Sveučilište u Zagrebu
PMF - Matematički odjel

Domagoj Vrgoč

Morleyev teorem

Diplomski rad

Zagreb, travanj 2007

Sveučilište u Zagrebu

PMF - Matematički odjel

Domagoj Vrgoč

Morleyev teorem

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, travanj 2007

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________________ , predsjednik
2. ______________________________________ , član
3. ______________________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________________
2. ______________________________________
3. ______________________________________

Sadržaj

Uvod

Tema ovod rada je Morleyev teorem kategoričnost koji govori da je potpuna prebrojiva teorija prvog reda, koja je kategorična u nekom neprebrojivom kardinalu, zapravo kategorična u svim neprebrojivim kardinalima.

Ovaj teorem jedan je od klasičnih strukturalnih rezultata o teorijama prvog reda i smatra se početkom moderne teorije modela. Teorem je originalno dokazao M. Morley 1965 godine u članku pod nazivom *Categoricity in power*. Danas postoje različiti pristupi dokazivanju ovog teorema, a mi smo za potrebe ovog rada koristili metodu koju predlaže A. Pillay, prezentiranu u [7], te je ta skripta ujedno i osnovna literatura korištena za ovaj rad.

Rad se sastoji od tri poglavlja kroz koja dokazujemo Morleyev teorem. U prvom poglavlju fiksiramo notaciju i ponavljamo neke osnovne rezultate logike prvog reda koje ćemo u nastavku rada obilato i često bez posebnog naglašavanja koristiti. Većina rezultata koji su izneseni u ovom poglavlju može se naći u svakom uvodu u matematičku logiku ili teoriju modela, a za neke alternativne pristupe dane su napomene o literaturi.

U drugom poglavlju uvodimo posebne klase struktura i proučavamo neka njihova svojstva. Prvenstveno nas zanimaju svojstva saturiranih struktura koje igraju veliku ulogu u dokazu Morleyevog teorema. Također uvodimo i pojam homogenih struktura i dovodimo ih u vezu sa saturiranim strukturama. Kao što će čitatelj uočiti, pojam tipa, jedan od fundamentalnih pojmova teorije modela, pojavljuje se u gotovo svim definicijama u drugom i trećem poglavlju, te je potrebno naglasiti njegovu važnost. Također valja napomenuti da, premda fundamentalan, pojam tipa u literaturi nema unificiranu definiciju, te različiti autori koriste različite pristupe i premda je osnovna ideja svugdje ista, razlike u definiciji dodatno kompliciraju ili pojednostavljuju dokaze. U ovom se radu držimo definicije tipa kako je predlaže A. Pillay i sve dokaze preuzete iz literature prilagođavamo toj definiciji. Ostali pojmovi uvedeni u ovom poglavlju, poput prostih i atomarnih modela, te topologije na prostoru tipova uglavno su tehničke naravi i služe nam za dokaz Morleyevog teorema.

Treće poglavlje donosi nam i sam teorem. Na početku uvodimo pojam ω-stabilnosti te sve zaključke izvodimo uz pretpostavku ω-stabilnosti proučavane teorije. Kao što ćemo pokazati, za naše potrebe je to dovoljno, jer je svaka teorija koja je kategorična u nekom neprebrojivom kardinalu ujedno i ω-stabilna. Nakon toga uvode se pojmovi Moleyevog ranga i Morleyevog stupnja, te se pokazuju neka željena svojstva ω-stabilnih teorija. Nadalje radimo s pojmovima nerazlučivih nizova i konstruktibilnih modela, također osnovnih pojmova teorije modela. Na samom kraju dovodimo u vezu ω-stabilnost s egzistencijom saturiranih modela i koristeći teorem o jedinstvenosti saturiranih modela dokazujemo Morleyev teorem.

