

OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — 1. kolokvij

19. 11. 2014.

1. Između ponuđenih odgovora

(10)

$\Theta(1)$, $\Theta(\lg n)$, $\Theta(n)$, $\Theta(n \lg n)$, $\Theta(n^2)$, $\Theta(n^2 \lg n)$, $\Theta(n^3)$, $\Theta(2^n)$,

nađite točan red veličine za broj koliko puta se izvršava naredba $x = x + 1$ u svakom od sljedećih dijelova programa (/ je operator cjelobrojnog dijeljenja, kao u C-u):

```
(a) for i = 1 to n {
      j = n;
      while (j >= 1) {
        x = x + 1;
        j = j / 2;
      }
    }

(b) i = 1;
    while (i < n) {
      for j = 1 to n
        for k = 1 to i
          x = x + 1;
      i = i * 3;
    }
```

Ukratko **argumentirajte** odgovore!

2. Zadana je rekurzivna relacija

(10)

$$T(n) = 3T(n/3) + f(n), \quad f(n) = n \log_3 n,$$

uz početni uvjet $T(1) = d > 0$. Nađite uvjetno asimptotsko ponašanje relacijom Θ za rješenje $T(n)$, ako je n potencija od 3. Može li se dobiveno rješenje proširiti tako da asimptotsko ponašanje vrijedi bezuvjetno, za svaki dovoljno veliki $n \in \mathbf{N}$, za rekurziju

$$T(n) = T(\lfloor n/3 \rfloor) + 2T(\lceil n/3 \rceil) + n \log_3 n, \quad \text{za } n \geq 2,$$

uz početne uvjete $T(0) = 0$ i $T(1) = d > 0$?

3. Zadan je niz $A = (a_1, \dots, a_n)$ od n međusobno različitih cijelih brojeva. Dva elementa a_i i a_j tvore **inverziju** u tom nizu ako vrijedi

(20)

$$i < j \quad \text{i} \quad a_i > a_j.$$

Koliki je najveći mogući broj inverzija u nizu od n različitih elemenata?

Sastavite algoritam koji nalazi ukupan **broj** inverzija u zadanom nizu A i analizirajte njegovu složenost. Složenost algoritma mjerimo brojem usporedbi parova elemenata iz niza (usporedbe indeksa ne brojimo). Red veličine složenosti algoritma **mora** biti najviše $O(n \log n)$.

Uputa: Niz ne treba implementirati kao polje, može se koristiti i obična vezana lista. Razmotrite ideju “podijeli–pa–vladaј”, po ugledu na mergesort algoritam.

OKRENITE!

4. Zadana je grupa od n osoba. Kažemo da je neka osoba **znamenita** ili **slavna** (engl. “celebrity”) u toj grupi, ako ta osoba ne zna nikog drugog u grupi, a sve ostale osobe znaju nju. Po definiciji, u “grupi” od samo jedne osobe, ta osoba je slavna. Zadatak je **otkriti** slavnu osobu, ako ona postoji u grupi, ili zaključiti da takve osobe **nema**. Dozvoljeno je samo postavljanje **upita** oblika: “Osoba a , poznajete li osobu b ?”, na što osoba a odgovara “da” ili “ne”.

Uočite da relacija “poznaje” ne mora biti simetrična, tj. osoba a može znati osobu b , a da b ne zna a (na primjer, student zna nastavnika, a nastavnik ne zna studenta).

Koliko slavnih osoba može biti u toj grupi (ukratko argumentirajte)? Nađite algoritam koji sigurno daje odgovor, s tim da najveći broj potrebnih upita za nalaženje odgovora mora biti **linearan** u funkciji od n .

Za zapis algoritma, uzmite da je zadano polje A s n osoba, označimo ih s a_1, \dots, a_n , gdje je $n \geq 1$. Postavljanje navedenog upita realizirano je funkcijom

$$\text{poznaje}(a, b)$$

koja vraća 1 (da) ili 0 (ne). Algoritam treba vratiti indeks i slavne osobe, ako takva postoji, ili vrijednost 0, ako takve osobe nema.

Složenost algoritma mjerimo brojem upita. Analizirajte složenost algoritma u **najgorem** slučaju i nađite točan (najveći) broj upita potrebnih za nalaženje odgovora.

Ako ne znate riješiti ovako postavljen problem, riješite zadatak uz **dodatnu** pretpostavku da se na početku zna da **postoji** barem jedna slavna osoba u grupi. U tom slučaju, navedite da rješavate “olakšanu” varijantu zadatka, a rješenje vrijedi najviše 10 bodova.