OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — popravni kolokvij

11. 2. 2015.

1. (10) Napišite precizne definicije sljedećih pojmova:

   (a) funkcija f je **funkcija složenosti**,

   (b) funkcija f **polinomno raste**.

   Kojoj klasi rasta pripada funkcija $f : D \to f(D)$

$$f(x) = \frac{x^{2015}}{(\log x)^{2014}},$$

gdje je D prirodna domena ove funkcije? Precizno argumentirajte odgovor.

2. (10) Zadana je rekurzivna relacija

$$T(n) = 5\,T(n/4) + f(n), \quad f(n) = n,$$

uz početni uvjet $T(1) = d > 0$. Nađite uvjetno asimptotsko ponašanje relacijom Θ za rješenje $T(n)$, ako je n potencija od 4. Može li se dobiveno rješenje proširiti tako da asimptotsko ponašanje vrijedi bezuvjetno, za svaki dovoljno veliki $n \in \mathbf{N}$, za rekurziju

$$T(n) = 2\,T(\lfloor n/4 \rfloor) + 3\,T(\lceil n/4 \rceil) + n, \quad \text{za } n \geq 2,$$

uz početne uvjete $T(0) = T(1) = d > 0$?

3. (30) Velike prirodne brojeve $u \in \mathbf{N}$ prikazujemo pozicionim zapisom u nekoj fiksnoj bazi $b \geq 2$. Poznato je da za svaki realni broj $\alpha > 1$, postoji algoritam $M_\alpha(u, v)$ koji množi dva n-znamenkasta broja u i v u vremenu $T_\alpha(n) \in O(n^\alpha)$. Zadan je slijedeći algoritam za množenje velikih prirodnih brojeva u i v, gdje je n_0 neka unaprijed zadana konstanta, neovisna o u i v.

```
function SuperMul (u, v) {
    dopuni manjeg od brojeva u i v nulama sprijeda, ako treba,
        tako da oba broja imaju točno po n znamenki;
    if n ≤ n_0 then
        pomnoži u i v standardnim algoritmom M_2 ;
    else {
        α := 1 + (lg lg n)/ lg n ;
        pomnoži u i v algoritmom M_α ;
    }
    return izračunati produkt ;
}
```

Množi li algoritam *SuperMul* n-znamenkaste brojeve u vremenu $T(n) \in O(n \log n)$? Precizno obrazložite!

OKRENITE!

4. (35) Zadano je n nepraznih poluotvorenih intervala realnih brojeva, oblika $I_i = \langle \ell_i, d_i]$, za $i = 1, \ldots, n$, gdje je ℓ_i lijevi, a d_i desni rub intervala. Pretpostavljamo da su intervali korektno zadani, tj. da vrijedi $\ell_i < d_i$, za $i = 1, \ldots, n$. Dva intervala različitih indeksa mogu imati neprazan presjek. Neki podskup A zadanog skupa intervala je **korektan** ako i samo ako sadrži samo međusobno disjunktne intervale, tj. za bilo koja dva intervala $I_i, I_j \in A$, vrijedi $i \neq j \Longrightarrow I_i \cap I_j = \emptyset$. Korektan podskup intervala je **optimalan** ako, među svim korektnim podskupovima, ima **najveći** mogući broj podintervala.

Sastavite **pohlepni** algoritam koji nalazi optimalni podskup skupa zadanih intervala, dokažite korektnost algoritma i nađite njegovu složenost.

(a) Pokažite primjerom da pohlepa po kriteriju "izaberi dozvoljeni interval s najmanjim lijevim rubom", tj. uzlazno po ℓ_i, **ne mora** biti optimalna. Dozvoljeni interval je onaj koji je disjunktan sa svim do tada izabranim.

(b) Pokažite primjerom da pohlepa po kriteriju "izaberi dozvoljeni interval najmanje duljine", tj. uzlazno po $d_i - \ell_i$, **ne mora** biti optimalna.

(c) Nađite "pravi" kriterij za pohlepu i dokažite njegovu optimalnost, tj. da ponovljenom primjenom tog kriterija dobivamo korektan podskup s najvećim brojem intervala.

(d) Sastavite algoritam koji nalazi optimalni podskup i nađite njegovu složenost. Algoritam treba vratiti broj elemenata u optimalnom podskupu i pripadno polje indeksa intervala u tom podskupu (u bilo kojem poretku).

5. (35) Neka je $(A, \cdot)$ algebarska struktura polugrupe obzirom na binarnu operaciju množenja $\cdot : A \times A \to A$, tj. množenje je asocijativno i ima neutralni element $e \in A$. Za svaki element $a \in A$, korektno su definirane potencije a^n, za svaki $n \geq 0$. Složenost takvog potenciranja mjerimo brojem potrebnih množenja elemenata iz A.

(a) Napišite algoritam koji računa a^n, za zadane a i n, koristeći tzv. **binarno** potenciranje (pozicioni zapis broja n u bazi 2). Kolika je složenost tog algoritma, u ovisnosti o n?

(b) Pokažite primjerom da binarno potenciranje **ne mora** biti optimalno u pogledu broja množenja, tj. nađite neki n za koji se a^n može izračunati sa strogo manje množenja.

(c) Zadana je linearna homogena rekurzivna relacija reda k, s konstantnim koeficijentima

$$t_n = a_{k-1} t_{n-1} + \cdots + a_0 t_{n-k}, \quad n \geq k,$$

uz zadane početne uvjete $t_0, \ldots, t_{k-1}$. Ukratko opišite kako se binarno potenciranje može iskoristiti za **brzo** računanje n-tog člana t_n. Kolika je složenost u ovisnosti o n?

REZULTATI: petak, 13. 2. 2015. u 12 sati. Saša Singer