Kao što ćemo vidjeti ovaj teorem, premda ima jednostavan i lako razumljiv iskaz, zahtjeva korištenje različitih ideja teorije modela za sam dokaz. Teorem se može promatrati i kao daljnje istraživanje u smjeru Löwnheim-Skolemovog teorema "na gore". Naime, izreku Löwnheim-Skolemovog teorema možemo gledati kao rezultat koji nam govori da teorije prvog reda ne mogu razlikovati svoje beskonačne modele. Morleyev teorem bi se tako mogao promatrati kao rezultat koji nam govori da teorije prvog reda ne mogu razlikovati izomorfizme svojih neprebrojivih modela (preciznije njihovu kategoričnost). Naravno, ovdje se potrebno ograditi i reći da je ovo subjektivna autorova interpretacija.

Kao što smo već napomenuli Morleyev teorem je klasični rezultat strukturalne teorije modela i tu treba gledati njegovu pravu vrijednost. Općenito govoriti o broju modela određene kardinalnosti za neku teoriju je složen problem. Postoje različiti relativni rezultati koji nam govore o tom problemu. Jedan apsolutni rezultat, onaj o nepostojanju potpune prebrojive teorije s točno dva neizomorfna prebrojiva modela, navodimo na kraju drugog poglavlja, no nažalost dokaz te činjenice izlazi izvan okvira ovog rada. Daljnje generalizacije Morleyevog teorema detaljno je proučavao S. Shelah u svojem djelu *Classification theory*, koje se smatra jednim od najvažnijih djela današnje teorije modela.

Na kraju ovog uvoda želio bih se zahvaliti mentoru, prof. Mladenu Vukoviću na velikoj pomoći prilikom odabira teme i strpljenju za vrijeme izrade ovog rada.

1 Osnovne definicije i primitivni alati

Kroz čitav rad podrazumijevamo predznanje dodiplomskog kolegija Matematička logika koji je rađen prema [8]. Kako određene razlike ipak postoje u ovom poglavlju fiksiramo terminologiju.

Čitavo vrijeme proučavamo teorije prvog reda T nad nekim jezikom (signaturom, vokabularom) L, te osnovne objekte tog jezika, dakle terme i formule, definiramo induktivno na uobičajeni način. Nadalje, pojam L-strukture se standardno definira, jedina razlika u odnosu na skriptu [8] je u tretiranju jednakosti. Kroz ovaj rad smatramo da svaka teorija prvog reda ima dvomjesni relacijski simbol $=$, te se on, unutar svake strukture, interpretira kao jednakost. Preciznije, ako imamo jezik L, L-strukturu $\mathcal{M}$, te formulu Φ, oblika $t_1 = t_2$, pri čemu su t_1 i t_2 termi, čije se slobodne varijable nalaze unutar $v_1, \ldots, v_n$, tada definiramo da je na strukturi $\mathcal{M}$ za valuaciju $\overline{a}$ istinita formula Φ, u oznaci $\mathcal{M} \models \Phi[\overline{a}]$, ako vrijedi $t_1^{\mathcal{M}}[\overline{a}] = t_2^{\mathcal{M}}[\overline{a}]$, gdje je $t^{\mathcal{M}}[\overline{a}]$ valuacija terma t u strukturi $\mathcal{M}$ za $\overline{a}$.

Pri tome podrazumijevamo da je $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ i sa $\mathcal{M} \models \Phi[\overline{a}]$ označavamo $\mathcal{M} \models \Phi[v_1/a_1, \ldots, v_n/a_n]$. Prisjetimo sa još da rečenicom nazivamo formulu koja ne sadrži slobodnih varijabli, te da je rečenica na nekoj strukturi ili istinita za sve valuacije ili lažna za sve valuacije, dok kod otvorenih formula (onih koje sadrže slobodne varijable) istinitost ovisi upravo o tome kako se slobodne variable valuiraju.

Kako je većina rezultata iznesenih u ovom poglavlju dokazana tijekom dodiplomskog kolegija logike, ovdje ne navodimo dokaze. Rezultati koji se ne nalaze u [8] mogu se pak naći, detaljno razrađeni, u svakom uvodu u teoriju modela, primjerice u [6] ili [3].

