prirodan broj?

Uvjet polinomnog rasta

Definicija:
Funkcija $f(x)$ definirana na svim jako velikim nenegativnim realnim brojevima ispunjava **uvjet polinomnog rasta** ako postoji konstanta $N > 0$ takva da vrijedi: za svaku konstantu $\phi \geq 1$ postoji konstanta $d > 1$(koja ovisi o ϕ) takva da

$$\frac{f(n)}{d} \leq f(\psi\, n) \leq d\, f(n)$$

za sve $\psi \in [1, \phi]$ i za sve $n \geq N$.

Primjeri:

- $f(n) = n^{54}$
- $f(n) = n \log_2^3 n$
- $f(n) = n^2 \left(\log_2 n\right) \left(\log_2 \log_2^5 n\right)$

Sve funkcije oblika $f(n) = \Theta\left(n^{\alpha}\, \log_2^{\beta} n\, log_2 \log_2^{\gamma} n\right)$, gdje su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ konstante, ispunjavaju uvjet polinomnog rasta.

Najmanje i najveće cijelo

- Zašto funkcija $T(n)$ kao argument prima $\frac{n}{b_i}$, što nije nužno prirodan broj?
- **Teorem:**
  Neka je $T(n)$ Akra-Bazzi rekurzija i neka je f funkcija koja zadovoljava uvjet polinomnog rasta. Neka je $T'(n)$ neka druga Akra-Bazzi rekurzija, ali takva da je $T\left(\frac{n}{b_i}\right)$ zamijenjen s $T\left(\left\lfloor\frac{n}{b_i}\right\rfloor\right)$ ili s $T\left(\left\lceil\frac{n}{b_i}\right\rceil\right)$. Tada vrijedi $T'(n) = \Theta(T(n))$.
- Dakle, kada funkcija f zadovoljava uvjet polinomnog rasta, zamjena $T\left(\frac{n}{b_i}\right)$ s $T\left(\left\lfloor\frac{n}{b_i}\right\rfloor\right)$ ili s $T\left(\left\lceil\frac{n}{b_i}\right\rceil\right)$ u rekurziji ne mijenja složenost rješenja.

Akra-Bazzi metoda

- metoda koja služi za rješavanje Akra-Bazzi rekurzija
- odredimo jedinstveni broj $p \in \mathbb{R}$ takav da je $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{{b_i}^p} = 1$

$$\left.\begin{aligned} &p \to -\infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{{b_i}^p} \to \infty \\ &p \to \infty \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{{b_i}^p} \to 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{postoji takav p}$$

Rješenje rekurzije dano je sa:

$$T(n) = \Theta\left(n^p\left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\,dx\right)\right)$$

Za dokaz ove tvrdnje koristit ćemo sljedeću lemu:

Lema: Ako je $f(x)$ nenegativna funkcija koja zadovoljava uvjet polinomnog rasta, onda postoje konstante $c_3, c_4 > 0$ takve da za $1 \leq i \leq k$ i za sve $n \geq 1$ vrijedi:

$$c_3\, f(n) \leq n^p \int_{\frac{n}{b_i}}^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}}\,dx \leq c_4\, f(n).$$

Dokaz leme

Iz uvjeta polinomnog rasta(za $\phi = b_i$ te uz $c_1 \coloneqq \frac{1}{d}$ i $c_2 \coloneqq d$) znamo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
n^p \int_{\frac{n}{b_i}}^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx &\le n^p \left(n - \frac{n}{b_i} \right) \frac{c_2\, f(n)}{\min\left\{ n^{p+1}, \left(\frac{n}{b_i}\right)^{p+1} \right\}} \\
&= \frac{\left(1 - \frac{1}{b_i}\right)\, c_2}{\min\left\{1, \frac{1}{b_i^{p+1}}\right\}} f(n) \\
&\le c_4\, f(n)
\end{aligned}
$$

, gdje je $c_4 \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $c_4 \ge \dfrac{\left(1 - \frac{1}{b_i}\right)\, c_2}{\min\left\{1, \frac{1}{b_i^{p+1}}\right\}}$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

S druge strane,

$$n^p \int_{\frac{n}{b_i}}^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx \geq n^p \left(n - \frac{n}{b_i}\right) \frac{c_1\, f(n)}{\max\left\{n^{p+1}, \left(\frac{n}{b_i}\right)^{p+1}\right\}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{b_i}\right)\, c_1}{\max\left\{1, \frac{1}{b_i^{p+1}}\right\}} f(n)$$

$$\geq c_3\, f(n)$$

, gdje je $c_3 \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $c_3 \leq \dfrac{\left(1 - \frac{1}{b_i}\right)\, c_1}{\max\left\{1, \frac{1}{b_i^{p+1}}\right\}}$ za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. $\square$

Dokaz Akra-Bazzi metode

Želimo dokazati da postoje konstante $C, D > 0$ takve da vrijedi

$$C\, n^p \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx\right) \leq T(n) \leq D\, n^p \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx\right)$$

Dokaz provodimo indukcijom po indeksu j takvom da vrijedi $\frac{n}{(\min_i b_i)^j} \leq n_0$.

