Oblikovanje i analiza algoritama

Matej Mihelčić

Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu

matmih@math.hr

13. prosinca, 2023.

Problem stabilnog sparivanja[1]

- Promatramo dva skupa $S_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$ i $S_2 = \{b_1, \dots, b_n\}$ koji sadrže određeni broj elemenata različitog tipa (S_1 muškarce, S_2 žene, S_1 znanstvenike, S_2 fakultete itd).
- $S_1 \cap S_2 = \varnothing$
- $S_1 \times S_2 = \{(s_{1_i}, s_{2_j}),\ s_{1_i} \in S_1,\ s_{2_j} \in S_2\}$
- **Definicija**: **Sparivanje** S je skup uređenih parova iz $S_1 \times S_2$ takvih da se svaki element $s_{1_i} \in S_1$ i svaki element $s_{2_j} \in S_2$ nalaze u **najviše** jednom uređenom paru skupa S.
- **Defnicija**: **Savršeno sparivanje** S' je takvo sparivanje da se svaki element $s_{1_i} \in S_1$ i svaki element $s_{2_j} \in S_2$ nalaze u **točno** jednom uređenom paru skupa S.
- **Zadatak**: konstruirajte primjer sparivanja i savršenog sparivanja.

[1] Literatura: Kristina Udovičić, *Problem stabilnog sparivanja*, Diplomski rad, PMF-MO, 2021

Problem stabilnog sparivanja

- Svakom elementu $s_{1_i} \in S_1$ i $s_{2_j} \in S_2$ pridružena je rang-lista preferencija sparivanja.
- **Definicija**: Kažemo da element $s_{1_i} \in S_1$ preferira element $s_{2_j} \in S_2$ više od elementa $s_{2_k} \in S_2$, ako je element s_{2_j} više rangiran od elementa s_{2_k} na rang listi preferencija od s_{1_i}.
- **Definicija**: Kažemo da element $s_{2_j} \in S_2$ preferira element $s_{1_i} \in S_1$ više od elementa $s_{1_k} \in S_1$, ako je element s_{1_i} rangiran više od elementa s_{1_k} na rang listi preferencija od s_{2_j}.
- **Primjer**: $\begin{array}{c} s_{1_1}: \\ s_{1_2}: \\ s_{1_3}: \end{array} \begin{pmatrix} s_{2_2} & s_{2_1} & s_{2_3} \\ s_{2_3} & s_{2_1} & s_{2_2} \\ s_{2_2} & s_{2_3} & s_{2_1} \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_{2_1}: \\ s_{2_2}: \\ s_{2_3}: \end{array} \begin{pmatrix} s_{1_1} & s_{1_2} & s_{1_3} \\ s_{1_3} & s_{1_2} & s_{1,1} \\ s_{1_1} & s_{1_3} & s_{1,2} \end{pmatrix}$

Problem stabilnog sparivanja

- **Definicija**: Neka je zadano savršeno sparivanje S i neka su (s_{1_i}, s_{2_j}), $(s_{1_k}, s_{2_l}) \in S$ takvi da element s_{1_i} preferira s_{2_l} nad s_{2_j} i da s_{2_l} preferira s_{1_i} nad s_{1_k}. (s_{1_i}, s_{2_l}) zovemo **nestabilnost** u S.
- Cilj je dobiti stabilno sparivanje (ono koje ne sadrži nestabilnosti).
- **Definicija**: Za sparivanje S kažem da je **stabilno** ako vrijedi:
  - S je savršeno sparivanje.
  - S ne sadrži nestabilnosti.
- **Definicija**: Za sparivanje S kaže se da je **nestabilno** ako nije stabilno.
- **Definicija**: Za stabilno sparivanje S kažemo da je **optimalno** ako za svaki uređeni par $(s_{1_i}, s_{2_k}) \in S$ vrijedi:
  - U svakom stabilnom sparivanju $S' \neq S$, za uređeni par $(s_{1_i}, s_{2_p}) \in S'$:
    - s_{1_i} preferira s_{2_k} nad s_{2_p} ili
    - $s_{2_k} = s_{2_p}$
  - U svakom stabilnom sparivanju $S' \neq S$, za uređeni par $(s_{1_t}, s_{2_k}) \in S'$:
    - s_{2_k} preferira s_{1_i} nad s_{1_t} ili
    - $s_{1_t} = s_{1_i}$

