Hrvatski matematički elektronski časopis *math.e*

Broj 11

http://e.math.hr/

Teorija klasifikacije

Domagoj Vrgoč

Sadržaj:

1. Uvod

U ovom članku navodimo neke važnije danas poznate rezultate teorije modela, grane matematičke logike koja razmatra razna svojstva modela pojedinih teorija i na osnovu tih svojstava nastoji dobiti informacije o samoj teoriji. Preciznije, proučavat ćemo područje koje se tradicionalno naziva teorijom klasifikacije ili ponekad strukturalnom teorijom modela. Cijelo područje nastalo je iz glasovitog rada *Michaela D. Morleya* u kojemu se dokazuje teorem kategoričnosti, jedan od osnovnih teorema moderne teorije modela. U ovom članku dajemo ideju dokaza spomenutog teorema te raspravljamo o brojnim posljedicama do kojih se došlo proučavanjem pojmova uvedenih u Morleyevu radu. Od čitatelja se podrazumijeva neko osnovno znanje formalne logike, no za samo razumijevanje članka dovoljno je intuitivno znati što su to formule i modeli prvog reda. Za formalne definicije moguće je, primjerice, konzultirati uvodno poglavlje o logici prvog reda u knjizi [V1].

Ako će se čitatelj koristiti citiranom knjigom, treba napomenuti da je u ovom članku korišten ponešto modificirani pristup, i to uglavnom iz razloga što se takav pristup ustalio u udžbenicima teorije modela. Kao prvo, napomenimo da se jednakost u ovom članku tretira posebno i za svaku teoriju smatramo da posjeduje dvomjesni relacijski simbol "=" koji se interpretira upravo kao jednakost. Nadalje, kada govorimo o pojmu teorije, uzet ćemo malo općenitiji pristup od onog zastupljenog u [V1]. Za nas će, naime, teorija naprosto biti proizvoljan skup rečenica.

Također, jasno je da će struktura biti vezana za jezike teorije, no kako bismo izbjegli tehničke komplikacije, to izostavljamo gdje je moguće. Ponekad će nam ipak biti neophodno navesti da je L jezik neke teorije T, pa ćemo pisati L-teorija, L-struktura i L-formula kako bismo to naglasili. Nadalje, sva razmatranja u ovom radu provode se za teorije čiji je jezik konačan ili prebrojivo beskonačan.

Za dokaze i razjašnjenja ovdje spomenutih rezultata čitatelj može konzultirati navedenu literaturu, s naglaskom na [DM], [DV] i [V1].

Jedno važno pitanje, koje je veoma dugo zaokupljalo matematičare, jest koliko modela može imati neka teorija. Ako nam je cilj konstruirati teoriju prvog reda koja bi opisivala realne brojeve, svakako bismo željeli da su jedino realni brojevi model te teorije, odnosno da naša teorija ima, do na izomorfizam, samo jedan model. Općenito se za teorije koje imaju jedinstven model govori da su *kategorične*. Međutim, poznati Löwenheim-Skolemov teorem raspršuje sve snove o optimalnom rješenju, odnosno kategoričnosti. Naime, spomenuti teorem govori nam kako svaka konzistentna teorija prvog reda ima model proizvoljno velike kardinalnosti, ako ima barem jedan beskonačan model. Iz toga vidimo da ne postoji teorija prvog reda koja će aksiomatizirati realnu analizu tako da ta aksiomatizacija bude kategorična.

Kada je već želja kategoričnosti propala, pokušao se napraviti kompromis i vidjeti možemo li postići kategoričnost u nekom fiksiranom kardinalu. U tu svrhu uveden je pojam κ-kategoričnosti.

Definicija 1.1. Za teoriju T kažemo da je ***κ*-kategorična**, gdje je κ neki kardinalni broj, ako za T postoji barem jedan model kardinalnosti κ i ako su joj svi modeli kardinalnosti κ izomorfni.

Proučavajući svojstva κ-kategoričnih teorija otkriveni su brojni zanimljivi rezultati o broju modela promatrane teorije u nekoj zadanoj kardinalnosti. Cijela priča počinje 1965. godine poznatim člankom Michaela Morleya pod naslovom "Categoricity in power". U tome članku dokazan je poznati Morleyev teorem koji se smatra prvim ozbiljnijim rezultatom u teoriji modela i koji je otvorio novo područje proučavanja - teoriju klasifikacije.