Definicija 1.1. *Neka je L jezik, $\mathcal{M}$ neka L-struktura, te Σ skup L-rečenica.*

(i) *Pod L-teorijom podrazumijevamo skup L-rečenica T, koji je zatvoren na relaciju logičke posljedice.*

(ii) *Za teoriju T kažemo da je konzistentna ako ima model.*

(iii) *Neka je $\mathbf{K}$ klasa L-struktura. Sa $Th(\mathbf{K})$ označavmo skup $\{\sigma : \mathcal{M} \models \sigma$ za sve $\mathcal{M}$ iz $\mathbf{K}\}$. Za $\mathbf{K} = \{\mathcal{M}\}$ pišemo $Th(\mathcal{M})$.*

(iv) *Za klasu L-struktura $\mathbf{K}$ kažemo da je elementarna klasa ako postoji skup L-rečenica Σ tako da vrijedi $\mathbf{K} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models \Sigma\}$, odnosno $Th(\mathbf{K}) = \Sigma$.*

(v) *Kažemo da su dvije L-strukture $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ elementarno ekvivalentne, u oznaci $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, ukoliko zadovoljavaju iste L-rečenice, odnosno ukoliko $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$.*

(vi) *Za L-teoriju T kažemo da je potpuna ukoliko za sve L-rečenice σ vrijedi da je ili $\sigma \in T$ ili $\neg\sigma \in T$.*

Neka osnovna svojstva definiranih pojmova ističemo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.2. (i) *Za sve strukture $\mathcal{M}$ $Th(\mathcal{M})$ je potpuna teorija.*

(ii) *Neka je* $\mathbf{K}$ *klasa* L*-struktura. Tada je* $\mathbf{K}$ *elementarna klasa ako i samo ako* $\mathbf{K} = \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \models Th(\mathbf{K})\}$.

(iii) *Teorija T je potpuna ako i samo ako su joj svaka dva modela elementarno ekvivalentna.*

Primjer 1.3. *Neka je $L = \{\cdot, e\}$, gdje je $\cdot$ dvomjesni funkcijski simbol, a e konstantski.*

(i) *Klasa grupa očito je elementarna klasa, jer je dovoljno napisati aksiome za grupe u jeziku L, koji je očigledno prirodan jezik za teoriju grupa.*

(ii) *Klasa netorzionih grupa je elementarna. Naime, neka je*

$$\Phi_n(x) = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n-puta} = e.$$

Tada je klasa netorzionih grupa očito definirana aksiomima za grupe zajedno sa skupom $\{\forall x(x = e \vee \neg\Phi_n(x)) : n \geq 2\}$.

Primjer 1.4. *Neka je $L = \emptyset$. Tada je klasa svih beskonačnih skupova elementarna. Definirajmo rečenice Φ_n ovako :*

$$\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i<j\leq n} x_i \neq x_j.$$

Intuitivno Φ_n izriče da postoji barem n različitih elemenata u strukturi. Jasno je da ako uzmemo sve Φ_n, tada one definiraju klasu svih beskonačnih skupova.

Kasnije ćemo primjenom teorema kompaktnosti pokazati da neke klase nisu elementarne.

Sada bismo željeli proučiti neka osnovne odnose među strukturama. U tu svrhu koristimo pojmove homomorfizma i izomorfizma, odnosno preslikavanja koja se "lijepo" odnose prema našoj strukturi. Preciznije :

Definicija 1.5. *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dvije L-strukture s nosačima M i N. L-homomorfizam je injektivno preslikavanje $\eta : M \to N$ koje čuva interpretacije simbola jezika L. Preciznije :*

i) $\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n))$ *za sve n-mjesne funkcijske simbole f i sve $a_1, \ldots, a_n \in M$.*

ii) $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathcal{M}}$ *ako i samo ako* $(\eta(a_1), \ldots, \eta(a_n)) \in R^{\mathcal{N}}$ *za sve n-mjesne relacijske simbole R i sve $a_1, \ldots a_n$.*

iii) $\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ *za sve konstantske simbole c.*

Homomorfizam koji je bijektivan nazivamo izomorfizam. Ukoliko vrijedi $M \subseteq N$, te je identiteta na M homomorfizam tada kažemo da je $\mathcal{M}$ podstruktura od $\mathcal{N}$. Homomorfizam također nazivamo ulaganje.