Problem stabilnog sparivanja

- **Teorem**: Optimalno sparivanje je jedinstveno.
- **Dokaz**: Pretpostavimo suprotno, tj. da su S i S' dva različita optimalna sparivanja. Budući da $S \neq S'$, možemo pretpostaviti $(s_{1_i}, s_{2_j}) \in S$ i $(s_{1_i}, s_{2_k}) \in S'$, $s_{2_j} \neq s_{2_k}$. s_{1_i} ne može imati jednaku preferenciju prema s_{2_j} i s_{2_k}. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da s_{1_i} preferira s_{2_j} više od s_{2_k}. Slijedi da sparivanje S' nije optimalno sparivanje.
- Optimalno sparivanje ne mora postojati. **Zadatak**: konstruirajte primjer skupova S_1, S_2 i matrica preferencija, tako da ne postoji optimalno sparivanje elemenata iz S_1 i S_2.

Gale-Shapleyev algoritam

- `inicijalizacija`: svi elementi skupa S_1 i svi elementi skupa S_2 su slobodni.
- dok postoji slobodan $s_{1_i} \in S_1$ koji nije pokušao spajanje sa svakim $s_{2_j} \in S_2$
    - izaberi s_{1_i}
    - neka je $s_{2_k} \in S_2$ najviše rangirani element na rang listi preferencija elementa s_{1_i} s kojim s_{1_i} nije pokušao spajanje
    - ako je s_{2_k} slobodan
        - $S = S \cup \{(s_{1_i}, s_{2_k})\}$
    - inače
        - neka je $s_{1_l} \in S_1$ element t.d $(s_{1_l}, s_{2_k}) \in S$
        - Ako je preferencija s_{2_k} prema s_{1_l} veća nego prema s_{1_i}, s_{1_i} ostaje slobodan
        - inače $S = S \setminus \{(s_{1_l}, s_{2_k})\} \cup \{(s_{1_i}, s_{2_k})\}$ i s_{1_l} je slobodan
- vrati skup S

Gale-Shapleyev algoritam

- Za par $(s_{1_i}, s_{2_j}) \in S$ kažemo da je sparen.
- Elementi s_{1_k} i s_{2_p} koji nisu spareni su slobodni.
- Slobodan element $s_{1_k} \in S_1$ može započeti spajanje s nekim elementom $s_{2_p} \in S_2$. Element s_{2_p} može prihvatiti ili odbiti spajanje (ovisno o rang-listi preferencija).
- Inicijalno su svi elementi slobodni.
- Svaki element $s_{2_p} \in S_2$ prihvaća prvi prijedlog za spajanje (bez obzira na poziciju pripadnog elementa skupa S_1 u rang listi preferencija). Razlog, da se ne izgubi potencijalno dobar kandidat za spajanje.
- $s_{2_p} \in S_2$ prihvaća spajanje sa svakim elementom skupa S_1 koji je više u rang-listi preferencija od elementa s kojim je s_{2_p} trenutno sparen.
- Element $s_{1_i} \in S_1$ ne radi pokušaje sparivanja ukoliko je već sparen (pošto on bira najboljeg mogućeg kandidata iz S_2 za sparivanje).
- Element $s_{1_i} \in S_1$ može postati slobodan u nekoj iteraciji (iako je ranije bio sparen).
- Elemente skupa S_1 obrađujemo u proizvoljnom poretku.