Za neku teoriju reći ćemo da je *potpuna* ako za svaku rečenicu te teorije vrijedi da je ili ta rečenica, ili pak njezina negacija teorem te teorije. Pritom pod pojmom *teorem* podrazumijevamo svaku posljedicu teorije. Zamislimo sada da je zadana potpuna teorija T. Ako je κ kardinalni broj, s $I(T, \kappa)$ označavamo broj neizomorfnih modela teorije T kardinalnosti κ. Funkcija $\kappa \mapsto I(T, \kappa)$ naziva se *spektrom* teorije T. Proučavanje spektra vrlo je važan problem u teoriji modela koji započinje sljedećim teoremom.

Teorem 1.2. (Morley) Neka je T potpuna teorija koja je κ-kategorična za neki $\kappa > \aleph_0$. Tada je T κ-kategorična, za sve $\kappa > \aleph_0$.

Kao što vidimo, Morleyev teorem daje jedno iznimno zanimljivo svojstvo funkcije spektra. Naime, on nam govori da ako je $I(T, \kappa) = 1$ za jedan neprebrojiv kardinal κ, tada je $I(T, \lambda) = 1$ za sve neprebrojive kardinale λ.

Već spomenuti članak uveo je mnoštvo pojmova koji su postali dio standardnog rječnika teorije modela i naveliko su se koristili u daljnjim istraživanjima svojstava spektra. U ovom članku dajemo pregled nekih osnovnih pojmova i rezultata vezanih uz teoriju klasifikacije. Cijeli članak bit će koncipiran na dokazu Morleyeva teorema uz digresije o daljnjim proučavanjima svojstava spektra.

Možemo već unaprijed najaviti kako je problem spektra za potpune teorije u potpunosti razriješen za neprebrojive kardinale. Također ćemo pokazati koji se problemi i zanimljivosti javljaju pri proučavanju broja prebrojivih modela koji su detaljno proučavali Vaught, Morley i Shelah.

2. Osnovni pojmovi

U ovom paragrafu uvodimo neke osnovne pojmove koji se koriste prilikom proučavanja spektra i dokaza Morleyeva teorema.

Tipovi

Sljedeći pojam, pojam tipa, osnovni je pojam koji se javlja u svakom proučavanju u teoriji modela. Ideja je vrlo jednostavna. Naime, ono što nas zanima o nekom modelu je ono što je u njemu istinito.

Napomenimo prvo da ćemo sa $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ označavati skup formula u kojima se jedino varijable iz skupa $\{x_1,\ldots,x_n\}$ mogu javiti kao slobodne. S $\mathcal{M} \models \Sigma[a_1,\ldots,a_n]$ ćemo označavati da je svaka formula iz Σ istinita za valuaciju u kojoj je varijabla x_i valuirana elementom a_i, za $i = 1,\ldots,n$.

Definicija 2.1. ***n*-tip** teorije T je skup formula $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ tako da je skup formula $T \cup \Sigma$ konzistentan, odnosno postoji model $\mathcal{M}$ od T i elementi $a_1,\ldots,a_n$ iz M, tako da vrijedi $\mathcal{M} \models \Sigma[a_1,\ldots,a_n]$.

Obično ćemo se koristiti standardnom pokratom $\overline{x}$ za n-torku varijabli $(x_1,\ldots,x_n)$, za neki $1 \leqslant n < \aleph_0$.

Nadalje, zanimat će nas koji su to elementi modela kojima se varijable moraju valuirati da bi formule bile istinite. Također, uglavnom ćemo proučavati potpune tipove, kao analogone potpunih teorija.