Primjetimo da $\mathcal{M}$ je podstruktura od $\mathcal{N}$ zaprvo znači da je $\mathcal{M}$ struktura u kojoj su relacijski simboli interpretirani kao restikcije interpretacija relacijskih simbola u $\mathcal{N}$ na M, interpretacije funkcijskih simbola su restrikcije interpretacija funkcijskih i interpretacije konstantskih simbola su u obje strukture jednake.

Primjer 1.6. *Očito vrijedi :*
(i) $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *je podstruktura od* $(\mathbb{R}, +, 0)$.
(ii) $\eta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $\eta(x) = e^x$, *je homomorfizam struktura* $(\mathbb{Z}, +, 0)$ *i* $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$.

Detaljno raspisan dokaz sljedećeg teorem se može pronaći u [6], pa kako je to tipičan dokaz indukcijom po složenoti formule (uz pomoćnu tvrdnju za terme), ovdje ga ne navodimo.

Teorem 1.7. *Ako su dvije strukture izomorfne, tada su one elementarno ekvivalentne.*

Sljedeći pojam je profinjenje homomorfizma i podstrukture.

Definicija 1.8. *Kažemo da je $\mathcal{M}$ elementarna podstruktura od $\mathcal{N}$ ukoliko je $\mathcal{M}$ podstruktura od $\mathcal{N}$ i za sve formule $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ njihovog jezika i $a_1, \ldots, a_n$ iz M vrijedi $\mathcal{M} \models \Phi[a_1, \ldots, a_n]$ ako i samo ako $\mathcal{N} \models \Phi[a_1, \ldots, a_n]$.*

Elementarno ulaganje $\mathcal{M}$ u $\mathcal{N}$ je izomorfizam sa $\mathcal{M}$ u elementarnu podstrukturu od $\mathcal{N}$.

Čitanjem dokaza teorema 1.7 lako se može vidjeti da za $j : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, elementarno ulaganje vrijedi $\mathcal{M} \models \Phi[a_1, \ldots, a_n]$ ako i samo ako $\mathcal{N} \models \Phi[j(a_1), \ldots, j(a_n)]$.

Primjer 1.9. *Neka je $L = \{s\}$, gdje je s jednomjesni funkcijski simbol. Neka su $(\mathbb{Z}, s)$ i $(\mathbb{N}, s)$ L-strukture u kojima je s interpretiran kao funkcija sljedbenika. Tada je očito druga podstruktura prve, no ne i elementarna podstrukura, jer je na $(\mathbb{N}, s)$ formula $\forall x(s(x) \neq y)$ istinita za nulu, dok na $(\mathbb{Z}, s)$ nije.*

Sljedeća lema nam govori kako je ispunjivost klase formula bez kvantifiktora očuvana u podstrukturama.

Lema 1.10. *Neka je $\mathcal{M}$ podstruktura od $\mathcal{N}$. Tada za sve formule $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, koje ne sadrže kvantifikatore, te $a_1, \ldots, a_n$ iz M vrijedi $\mathcal{M} \models \Phi[a_1, \ldots, a_n]$ ako i samo ako $\mathcal{N} \models \Phi[a_1, \ldots, a_n]$.*

Ako vrijedi, u odnosu na prethodnu lemu, da su očuvane i egzistencijalne formule tada se radi o elementarnoj podstrukturi. Sljedeća propozicija, u kojoj to pokazujemo, bit će nam korisna kasnije pri određivanju je li neka podstruktura elementarna.