Gale-Shapleyev algoritam

- **Lema**: Rezultat Gale-Shapleyevog algoritma je sparivanje.
- **Dokaz**: iz psudokoda vrijedi:
  - svaki element skupa S_1 je sparen s najviše jednim elementom skupa S_2. Također, svaki element skupa S_2 je sparen s barem jednim elementom skupa S_1. Po definiciji sparivanja vrijedi tvrdnja.
- **Lema**: elementi skupa S_1 mogu promijeniti stanje iz sparen u slobodan. Svakim sljedećim sparivanjem, elementi skupa S_1 postaju spareni s elementom iz S_2 koji imaju manju preferenciju od elementa s kojim su bili prethodno spareni.
- **Lema**: Elementi skupa S_2 postaju spareni u ternutku prvog sparivanja. Prihvaćanjem svakog idućeg sparivanja, elementi iz S_2 se sparuju s elementom kojeg više preferiraju od prethodnog sparenog elementa.

- **Lema**: Neka tijekom izvršavanja Gale-Shapleyevog algoritma postoji slobodan element $s_{1_i} \in S_1$, tada postoji element $s_{2_k} \in S_2$ s kojim se s_{1_i} nije pokušao spariti.
- **Dokaz**: Neka je $|S_1| = |S_2| = n$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji slobodan element $s_{1_i} \in S_1$ koji se pokušao spariti sa svim elementima $s_{2_j} \in S_2$. Vrijedi da je svaki element $s_{2_j} \in S_2$ primio zahtjev za sparivanje. Pošto elementi $s_{2_j} \in S_2$ ostaju spareni nakon prvog uparivanja i zbog činjenice da je s_{1_i} slobodan vrijedi: $|S| = n, \; |S_2| = n, \; |S_1 \setminus \{s_{1_i}\}| = n - 1$, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Gale-Shapleyev algoritam

- **Teorem**: Rezultat Gale-Shapleyevog algoritma je savršeno sparivanje.
- **Dokaz:** Neka je skup S rezultat Gale-Shapleyevog algoritma. Prema **Lemi** taj skup je sparivanje. Treba dokazati da je sparivanje savršeno.
- Pretpostavimo suprotno, da je sparivanje S rezultat Gale-Shapleyevog algoritma koje nije savršeno. Pošto je S sparivanje niti jedan element skupa S_1 ne može biti sparen s više elemenata skupa S_2 i obratno. Jedini mogući slučaj je da je neki element skupa S_1 ili neki element skupa S_2 ostao slobodan.
  - Pretpostavimo da je element s_{1_i} skupa S_1 ostao slobodan. Tada po **Lemi** mora postojati i element skupa S_2 s kojim se s_{1_i} nije pokušao spariti. Međutim, tada izvršavanje Gale-Shapleyevog algoritma nije završeno, što je kontradikcija s pretpostavkom.
  - Pretpostavimo da je element s_{2_j} skupa S_2 ostao slobodan. Pošto je po pretpostavci Gale-Shapleyev algoritam izvršen, slijedi da ne postoji element $s_{1_k} \in S_1$ koji se pokušao spariti sa svim elementima skupa S_2. Dakle s_{2_j} nije primio ponudu o sparivanju. Zbog $|S_1| = |S_2|$, mora postojati element $s_{1_p} \in S_1$ koji je slobodan. Stoga Gale-Shapleyev algoritam nije završio izvođenje što je kontradikcija.

Gale-Shapleyev algoritam

- **Teorem**: Rezultat svakog izvršavanja Gale-Shapleyevog algoritma je stabilno sparivanje.
- **Dokaz**: Neka je S rezultat Gale-Shapleyevog algoritma. Prema **Definiciji**, treba pokazati da je S savršeno sparivanje i da ne sadrži nestabilnosti. Pošto iz **Teorema** slijedi da je S savršeno sparivanje, treba dokazati da S ne sadrži nestabilnosti.
- Pretpostavimo suprotno, tj. da je S rezultat izvršavanja Gale-Shapleyevog algoritma i neka je s_{1_i}, s_{2_j} nestabilnost u S. Tada postoje dva para (s_{1_i}, s_{2_k}) i (s_{1_p}, s_{2_j}) takva da s_{1_i} preferira s_{2_j} i da s_{2_j} preferira s_{1_i}. Pošto je S rezultat izvršavanja Galey-Shapleyevog algoritma zaključujemo da se posljednje sparivanje elementa s_{1_i} dogodilo s elementom s_{2_k}.
  - s_{1_i} je pokušao sparivanje s s_{2_j} prije sparivanja sa s_{2_k}. Tada je s_{2_j} odbio sparivanje s s_{1_i} zbog nekog drugog elementa s_{1_t}. Pošto je na kraju izvršavanja s_{2_j} sparen s s_{1_p} ili $s_{1_p} = s_{1_t}$ ili s_{2_j} preferira s_{1_p} nad s_{1_t}. Oba slučaja su u kontradikciji s pretpostavkom.
  - s_{1_i} je pokušao sparivanje s s_{2_k} prije sparivanja sa s_{2_j}. U ovom slučaju s_{1_i} preferira s_{2_k} nad s_{2_j}, što je kontradikcija s pretpostavkom.