Definicija 2.2. (1) Neka je T neka teorija, $\mathcal{M}$ model od T i $\Sigma(x_1,\ldots,x_n)$ n-tip od T. Kažemo da je Σ **realiziran** u $\mathcal{M}$ ako postoji niz $(a_1,\ldots,a_n)$ elemenata od $\mathcal{M}$ takav da je $\mathcal{M} \models \Sigma[a_1,\ldots,a_n]$. Također kažemo da $(a_1,\ldots,a_n)$ **realizira** Σ u $\mathcal{M}$. Ako Σ nije realiziran u $\mathcal{M}$ kažemo da je **omašen** u $\mathcal{M}$.
(2) **Potpuni *n*-tip** teorije T u jeziku L je n-tip $\Sigma(\overline{x})$ od T takav da za sve L-formule $\Sigma(\overline{x})$ vrijedi: ili je $\Phi(\overline{x}) \in \Sigma$, ili $\neg\Phi(\overline{x}) \in \Sigma$. Potpune tipove označavat ćemo s p, q,…
(3) Neka je $\mathcal{M}$ neka L-struktura i $\overline{a} \in M^n$. **Tip** od $\overline{a}$ u $\mathcal{M}$ je skup $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \{\Phi(\overline{x}) : \mathcal{M} \models \Phi(\overline{x})\}$.

Lako je provjeriti da je svaki $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ potpun tip. Zanimljivo je da vrijedi i obrat, odnosno n-tip p je potpuni n-tip teorije T ako i samo ako je $p = tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$, za neki model $\mathcal{M}$ od T i n-torku $\overline{a}$ iz nosača od $\mathcal{M}$.

Topologija

Neka je T neka teorija u jeziku L. Sa $S_n(T)$ označavamo skup svih potpunih n-tipova teorije T. Za formulu $\Phi(\overline{x})$ sa slobodnim varijablama u skupu $\{x_1,\ldots,x_n\}$ s X_Φ označavamo skup $X_\Phi = \{p \in S_n(T) : \Phi \in p\}$. Na skupu $S_n(T)$ uzimamo topologiju definiranu bazom koju čine svi skupovi X_Φ, pri čemu je Φ proizvoljna formula u jeziku teorije T, čije se slobodne varijable nalaze u $\{x_1,\ldots,x_n\}$. Trivijalno je za provjeriti kako je to doista baza neke topologije na skupu $S_n(T)$.

Nadalje, budući da za potpun tip teorije T i proizvoljnu formulu Φ vrijedi da je ili $\Phi \in p$ ili $\neg\Phi \in p$, jasno je da vrijedi $X_\Phi = S_n(T) \setminus X_{\neg\Phi}$. Dakle, svaki bazni otvoreni skup topološkog prostora $S_n(T)$ je ujedno i otvoren i zatvoren. Također je moguće provjeriti da je $S_n(T)$ kompaktan Hausdorffov prostor. Napomenimo da kompaktnost prostora slijedi iz teorema kompaktnosti za logiku prvog reda.

Premda se upletanje topologije u logiku čini neuobičajenim, ono olakšava velik broj dokaza. Također je zanimljivo vidjeti kako se dvije naočigled nepovezane grane matematike međusobno isprepleću.

Saturirani modeli

Razjasnimo još jednu oznaku. Ako je $\mathcal{M}$ model (odnosno struktura) neke teorije, s $Th(\mathcal{M})$ označavamo skup svih rečenica te teorije koje su istinite na tom modelu. Nadalje, ponekad nam je korisno proširiti zadanu teoriju novim konstantama koje dolaze iz nekog njezinog modela. Time iz postojećeg modela dobivamo novi model koji se označava s $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$, ako je A skup koji sadrži nove konstante.

Iznimno važna klasa modela koja se pojavljuje u dokazima mnogih teorema su saturirani modeli, odnosno saturirane strukture.

Definicija 2.3. (i) Neka je $\mathcal{M}$ L-struktura i $n < \aleph_0$. Sa $S_n(A, \mathcal{M})$ označavamo skup svih potpunih n-tipova teorije $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$. Ponekad ćemo izostavljati $\mathcal{M}$ ako je jasan iz konteksta.
(ii) Neka je κ beskonačni kardinalni broj. Reći ćemo da je L-struktura $\mathcal{M}$ **κ-saturirana** ako za sve $A \subseteq M$ takve da je card$(A) < \kappa$ vrijedi da je svaki potpuni tip $p \in S_n(A)$ realiziran u $\mathcal{M}$, za sve $n < \aleph_0$. Reći ćemo da je $\mathcal{M}$ **saturirana** ako je card(M)-saturirana.

Uočimo da je svaki potpuni tip neke teorije realiziran u nekom njezinom modelu. Saturiranost modela jamči nam da je svaki potpuni tip realiziran baš u tom modelu. Navedimo sada nekoliko primjera saturiranih, odnosno nesaturiranih modela.