Propozicija 1.11 (Tarski-Vaughtov test). *Neka je $\mathcal{M}$ podstruktura od $\mathcal{N}$. Tada je $\mathcal{M}$ elementarna podstruktura od $\mathcal{N}$ ako i samo ako za sve formule $\Phi(x_1, \ldots, x_n, x)$ i sve $a_1, \ldots, a_n$ iz M vrijedi : ako je $\mathcal{N} \models (\exists x(\Phi))[a_1, \ldots, a_n]$ tada postoji $b \in M$ tako da je $\mathcal{N} \models \Phi[a_1, \ldots, a_n, b]$.*

Ustalimo sada još neke oznake. Neka je L jezik, te $\mathcal{M}$ neka L-struktura. Neka je L_M jezik dobiven tako da se L proširi s novim konstanstkim simbolima c_m za svako $m \in M$. $\mathcal{M}$ se može prirodno proširiti do L_M strukture $\mathcal{M}'$ tako da dodefiniramo $c_m^{\mathcal{M}'} = m$. Obično za $\mathcal{M}'$ pišemo $(\mathcal{M}, m)_{m \in M}$. Za formulu $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ jezika L, te $m_1, \ldots, m_n \in M$ sa $\Phi(c_{m_1}, \ldots, c_{m_n})$ označavamo L_M-formulu koja je dobivena iz Φ supstitucijom vrijable x_i konstantom c_{m_i}. Uz ovu notaciju je očito :

$\mathcal{M} \models \Phi[m_1, \ldots, m_n]$ ako i samo ako $(\mathcal{M}, m)_{m \in M} \models \Phi[c_{m_1}, \ldots, c_{m_n}]$.

Također smo mogli dodavati konstante za neki $A \subseteq M$ i tako dobiti L_A-strukturu $(\mathcal{M}, m)_{m \in A}$ koja je prirodno proširenje od $\mathcal{M}$. Sada imamo :

Lema 1.12. *Neka je $\mathcal{M}$ podstruktura od $\mathcal{N}$. Tada je $\mathcal{M}$ elementarna podstruktura od $\mathcal{N}$ ako i samo ako su $(\mathcal{M}, m)_{m \in M}$ i $(\mathcal{N}, m)_{m \in M}$ elementarno ekvivalentne L_M-strukture.*

Definicija 1.13. *Lanac L-struktura je niz $(\mathcal{M}_i : i \in I)$, gdje je $(I, <)$ totalno uređen skup, te $i < j$ povlači da je $\mathcal{M}_i$ podstruktura od $\mathcal{M}_j$.*

Elementarni lanac L-struktura je lanac, pri čemu dodatno vrijedi da $i < j$ povlači da je $\mathcal{M}_i$ elementarna podstruktura od $\mathcal{M}_j$.

Ako je $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ neprazan lanac L-struktura tada definiramo uniju lanca, u oznaci $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$, na sljedeći način. Nosač od $\mathcal{M}$ je $M = \bigcup_{i \in I} M_i$. Ako je c konstantski simbol tada je po definiciji podstrukture $c^{\mathcal{M}_i} = c^{\mathcal{M}_j}$ za sve $i, j \in I$, pa definiramo $c^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}_i}$. Neka je $\overline{a} \in M$. Tada postoji $i \in I$ takav da je $\overline{a} \in M_i$. Ako je f funkcijski simbol odgovarajuće mjesnosti, tada za $i < j$ vrijedi $f^{\mathcal{M}_i}[\overline{a}] = f^{\mathcal{M}_j}[\overline{a}]$, zbog svojstva podstrukture. Dakle $f^{\mathcal{M}} = \bigcup_{i \in I} f^{\mathcal{M}_i}$ je dobro definirana funkcija na M koja čuva svojstvo podstruktura. Konačno, za relacijske simbole vrijedi $\overline{a} \in R^{\mathcal{M}_i}$ ako i samo ako $\overline{a} \in R^{\mathcal{M}_j}$ za $i < j$, pa je prirodno staviti $R^{\mathcal{M}} = \bigcup_{i \in I} R^{\mathcal{M}_i}$. Sada se iz definicije lako vidi da je $\mathcal{M}_i$ podstrukura od $\mathcal{M}$ za sve $i \in I$.

Lako je vidjeti da slično svojstvo vrijedi i za elementarne lance.

