OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — 1. kolokvij

22. 11. 2017.

1\. (10) Nađite točan red veličine relacijom Θ za funkciju $incx(n)$ = broj koliko puta se izvršava naredba `x = x + 1` u svakom od sljedećih dijelova programa (`/` je operator cjelobrojnog dijeljenja, kao u C-u):

(a)
```
for i = 1 to n {
  j = i * i;
  while (j <= n) {
    x = x + 1;
    j = j + 1;
  }
}
```

(b)
```
i = 1;
while (i <= n) {
  j = i;
  while (j >= 1) {
    x = x + 1;
    j = j / 2;
  }
  i = i + 2;
}
```

Ukratko, ali precizno, argumentirajte svaki odgovor!

2\. (10) Zadana je rekurzivna relacija

$$T(n) = 9\,T(n/3) + n^2,$$

uz početni uvjet $T(1) = d > 0$. Nađite uvjetno asimptotsko ponašanje relacijom Θ za rješenje $T(n)$, ako je n potencija od 3. Može li se dobiveno rješenje proširiti tako da asimptotsko ponašanje vrijedi bezuvjetno, za svaki dovoljno veliki $n \in \mathbb{N}$, za rekurziju

$$T(n) = 5\,T(\lfloor n/3 \rfloor) + 4\,T(\lceil n/3 \rceil) + n^2, \quad \text{za } n \geq 2,$$

uz početne uvjete $T(0) = 0$ i $T(1) = d > 0$?

OKRENITE!

3. (20) Zadani su prirodni broj n i polje $A[1..n]$ uzlazno sortiranih cijelih brojeva, koje je kružno pomaknuto (ili zarotirano) k mjesta udesno, za neki nepoznati k (uz $0 \leq k < n$). Na primjer, $[35, 42, -5, 15, 27, 29]$ je sortirano polje koje je kružno pomaknuto $k = 2$ mjesta udesno, a $[27, 29, 35, 42, -5, 15]$ je pomaknuto $k = 4$ mjesta udesno. Sastavite algoritam koji nalazi i vraća točnu vrijednost pomaka k. Složenost algoritma mjerimo brojem usporedbi parova elemenata iz A.

(a) U ovom dijelu, pretpostavljamo da su svi cijeli brojevi u polju međusobno različiti. Sastavite algoritam složenosti $O(\log n)$ za nalaženje pomaka k. Ukratko, ali precizno, opišite algoritam (u nekoliko rečenica), napišite pseodo-kôd algoritma i dajte kratku (ali preciznu) argumentaciju da je složenost algoritma zaista u $O(\log n)$.

(b) U ovom dijelu, unaprijed znamo samo da postoje barem dvije različite vrijednosti u A, tj. može biti jednakih elemenata, ali znamo da nisu svi jednaki. Može li se napraviti jednostavna modifikacija algoritma iz (a), tako da radi i u ovom slučaju, a da je složenost i dalje u $O(\log n)$? Ako da, pokažite kako, i ukratko argumentirajte ocjenu za složenost. U protivnom, objasnite (primjerom) zašto algortam iz (a) ne valja, ukratko opišite korektan algoritam za ovaj slučaj, i nađite njegovu složenost.

4. (20) Tvrtka je izumila super-jako jaje. Za reklamu, tvrtka želi testirati takvo jaje u neboderu koji ima n katova, gdje je $n \geq 1$ unaprijed poznat.

Dobili smo dva identična super-jajeta za eksperiment, i trebamo odrediti najviši kat $\ell \in \{0, \ldots, n\}$, s kojeg se takvo jaje može ispustiti, a da se ne razbije. Bilo koje jaje će se razbiti ako ga ispustimo s kata strogo većeg od ℓ, i nikada se neće razbiti ako ga ispustimo s kata manjeg ili jednakog ℓ. Isto jaje može se ispustiti više puta, ali kad se jednom razbije, onda ga više ne možemo koristiti.

Međutim, ne želimo ispuštati jaja više puta nego što je to zaista nužno. Nađite strategiju koja ima najmanji (maksimalni) broj ispuštanja, koji je potreban da se pronađe najviši "sigurni" kat ℓ u svim slučajevima, tj. za sve moguće vrijednosti od ℓ.

(a) Prvo pogledajte slučaj kad imamo samo jedno jaje (a ne dva). Sastavite algoritam za određivanje ℓ u ovom slučaju, napišite ga u pseudo-kôdu i nađite maksimalni broj ispuštanja (u najgorem slučaju), po svim dozvoljenim vrijednostima za ℓ. Koristite sljedeće funkcije: `drop(i)` = ispusti jaje s kata i, `broken` = vraća `TRUE` ako se zadnje ispušteno jaje razbilo.

(b) Dva jajeta: Neka je $H(k)$ najveći broj katova za koji se problem može riješiti s k ispuštanja. S kojeg kata biste napravili prvo ispuštanje? Što je sljedeći korak? Napišite algoritam koji, za zadani k, nalazi ℓ u najviše k ispuštanja, za svaki $\ell \leq H(k)$.

(c) Nađite $H(k)$, za sve k. Iz toga zaključite koliki je k za zadani n. Koliki je minimalni broj ispuštanja potreban da se nađe ℓ za $n = 100$ katova?

REZULTATI: nedjelja, 26. 11. 2017., navečer (na webu),
ponedjeljak, 27. 11. 2017. u 12 sati. Saša Singer