Lema 2.4. (i) Svaki konačan model je $\aleph_0$-saturiran.
(ii) Model $(\mathbf{N}, <)$ jezika $L = \{<\}$ nije $\aleph_0$-saturiran.
(iii) Model $(\mathbf{Q}, <)$ jezika $L = \{<\}$ je $\aleph_0$-saturiran.

Jedinstvenost modela

Za dvije strukture $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ reći ćemo da su *elementarno ekvivalentne* ako je $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$. Kao što nam je poznato, izomorfizam dviju struktura povlači njihovu elementarnu ekvivalenciju. S druge strane, obrat te tvrdnje ne vrijedi. Međutim, ako su dvije strukture elementarno ekvivalentne i jedna od njih je konačna, tada će one biti izomorfne, što se može jednostavno pokazati. Pitanje je hoće li svake dvije ekvipotentne elementarno ekvivalentne strukture biti izomorfne. Egzistencija prebrojivih nestandardnih modela aritmetike s nejednakošću daje negativan odgovor na ovo pitanje (za detalje vidjeti [EF]). Međutim, ako su strukture saturirane, sljedeći teorem daje nam pozitivan odgovor na ovo pitanje.

Teorem 2.5. Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ elementarno ekvivalentne saturirane L-strukture istog kardinaliteta. Tada su one izomorfne.

Napomenimo da se za dokaz prethodnog teorema koristi tipična "back-and-forth" konstrukcija kakva se često pojavljuje u teoriji modela. Inače, jedna od poznatijih "back-and-forth" konstrukcija je dokaz teorema o uređajnoj karakteristici skupa racionalnih brojeva, čiji se dokaz može naći u [V2]. Čitanjem samo jednog smjera dokaza prethodnog teorema dobivamo sljedeće:

Propozicija 2.6. Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ elementarno ekvivalentne L-strukture, card$(M) < \kappa$ i neka je $\mathcal{N}$ κ-saturirana. Tada se $\mathcal{M}$ može elementarno uložiti u $\mathcal{N}$.

Pod pojmom elementarnog ulaganja mislimo na izomorfizam između $\mathcal{M}$ i neke elementarne podstrukture od $\mathcal{N}$, pri čemu je elementarna podstruktura naprosto podstruktura koja ima svojstvo da sve valuacije njezinim elementima čuvaju istinitost formula u nadstrukturi i obratno.

Premda je jedinstvenost saturiranih modela poželjno svojstvo, još se nismo bavili pitanjima egzistencije. Sljedeći teorem daje nam djelomičan odgovor na ovo pitanje, a egzistencija saturiranih modela tvorit će znatan dio dokaza Morleyeva teorema, kao što će se kasnije pokazati.

Teorem 2.7. Neka je $\mathcal{M}$ L-struktura i τ kardinalan broj tako da je $\tau > \aleph_0$, te card$(M) < 2^\tau$. Tada postoji elementarno proširenje $\mathcal{N}$ od $\mathcal{M}$ kardinalnosti ne veće od 2^τ koje je τ^+-saturirano.

Dakle, ako imamo neki model i dovoljno velik kardinalni broj τ, možemo naći elementarno proširenje našeg modela koje će biti τ^+-saturirano. Naglasimo da posebno uvijek možemo naći ω-saturirano proširenje.

Monster model

Demonstrirajmo sada zašto su nam prethodna razmatranja o jedinstvenosti i egzistenciji saturiranih modela korisna. Pretpostavimo da je T potpuna teorija i da želimo proučavati njezine modele kardinalnosti manje ili jednake κ, pri čemu je κ beskonačni kardinalni broj. Neka je $\mathcal{M}$ neki model od T te $\mathcal{N}$ κ-saturirani model čija egzistencija slijedi iz prethodnog teorema. Budući da su svaka dva modela potpune teorije elementarno ekvivalentna, primjenom propozicije 2.6 vidimo da je svaki model od T, kardinaliteta manjeg ili jednakog κ, izomorfan nekoj elementarnoj podstrukturi od $\mathcal{N}$. Dakle, dovoljno je proučavati elementarne podstrukture od $\mathcal{N}$. Takav model najčešće se naziva *monster modelom* teorije T.