Gale-Shapleyev algoritam

- **Definicija**: Kažemo da je element s_{2_j} **valjani partner** elementa s_{1_i} ako postoji stabilno sparivanje S koje sadrži uređeni par (s_{1_i}, s_{2_j}).
- **Definicija**: Kažemo da je element s_{2_j} **najbolji valjani partner** elementa s_{1_i} ako je s_{2_j} valjani partner od s_{1_i} i ako nijedan element $s_{2_k} \in S_2$ koji s_{1_i} preferira više od s_{2_j} nije valjani partner od s_{1_i}.
- Definiramo skup $S^* = \{(s_{1_i}, f(s_{1_i})) : s_{1_i} \in S_1\}$, gdje je $f(s_{1_i})$ najbolji valjani partner od s_{1_i}.

- **Teorem**: Rezultat svakog izvršavanja Gale-Shapleyevog algoritma je skup S^*.
- **Dokaz**: Pretpostavimo suprotno, tj. da je Σ neko izvršavanje Gale-Shapleyevog algoritma takvo da njegov rezultat nije skup S^*. Slijedi da je rezultat izvršavanja Σ stabilno sparivanje S u kojem postoji element $s_{1_i} \in S_1$ koji nije sparen s najboljim parom $s_{2_j} \in S_2$. Pretpostavimo da je element s_{1_i} sparen sa $s_{2_k} \in S_2$, koji je njegov valjan partner. Promotrimo prvi trenutak u izvršavanju Σ u kojem je neki element $s_{1_t} \in S_1$ odbijen od strane najboljeg partnera $f(s_{1_t})$.
- Pretpostavimo da je $s_{2_k} \in S_2$ prvi element koji je odbio sparivanje sa s_{1_i}. Pošto s_{1_i} izvodi sparivanja prema rang-listi preferencija, slijedi da je s_{2_k} njegov najbolji valjani partner, odnonso $s_{2_k} = f(s_{1_i}) = s_{2_j}$.
- Element s_{2_j} je odbio sparivanje iz jednog od razloga:
    a) Element s_{2_j} je sparen s $s_{1_t} \in S_1$ kojeg preferira više od s_{1_i}.
    b) Element s_{2_j} je prihvatio sparivanje s s_{1_i} i kasnije ga odbio u korist elementa s_{1_t}.

Gale-Shapleyev algoritam

- **Dokaz** (nastavak): Kako je s_{2_j} po pretpostavci valjan partner elementa s_{1_i}, prema **Definiciji** postoji stabilno sparivanje S' koje sadrži par (s_{1_i}, s_{2_j}). Odredimo partnera od s_{1_t} u tom sparivanju.
- Pretpostavimo da je s_{1_t} u sparivanju S' sparen s elementom $s_{2_k} \in S_2$. Pošto je S' stabilno sparivanje i $(s_{1_i}, s_{2_j}) \in S'$, vrijedi $s_{2_k} \neq s_{2_j}$.
  - U izvršavanju Σ, prvo odbijanje nekog elementa $s_{1_p} \in S_1$ je bilo odbijanje elementa s_{1_i} od strane elementa s_{2_j}. Slijedi da element s_{1_t} do tog trenutka nije bio odbijen niti od jednog drugog valjanog partnera. Pošto je u tom trenutku s_{1_t} sparen sa s_{2_j} slijedi da s_{1_t} preferira s_{2_j} u odnosu na s_{2_k}. Također vrijedi da s_{2_j} preferira s_{1_t} u odnosu na s_{1_i}. Dakle, postoji nestabilnost (s_{1_k}, s_{2_j}) u S', što je kontradikcija sa stabilnošću sparivanja S' .