Prvo provjerimo vrijedi li tvrdnja za $j = 0$ tj. za $n \in [1, n_0]$. Postoji $d_2 \in \mathbb{R}_+$

$$T(n) = \Theta(1) \leq d_2 \leq d_2 \frac{n^p}{\min\{1, n_0^p\}} \leq d_2 \frac{n^p \left(1 + \int_1^x \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx\right)}{\min\{1, n_0^p\}}$$

, gdje druga nejednakost vrijedi jer n^p na intervalu $[1, n_0^p]$ poprima minimum u 1 (za $p \geq 0$), odnosno u n_0^p (za $p < 0$), a treća jer je vrijednost integrala nenegativna.

Dakle, za D možemo uzeti bilo koji realan broj takav da vrijedi $D \geq \frac{d_2}{\min\{1, n_0^p\}}$ jer je tada

$$T(n) \leq D\, n^p \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx\right).$$

Sada provedimo korak indukcije. Pretpostavimo da za prozvoljan indeks $j \in \mathbb{N}_0$ vrijedi da za sve $l \leq j$ postoji $D > 0$ takav da vrijedi

$$T(n) \leq D\, n^p \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx\right).$$

Tada za $j + 1$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
T(n) &= f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \, T\left(\frac{n}{b_i}\right) \\
&\le f(n) + \sum_{i=1}^{k} a_i \, D \, \left(\frac{n}{b_i}\right)^p \left(1 + \int_1^{\frac{n}{b_i}} \frac{f(x)}{x^{p+1}} \, dx\right) && \text{(po pretp. indukcije)} \\
&= f(n) + D \, n^p \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^p} \left(1 + \int_1^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}} \, dx - \int_{\frac{n}{b_i}}^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}} \, dx\right) \\
&\le f(n) + D \, n^p \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{b_i^p} \left(1 + \int_1^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}} \, dx - \frac{c_3}{n^p} f(n)\right) && \text{(po lemi)} \\
&= f(n) + D \, n^p \left(1 + \int_1^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}} \, dx - \frac{c_3}{n^p} f(n)\right) \\
&= f(n) + D \, n^p \left(1 + \int_1^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}} \, dx\right) - D \, c_3 \, f(n) \\
&\le D \, n^p \left(1 + \int_1^{n} \frac{f(x)}{x^{p+1}} \, dx\right)
\end{aligned}
$$

, pod uvjetom da je $D \geq \frac{1}{c_3}$. Dakle, za $D \geq \max\left\{\frac{d_2}{\min\{1, n_0^p\}}, \frac{1}{c_3}\right\}$ vrijedi

$$T(n) \leq D\, n^p \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx\right).$$

Analogno se dobije da je za $C \leq \min\left\{\frac{d_1}{\max\{1, n_0^p\}}, \frac{1}{c_4}\right\}$ vrijedi

$$C\, n^p \left(1 + \int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\, dx\right) \leq T(n).$$

Primjer:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + n$$

- Akra-Bazzi rekurzija za koju vrijedi $a_1 = a_2 = 1, b_1 = 5, b_2 = \frac{10}{7}$ i $f(n) = n$
- $p \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi
$$\left(\frac{1}{5}\right)^p + \left(\frac{7}{10}\right)^p = 1$$
- možemo izračunati p, ali riješit ćemo zadatak bez računanja p
- $\left(\frac{1}{5}\right)^0 + \left(\frac{7}{10}\right)^0 = 2$ i $\left(\frac{1}{5}\right)^1 + \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \frac{9}{10}$ pa vrijedi $p \in (0, 1)$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \Theta\left(n^p\left(1+\int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\,dx\right)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\left(1+\int_1^n x^{-p}\,dx\right)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\left(1+\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right)\Bigg|_1^n\right)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\left(1+\left(\frac{n^{1-p}}{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)\right)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\,\Theta(n^{1-p})\right)\\
&= \Theta\left(n\right)
\end{aligned}
$$

, gdje predzadnja jednakost vrijedi jer je $1-p>0$.

Primjer:

$$T(n) = 2\,T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$$

- Akra-Bazzi rekurzija za koju vrijedi $a_1 = 2, a_2 = 1, b_1 = 2, b_2 = 3$ i $f(n) = 1$
- $p \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1}{3}\right)^p = 1$$

- $p \approx 1.3646$

$$
\begin{aligned}
T(n) &= \Theta\left(n^p\left(1+\int_1^n \frac{f(x)}{x^{p+1}}\,dx\right)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\left(1+\int_1^n x^{-p-1}\,dx\right)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\left(1+\left(\frac{x^{-p}}{-p}\right)\Bigg|_1^n\right)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\left(1+\left(\frac{n^{-p}}{-p}-\frac{1}{-p}\right)\right)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\,\Theta(1)\right)\\
&= \Theta\left(n^p\right)\\
&\approx \Theta\left(n^{1.3646}\right)
\end{aligned}
$$

, gdje predzadnja jednakost vrijedi jer je $-p < 0$.

Hvala na pozornosti!