3. Prebrojivi spektar

Kao što smo već napomenuli, cilj ovog članka je proučavanje funkcije spektra potpunih teorija u prebrojivom jeziku. U ovom paragrafu prikazat ćemo što je poznato o broju prebrojivih modela neke teorije, odnosno o prebrojivu spektru.

Kroz godine proučavanja došlo se do mnogih primjera. Prvo što se pokušalo pronaći su teorije s konačnim brojem prebrojivih modela. Poznati Cantorov teorem o uređajnoj karakteristici skupa racionalnih brojeva govori nam kako teorija gustih potpunih uređaja bez krajnjih točaka, DLO, ima točno jedan prebrojiv model. Dokaz spomenutog teorema moguće je naći u [V2].

Također, uz ponešto tehničkih komplikacija, pronađeni su i primjeri teorija s tri ili više prebrojivih modela. Naime, vrijedi sljedeće:

Lema 3.1. Za svaki prirodan broj $n \geqslant 3$ postoji potpuna teorija T_n za koju je $I(T_n, \aleph_0) = n$.

Dokaz prethodno navedene leme moguće je naći u [DM] ili [AP].

Budući da je teorija modela od svojih početaka bila blisko povezana s proučavanjem algebarskih struktura, dobiveni su i rezultati o teoriji algebarski zatvorenih polja ACF_p neke fiksne karakteristike p te o teoriji realnih zatvorenih polja RCF. Za detalje o spomenutim teorijama konzultirati [DM]. Sumirajmo neke poznate činjenice o mogućem broju prebrojivih modela.

1. $I(DLO, \aleph_0) = 1$.
2. $I(T_n, \aleph_0) = n$, za svaki $n \geqslant 3$.
3. $I(ACF_p, \aleph_0) = \aleph_0$.
4. $I(RCF, \aleph_0) = I(Th(\mathbf{N}), \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

Budući da postoji najviše $2^{\aleph_0}$ neizomorfnih prebrojivih modela potpune teorije T (toliko, naime, ima relacija na prebrojivu skupu), postavljaju se dva prirodna pitanja:

- Postoji li teorija T takva da je $I(T, \aleph_0) = 2$?
- Postoji li teorija T takva da je $\aleph_0 < I(T, \aleph_0) < 2^{\aleph_0}$?

Iznenadujuće je što je na prvo pitanje Vaught odgovorio negativno. Točnije, vrijedi sljedeći teorem čiji se detaljan dokaz može pronaći u [DM].

Teorem 3.2. (Vaught) Neka je T potpuna teorija. Tada T nema do na izomorfizam točno dva prebrojiva modela.

U slučaju da je hipoteza kontinuuma istinita, drugo pitanje ima trivijalno negativan odgovor. Vaught je postavio hipotezu koja govori da je odgovor negativan čak i u slučaju da je hipoteza kontinuuma neistinita. Shelah je dokazao da Vaughtova hipoteza vrijedi za klasu tzv. ω-stabilnih teorija (vidjeti definiciju 4.1). Postoji još nekoliko sličnih rezultata koji govore o tome da Vaughtova hipoteza vrijedi za neku specifičnu klasu teorija. Međutim, najjači generalni rezultat je onaj M. Morleya (ne miješati s teoremom kategoričnosti!) koji glasi:

Teorem 3.3. (Morley) Ako je T potpuna teorija za koju je $I(T, \aleph_0) > \aleph_1$, tada je $I(T, \aleph_0) = 2^{\aleph_0}$.

Navedeni teorem zapravo nam govori kako je mogući broj prebrojivih modela manji ili jednak $\aleph_0$, ili je $\aleph_1$, ili je pak $2^{\aleph_0}$.

Vaughtova hipoteza smatra se jednim od najvažnijih otvorenih problema teorije modela i oko nje postoje neke kontroverze. Robin Knight je 2002. godine objavio protuprimjer za Vaughtovu hipotezu, no još uvijek nije utvrđen službeni status tog rada. Zainteresirani čitatelj može pronaći rad na Knightovoj web stranici [RK].

4. Morleyev teorem i broj neprebrojivih modela

Stabilnost i nerazlučivost

Morleyev teorem, premda jednostavan i lako razumljiv, ima poprilično težak dokaz. U svojem članku Morley je uveo mnogo novih pojmova koji su postali standardni u teoriji modela i čije je proučavanje dovelo do mnogo važnih rezultata u teoriji klasifikacije. Jedan od ključnih pojmova je stabilnost.