Propozicija 1.14. *Ako je* $(\mathcal{M}_i : i \in I)$ *elementarni lanac i* $\mathcal{M} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$*, tada je* $\mathcal{M}_i$ *elementarna podstruktura od* $\mathcal{M}$ *za sve* $i \in I$*.*

Sada navodimo jedan od najvažnijh teorema teorije modela.

Teorem 1.15 (Teorem kompaktnosti). *Neka je* Σ *skup* L*-rečenica. Tada* Σ *ima model ako i samo ako svaki konačan poskup od* Σ *ima model.*

Dokaz "Henkinizacijom" je standardan i detaljno raspisan u [6], pa ga ovdje ne navodimo. Alternativni dokaz koji je više algebarske naravi i koristi ultraprodukte može se pronaći u [8].

Napomena 1.16. *Valja također napomenuti da se ovaj rezultat lako može poopćiti koristeći svojstva univerzalnog i egzistencijalnog zatvorenja tako da vrijedi za proizvoljne skupove formula i da se riječ model može zamijeniti s interpretacija (struktura + valuacija).*

Pokažimo sada neke jednostavne posljedice teorema kompktnosti.

Primjer 1.17. *Pokažimo da klasa torzionih grupa nije elementarna. Pretpostavimo da je* Σ *skup rečenica koji definira klasu torzionih grupa. Neka je*

$$\Psi = \Sigma \cup \{\neg(\underbrace{x \cdots x}_{n-puta} = e) : n \geq 1\}.$$

Ako uzmemo Ψ_0*, konačan podskup od* Φ*, tada postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tako da je* $\Psi_0 \subseteq \Sigma \cup \{\neg(\underbrace{x \cdots x}_{n-puta} = e) : n_0 > n \geq 1\}$*. Primijetimo da je svaka ciklička grupa reda* n_0*, ili većeg, interpretacija na kojoj je istinito* Ψ_0*, ako* x *valuiramo kao generator grupe. Prema teoremu kompaktnosti, odnosno napomenama nakon njega, postoji interpretacija* $(\mathcal{M}, v)$ *na kojoj je istinito* Ψ*, međutim, tada je interpretacija* x*-a u* $\mathcal{M}$ *element koji nije konačnog reda, pa* $\mathcal{M}$ *nije torziona grupa, što je u kontradikciji s* $\mathcal{M} \models \Sigma$ *(jer je* Σ *skup rečenica).*

Napomenimo da se prethodni primjer mogao dokazati i koristeći originalnu izreku teorema kompaktnosti tako da proširimo jezik L novim konstantskim simbolom koji će preuzeti ulogu x-a u gornjim formulama i također voditi na kontradikciju.

Također, na sličan se način pokazuje da klasa svih povezanih grafova nije elementarna.

Neka je L jezik, te $(x_i : i \in I)$ niz varijabli. Sa $\Sigma(x_i)_{i \in I}$ želimo naglasiti da se u skupu Σ nalaze formule čije su slobodne varijable unutar niza $(x_i : i \in I)$. Za skup formula $\Sigma(x_i)_{i \in I}$ ćemo reći da je konzistentan ako postoji interpretacija za kojoj su sve formule iz Σ istinite. Kako istinitost diktiraju samo slobodne varijable, to je dovoljno da postoji L-struktura $\mathcal{M}$ i elementi $\{a_i : i \in I\}$ u nosaču M takvi da za svaku formulu $\Phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \in \Sigma$ vrijedi $\mathcal{M} \models \Phi[a_{i_1}, \dots, a_{i_m}]$.