- **Definicija**: Kažemo da je $s_{1_i} \in S_1$ **valjani partner** elementa $s_{2_j} \in S_2$ ako postoji stabilno sparivanje koje sadrži uređeni par (s_{1_i}, s_{2_j}).
- **Definicija**: Kažemo da je $s_{1_i} \in S_1$ **najgori valjani partner** elementa $s_{2_j} \in S_2$ ako je s_{1_i} valjani partner elementa s_{2_j} i ako nijedan element $s_{1_k} \in S_1$ kojega s_{2_j} preferira manje od s_{1_i} nije valjani partner od s_{2_j}.
- **Teorem**: U stabilnom sparivanju S, svaki $s_{2_j} \in S_2$ je sparen sa svojim najgorim valjanim partnerom.
- **Dokaz**: Pretpostavimo suprotno. Neka je S stabilno sparivanje takvo da za uređeni par $(s_{1_i}, s_{2_j}) \in S$ vrijedi s_{1_i} nije najgori valjani partner elementa s_{2_j}. Po **Definiciji**, postoji stabilno sparivanje S' u kojem je s_{2_j} sparen s $s_{1_k} \in S_1$, tako da s_{2_j} preferira s_{1_k} manje od s_{1_i}. Element s_{1_i} je u S' sparen s elementom $s_{2_p} \in S_2$, $s_{2_p} \neq s_{2_j}$. Pošto je $(s_{1_i}, s_{2_j}) \in S$ vrijedi da je s_{2_j} najbolji partner elementa s_{1_i}, preferira s_{2_j} u odnosu na s_{2_p}. Za stabilno sparivanje S' vrijedi:
  $(s_{1_i}, s_{2_p}) \in S'$, $(s_{1_k}, s_{2_j}) \in S'$ i s_{1_i} preferira s_{2_j}, te s_{2_j} preferira s_{1_i}.
  (s_{1_i}, s_{2_j}) je nestabilnost u S' što je kontradikcija.

Gale-Shapleyev algoritam - vremenska složenost

- **Teorem**: Gale-Shaplyev algoritam završava nakon najviše n^2 iteracija petlje (složenost je iz $\mathcal{O}(n^2)$).
- **Dokaz**: Operacija pokušaja sparivanja se izvršava prilikom svake iteracije petlje. U svakoj iteraciji se pokuša upariti jedan par iz $S_1 \times S_2$. Pošto $|S_1 \times S_2| = n^2$ zbog $|S_1| = |S_2| = n$, te činjenice da će u najgorem slučaju svaki element iz S_1 morati pokušati uparivanje sa svakim elementom iz S_2, vrijedi tvrdnja teorema.

Stabilno sparivanje - primjer

Primjer: Neka je zadan skup od $M = \{m_1, m_2, m_3\}$ muškaraca i skup $W = \{w_1, w_2, w_3\}$ žena. Neka su preferencije dane matricama:

$$\begin{array}{c} m_1: \\ m_2: \\ m_3: \end{array} \begin{pmatrix} w_1 & w_3 & w_2 \\ w_2 & w_3 & w_1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} w_1: \\ w_2: \\ w_3: \end{array} \begin{pmatrix} m_2 & m_1 & m_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix}$$

Izvršimo Gale-Shapleyev algoritam na danom primjeru.

korak	promatrani par	sparivanja
init	–	$S = \emptyset$
1	(m_1, w_1)	$S = \{(m_1, w_1)\}$
2	$(m_3, {\color{red}w_1})$	$S = \{(m_1, w_1)\}$
3	(m_2, w_2)	$S = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2)\}$
4	$(m_3, {\color{green}w_2})$	$S = \{(m_1, w_1), (m_3, w_2)\}$
5	(m_2, w_3)	$S = \{(m_1, w_1), (m_3, w_2), (m_2, w_3)\}$