Definicija 4.1. Potpuna teorija T je **ω-stabilna** ako je za svaki model $\mathcal{M}$ od T i svaki prebrojiv podskup $A \subseteq M$ skup svih potpunih 1-tipova $S_1(A, \mathcal{M})$ prebrojiv (odnosno, teorija $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ ima najviše prebrojivo potpunih 1-tipova).

Na analnogan se način definira i pojam λ-stabilne teorije, gdje je λ proizvoljan kardinalni broj. Stabilnost nam zapravo govori da prostor tipova ne postaje prevelik ako teoriju proširimo novim konstantama. Napomenimo da se ovdje navodi naziv ω-stabilnost iz povijesnih razloga, premda je riječ o kardinalnim brojevima. Naime, ω je tradicionalna oznaka za ordinalni broj koji je ujedno i kardinalni broj koji se označava s $\aleph_0$. Međutim, u literaturi se uvriježio pojam ω-stabilnosti.

Sljedeći fundamentalni pojam koji se javlja je pojam nerazlučivih nizova.

Definicija 4.2. Neka je $\mathcal{M}$ L-struktura, $A \subseteq M$, $(I, <)$ totalno uređen skup i $(b_i : i \in I)$ niz elemenata od M. Reći ćemo da je $(b_i : i \in I)$ **nerazlučiv niz** nad A u strukturi $\mathcal{M}$, ako za svako $n < \aleph_0$ i sve $i_1 < \ldots < i_n$, $j_1 < \ldots < j_n$ vrijedi $tp_{\mathcal{M}}((b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})/A) = tp_{\mathcal{M}}((b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})/A)$.

Pritom pod $tp_{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$ podrazumijevamo skup svih formula $\Phi(\bar{x})$ s parametrima iz skupa A, takvih da vrijedi $\mathcal{M} \models \Phi[\bar{b}]$. Naziv bi trebao opravdati definiciju. Naime, ideja je da je to niz koji se ne može razlučiti formulama prvog reda.

Za određivanje nekih svojstava modela važna nam je egzistencija nerazlučivih nizova. Sljedeći rezultat daje nam pomalo iznenadujuću činjenicu o nerazlučivim nizovima. Naime, za teoriju s beskonačnim modelima možemo pronaći proizvoljno duge nerazlučive nizove u nekom modelu od T.

Teorem 4.3. Neka je T teorija za koju postoji beskonačni model. Tada za svaki kardinal κ postoji model $\mathcal{M}$ od T i skup $(a_i : i < \kappa)$ međusobno različitih elemenata od $\mathcal{M}$, tako da je $(a_i : i < \kappa)$ nerazlučiv niz u $\mathcal{M}$.

Napomenimo da se za dokaz egzistencije nerazlučivih nizova potrebno koristiti verzijom Ramseyeva teorema o svojstvima beskonačnih skupova, koji je jedan od osnovnih rezultata kombinatorike beskonačnih skupova. Sama grana kombinatorike beskonačnih skupova korištena je u dubljim proučavanjima unutar teorije klasifikacije i do mnogih važnih rezultata došlo se u želji da se pokaže kakva je struktura modela pojedinih teorija. Veliku ulogu u tome imao je *Saharon Shelah*, autor monumentalnog djela pod nazivom "Classification theory", koje se još i danas smatra jednim od vrhunaca teorije modela.

Osvrnimo se sada na još jednu zanimljivu primjenu nerazlučivih nizova. Kao što znamo, Gödelov prvi teorem nepotpunosti govori nam o egzistenciji aritmetičke rečenice Φ koja je istinita, no nedokaziva u Peanovoj aritmetici. Premda gnoseološki zanimljiva, Gödelova rečenica nije pretjerano korisna kao matematički teorem. Paris i Harrington kasnih su sedamdesetih pokazali da je jedna varijanta Ramseyeva teorema istinita, ali da je nedokaziva u Peanovoj aritmetici (preciznije, neovisna o aritmetici, odnosno neodlučiva). Zanimljivo je da ta varijanta čak ne spada u kombinatoriku beskonačnih skupova već govori o konačnim skupovima. Dokaz se koristi nerazlučivim nizovima, ali i klasičnim kodiranjem koje se javlja još kod Gödela.