Definicija 1.18. *I**-tip teorije** T u jeziku L je skup L-formula $\Sigma(x_i)_{i \in I}$ tako da je skup formula $T \cup \Sigma$ konzistentan, odnosno postoji interpretacija za koju su sve njegove formule istinite.*

Lema 1.19. *Neka je $T = Th(\mathcal{M})$ u jeziku L, te $\Sigma(x_i)_{i \in I}$ skup L-formula. Tada je $\Sigma(x_i)_{i \in I}$ I-tip teorije T ako i samo ako za svaki konačan podskup $\Sigma'(\overline{x})$, od Σ vrijedi $\mathcal{M} \models \exists \overline{x}(\wedge \Sigma'(\overline{x}))$. Pri tome $\overline{x}$ označava (konačan) skup svih slobodnih varijabli koje se javljaju u Σ', a $\wedge \Sigma'$ konjunkciju svih formula iz Σ'.*

Propozicija 1.20 (Löwenheim-Skolemov teorem na dolje). *Neka je $\mathcal{M}$ L-struktura i $X \subseteq M$. Neka je κ beskonačan kardinalni broj takav da je $card(L) \leq \kappa$ i $card(X) \leq \kappa \leq card(M)$. Tada postoji elementarna podstruktura $\mathcal{N}$ od $\mathcal{M}$ takva da je $card(N) = \kappa$ i $X \subseteq N$.*

Definicija 1.21. *Neka su L i L' jezici takvi da je $L \subseteq L'$, te $\mathcal{M}'$ neka L'-struktura. Sa $\mathcal{M}'|_L$ (L-redukt od $\mathcal{M}'$)označavamo L-strukturu dobivenu tako da se u $\mathcal{M}'$ zaborave simboli iz $L' \backslash L$, preciznije: za sve relacijske simbole $R \in L$ vrijedi $R^{\mathcal{M}'|_L} = R^{\mathcal{M}'}$, za sve funkcijske simbole $f \in L$ vrijedi $f^{\mathcal{M}'|_L} = f^{\mathcal{M}'}$, te $c^{\mathcal{M}'|_L} = c^{\mathcal{M}'}$ za sve konstantske simbole $c \in L$. $\mathcal{M}'$ zovemo proširenje od $\mathcal{M}'|_L$ do L'-strukture.*

Sada ćemo uvesti pojam dijagrama, koji je koristan pri dokazivanju nekih važnih teorema.

Definicija 1.22. *Neka je $\mathcal{M}$ neka L-struktura. Sa $D_c(\mathcal{M})$ označavmo skup $Th((\mathcal{M}, m)_{m \in M})$ i nazivamo potpuni dijagram strukture $\mathcal{M}$.*

Primijetimo da je $D_c(\mathcal{M})$ zapravo skup formula u jeziku L_M, koji je proširenje od L. Zapravo, lako možemo provjeriti da vrijedi $D_c(\mathcal{M}) = \{\Phi(m_1, \dots, m_n) : \mathcal{M} \models \Phi[m_1, \dots, m_n]$, Φ je L-formula i $m_1, \dots, m_n \in M\}$.

Lema 1.23. *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dvije L-strukture. Tada se $\mathcal{M}$ može elementarno uložiti u $\mathcal{N}$ ako i samo ako $\mathcal{N}$ se može proširiti do modela za $D_c(\mathcal{M})$.*

Propozicija 1.24 (Löwenhim-Skolemov teorem na gore). *Neka je $\mathcal{M}$ bekonačna L-struktura, te $\lambda \geq card(M)+card(L)$. Tada $\mathcal{M}$ ima elementarno proširenje kardinalnosti λ.*

Korolar 1.25. *Neka je T neka L-teorija koja ima beskonačan model. Tada za svaki $\lambda \geq card(L)$ postoji model od T kardinalnosti λ.*

Propozicija 1.26. *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dvije elementarno ekvivalentne L-strukture. Tada postoji L-struktura $\mathcal{M}_1$ i elementarna ulaganja $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_1$ i $g : \mathcal{N} \to \mathcal{M}_1$. Također, možemo postići da je jedno od tih preslikavanja identiteta.*

Svakako bi bilo korisno da znademo da je teorija koju proučavamo jedinstvena, odnosno da, do na izomorfizam, ima jedinstveni model. Očito nam Löwenheim-Skolemovi teoremi govore kako je to nemoguće za konzistentne teorije, pa se uvodi sljedeći pojam.

