OBLIKOVANJE I ANALIZA ALGORITAMA — 2. kolokvij

25. 1. 2010.

1. (20) Magnetska traka sadrži n programa. Duljina programa i je l_i, za $i = 1, \ldots, n$. Vjerojatnost da s trake treba učitati program i je p_i, $i = 1, \ldots, n$. Pretpostavljamo da je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Gustoća snimanja programa na traci je konstantna i brzina kretanja trake prilikom čitanja je konstantna. Svaki puta kada treba učitati neki program, traka se premotava na početak. Ako su programi na traci spremljeni u poretku i_1, i_2, $\ldots$, i_n, vrijeme potrebno za **čitanje** j-tog programa (s indeksom i_j) je

$$t_{i_j} = c \sum_{k=1}^{j} l_{i_k},$$

gdje je c neka konstanta (ovisi o gustoći pisanja na traku i brzini rada trake). **Prosječno** vrijeme potrebno za učitavanje programa je

$$T = \sum_{j=1}^{n} p_{i_j} t_{i_j} = c \sum_{j=1}^{n} p_{i_j} \sum_{k=1}^{j} l_{i_k}.$$

Redoslijed spremanja na traku je optimalan ako daje **minimalno** prosječno vrijeme T učitavanja programa.

(a) Pokažite primjerom da spremanje programa na traku u redoslijedu rastućem po l_i ne mora biti optimalno. Pokažite primjerom da spremanje programa na traku u redoslijedu padajućem po p_i, također, ne mora biti optimalno.

(b) Nađite redoslijed u kojem treba spremati programe na traku, tako da prosječno vrijeme učitavanja programa bude **minimalno**. Dokažite optimalnost tog redoslijeda. Uputa: analizirajte slučaj $n = 2$.

(c) Sastavite algoritam koji nalazi optimalni redoslijed i nađite njegovu složenost.

OKRENITE!

2. (20) Za zadani prirodni broj n, $n \geq 2$, promatramo produkt n pravokutnih matrica $M_1, \ldots, M_n$

$$M = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n.$$

Matrica M_i ima d_{i-1} redaka i d_i stupaca, za $i = 1, \ldots, n$. Za množenje bilo koje dvije matrice koristimo standardni algoritam. Produkt M računamo uzastopnom primjenom produkta dviju matrica, nekim redom, $n-1$ puta. Zbog asocijativnosti množenja, to možemo napraviti na više načina, ovisno o tome kako rasporedimo zagrade u taj produkt. Složenost algoritma za računanje M mjerimo ukupnim brojem množenja skalara — matričnih elemenata (zbrajanja ignoriramo, jer njih ima podjednako). Na primjer, složenost računanja produkta $M_i \times M_{i+1}$ je $C(i, i+1) = d_{i-1}d_id_{i+1}$.

(a) Nađite sve moguće rasporede zagrada i pripadne složenosti za računanje produkta M od 4 matrice dimenzija $d_0 = 2$, $d_1 = 5$, $d_2 = 7$, $d_3 = 4$, $d_4 = 3$. Koliko je najmanje množenja potrebno i koji je optimalni raspored zagrada?

(b) Neka je $C(i, j)$ **najmanja** složenost (s optimalnim rasporedom zagrada) za računanje produkta

$$M_{i,j} = M_i \times M_{i+1} \times \cdots \times M_j, \quad i < j.$$

Nađite rekurzivnu relaciju za $C(i, j)$. Uputa: za $j \geq i + 2$, posljednji produkt koji se računa ima oblik $M_{i,j} = M_{i,k} \times M_{k+1,j}$, za neki k, $i \leq k < j$, i oba faktora moraju biti optimalno izračunata (dokažite). Ostaje optimizirati po k.

(c) Sastavite algoritam za nalaženje $C(1, n)$, za zadani n i zadani vektor dimenzija d. Algoritam mora imati složenost $O(n^3)$. Smijete koristiti dodatno dvodimenzionalno polje C za spremanje izračunatih vrijednosti $C(i, j)$.

3. (20) Ukratko opišite što radi diskretna Fourierova transformacija vektora duljine $n = 2^k$. Skicirajte rekurzivni algoritam za **brzu** diskretnu Fourierovu transformaciju (FFT) i izvedite njegovu složenost, uz pretpostavku sekvencijalnog izvršavanja operacija.

REZULTATI: srijeda, 27. 1. 2010. u 11:30 sati. Saša Singer