Posljedice stabilnosti

Kao što smo napomenuli, ω-stabilne teorije igraju iznimno važnu ulogu u dokazu Morleyeva teorema i u samoj teoriji modela. Zapravo, velik broj istraživanja, posebice onih algebarske naravi, radi se pod pretpostavkom stabilnosti. Sljedeći teorem govori nam da se za dokaz Morleyeva teorema možemo koristiti stabilnim teorijama.

Teorem 4.4. Neka je T potpuna prebrojiva teorija. Ako je T κ-kategorična za neki neprebrojiv kardinal κ, tada je T ω-stabilna.

Još jedan važan pojam je pojam Morleyeva ranga, no budući da je sama definicija suviše tehnička, ovdje je izostavljamo. Napomenimo samo da se Morleyev rang formule $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ s parametrima $\bar{a}$ označava $RM(\Phi(\bar{x}, \bar{a}))$, da je to ordinalni broj (ili ∞) i da nam govori nešto o definabilnim skupovima i njihovom particioniranju s pomoću formula zadane teorije. Za detalje konzultirati [DV], gdje se mogu pronaći detaljna definicija i karakterizacija te način na koji se Morleyev rang može promatrati neovisno o modelu iz kojeg dolaze parametri formule Φ. Napomenimo još da se Morleyev rang može promatrati i kao vrlo apstraktan pojam dimenzije koji se u nekim specifičnim slučajevima poklapa sa prirodnim pojmom dimenzije.

Sljedeći rezultat daje nam uvid u vezu između Morleyeva ranga i stabilnih teorija. On nam zapravo kaže da je ω-stabilnost ekvivalentna tome da je Morleyev rang definiran za sve formule proučavane teorije.

Teorem 4.5. Neka je T potpuna teorija. Ekvivalentno je:
1. T je ω-stabilna.
2. Za svaki model $\mathcal{M}$ od T i formulu $\Phi(\bar{x})$ je $RM(\Phi(\bar{x})) < \infty$.
3. Za svaki $\lambda \geqslant \aleph_0$ i podskup $A \subseteq M$ takav da je $\mathrm{card}(A) < \lambda$ je skup $S_1(A, \mathcal{M})$ kardinalnosti najviše λ (odnosno T je λ-stabilna).

Primijetimo da smo u prethodnom teoremu naveli kako ω-stabilnost povlači stabilnost u svim beskonačnim kardinalima. Općenito se možemo pitati koje su mogućnosti za stabilnost neke potpune teorije u beskonačnim kardinalima. Shelah je u potpunosti odgovorio na to pitanje u sljedećem teoremu.

Teorem 4.6. (Shelah) Ako je T potpuna teorija, tada vrijedi točno jedno od sljedećeg:
1. ne postoji kardinal κ takav da je T κ-stabilna,
2. T je κ-stabilna, za sve $\kappa \geqslant 2^{\aleph_0}$,
3. T je κ-stabilna ako i samo ako je $\kappa^{\aleph_0} = \kappa$.

Već smo napomenuli da su nam saturirani modeli iznimno važni za dokaz Morleyeva teorema. Sljedeći rezultat govori nam o jednoj posljedici kategoričnosti, no proučavajući dokaz teorema, može se vidjeti da je to u biti posljedica stabilnosti promatrane teorije.

Teorem 4.7. Neka je T potpuna teorija koja je κ-kategorična za neki neprebrojiv kardinal κ. Tada T ima saturirani model kardinalnosti κ.

Sljedeća propozicija, koja će biti ključna za dokaz, govori nam da ω-stabilne teorije imaju poželjno svojstvo nasljeđivanja saturiranosti.

Propozicija 4.8. Neka je T potpuna teorija koja je ω-stabilna. Nadalje, neka postoji neprebrojiv kardinal κ takav da je svaki model od T kardinalnosti κ saturiran. Tada je svaki neprebrojiv model od T saturiran.

Morleyev teorem

Koristeći se prethodnim rezultatima sada možemo dokazati Morleyev teorem kategoričnosti.

Teorem 4.9. (Morley) Neka je T potpuna teorija koja je κ-kategorična za neki $\kappa > \aleph_0$. Tada je T κ-kategorična, za sve $\kappa > \aleph_0$.

Naime, pokazali smo da je svaka κ-kategorična teorija T ujedno i ω-stabilna. Nadalje, iz teorema 4.7 znamo da postoji saturiran model od T kardinalnosti κ. Kako je T κ-kategorična, svi modeli od T kardinalnosti κ su saturirani, pa je prema prethodnoj propoziciji za svako $\lambda > \aleph_0$ svaki model od T kardinalnosti λ saturiran. Kako su svaka dva modela potpune teorije elementarno ekvivalentna, prema jedinstvenosti saturiranih modela (teorem 2.5), teorija T je λ-kategorična. Time je dovršen dokaz teorema.

Ugrubo govoreći, dokaz se može razdijeliti u tri dijela. U prvom se dijelu iz svojstva kategoričnosti izvodi ω-stabilnost, u drugom se s pomoću stabilnosti i kategoričnosti dokazuje egzistencija saturiranih modela, a u trećem se dokazuje sam teorem.

Alternativno, do Morleyeva teorema kategoričnosti može se doći koristeći se Baldwin-Lachlanovim teoremom:

Teorem 4.10. (Baldwin-Lachlan) Neka je T potpuna teorija koja ima beskonačne modele i neka je κ neprebrojiv kardinal. T je κ-kategorična ako i samo ako je T ω-stabilna i ne posjeduje Vaughtov par.

Budući da ω-stabilnost i Vaughtovi parovi ne ovise o kardinalu κ, jednostavno dobivamo Morleyev teorem. Za detalje o tome što je Vaughtov par i o dokazu samog teorema vidjeti [DM].

Neprebrojivi spektar

Sumirajmo što do sada znamo o neprebrojivom spektru.

1. Löwenheim-Skolemov teorem "na gore" nam veli da ako je $I(T, \kappa) \neq 0$ za neki beskonačan kardinal κ, tada je također $I(T, \lambda) \neq 0$ za svaki beskonačni kardinal λ.
2. Morleyev teorem, koji se smatra prvim važnim rezultatom u proučavanju spektra teorije, govori nam da ako je $I(T, \kappa) = 1$ za neki neprebrojiv kardinal κ, tada je $I(T, \lambda) = 1$ za sve neprebrojive kardinale λ.

Morley je postavio hipotezu da je funkcija $\kappa \mapsto I(T, \kappa)$ neopadajuća za neprebrojive κ. Hipotezu je dokazao Saharon Shelah. Štoviše, Shelah je dokazao da je za potpunu prebrojivu teoriju T ili $I(T, \kappa) = 2^\kappa$ za sve neprebrojive κ, ili je $I(T, \kappa_\xi) < \beth_{\omega_1}(|\xi|)$ za sve ordinale ξ. Ugrubo govoreći, broj neprebrojivih modela teorije T je ili najveći mogući, ili je "jako malen". Također, Shelah je pokazao koje su neke moguće veličine spektra u slučaju kad je on "jako malen".

Proširujući Shelahov rad, Bradd Hart, Ehud Hrushovski i Michael C. Laskowski u potpunosti su razriješili problem spektra u neprebrojivim kardinalima. Njihov rad pokazuje da je moguće trinaest različitih slučajeva za broj neprebrojivih modela potpune prebrojive teorije T. Također, za svaki od tih slučajeva pronađen je primjer teorije s točno toliko modela. Za detalje konzultirati [HL].

Literatura

[EF] H.D. Ebbinghaus, J. Flum i W. Thomas, *Mathematical logic*, Springer-Verlag, 1994.

[HL] B. Hart, E. Hrushovski i M. Laskowski, *The uncountable spectra of countable theories*, Annals of Mathematics **152** (2000), 207-257.

[RK] R.W. Knight, *The Vaught conjecture: A counterexample*, 2002.
http://www.maths.ox.ac.uk/~knight/stuff/preprints.html

[DM] D. Marker, *Model theory: An introduction*, Springer-Verlag, 2002.

[AP] A. Pillay, *Lecture notes - Model theory*, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002.

[DV] D. Vrgoč, *Morleyev teorem*, diplomski rad, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2007.

[V1] M. Vuković, *Matematička logika 1*, skripta, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2006.

[V2] M. Vuković, *Teorija skupova*, skripta, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2005.