Definicija 1.27. *Za L-teoriju T kažemo da je κ-kategorična, gdje je κ neki (možda konačan) kardinalni broj, ako za T postoji barem jedan model kardinalnosti κ i ukoliko su joj svi modeli kardinalnosti κ izomorfni.*

Sljedeća propozicija nam govori kako ispitivati potpunost kategoričnih teorija.

Propozicija 1.28 (Vaught). *Neka je T teorija čiji su svi modeli beskonačni i koja je κ-kategorična za neki kardinal $\kappa \geq card(L)$. Tada je T potpuna.*

Za kraj ove točke dajemo nekoliko primjena Vaughtovog testa kako bismo pokazali potpunost nekih teorija.

Primjer 1.29. *Neka je $L = \emptyset$ i T teorija beskonačnih skupova iz primjera* 1.4. *Tada je T kategorična za sve beskonačne kardinale i potpuna. Naime, model od T je bilo koji beskonačan skup, pa T ima model svake beskonačne kardinlnosti. Nadalje, dva model od T su izomorfna čim su ekvipotentni, jer je jezik prazan. Dakle svaka dva modela iste kardinalnosti su izomorfni, pa je T kategorična za svaki beskonačni kardinal. Primjenom Vaughtovog testa slijedi da je T potpuna.*

Promotrimo sada jezik $L = \{<\}$ i teoriju DLO, gustih linearnih uređaja bez krajnjih točaka koja je zadana aksiomima:

1. $\forall x \neg(x < x)$
2. $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$
3. $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$
4. $\forall x \forall y(x < y \to \exists z(x < z < y))$
5. $\forall x \exists y \exists z(y < x < z)$

Vrijedi :

Teorem 1.30. *Teorija DLO je $\aleph_0$-kategorična i potpuna.*

Za dokaz vidjeti predavanja iz teorije skupova [9](uređajna karakteristika skupa $\mathbb{Q}$) ili pročitati dokaz u knjizi [6], u kojoj se također nalaze i zanimljivi primjeri popunih teorija koje opisuju grafove.

2 Tipovi, saturiranost, homogenost

Sada se ponovno vraćamo tipovima. U prvom poglavlju smo definirali pojam I-tipa neke teorije. Pod n-tipom podrazumjevamo I-tip, pri čemu je $I = \{1, \ldots, n\}$. Nadalje, obično ćemo pisati $\overline{x}$ za n-torku vrijabli $(x_1, \ldots, x_n)$, za neki $1 \leq n \leq \omega$. Razradimo još malo terminologiju :

Definicija 2.1. (*i*) *Neka je* $\Sigma(x_i)_{i \in I}$ *skup* L*-formula i* $\mathcal{M}$ *neka* L*-struktura. Kažemo da je* Σ *realiziran u* $\mathcal{M}$ *ukoliko postoji niz* $(a_i)_{i \in I}$ *elemenata od* M *tako da je* $\mathcal{M} \models \Sigma[a_i]_{i \in I}$. *Također kažemo da* $(a_i)_{i \in I}$ *realizira* Σ *u* $\mathcal{M}$. *Ako* Σ *nije realiziran u* $\mathcal{M}$ *kažemo da je omašen u* $\mathcal{M}$.

(*ii*) *Potpuni* n*-tip teorije* T *u jeziku* L *je* n*-tip* $\Sigma(\overline{x})$ *od* T *takav da za sve* L*-formule* $\Phi(\overline{x})$ *vrijedi :* $\Phi(\overline{x}) \in \Sigma$ *ili* $\neg\Phi(\overline{x}) \in \Sigma$. *Potpune tipove ćemo označavati sa* $p, q, \ldots$.

(*iii*) *Neka je* $\mathcal{M}$ *neka* L*-struktura i* $\overline{a} \in M^n$. *Tip od* $\overline{a}$ *nad* $\mathcal{M}$ *je skup* $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}) = \{\Phi(\overline{x})$ *nad jezikom* $L : \mathcal{M} \models \Phi[\overline{a}]\}$.

Primjer 2.2. *Neka je* $\mathcal{M} = ((\mathbb{N}, <), n)_{n \in \mathbb{N}}$. *Promotrimo teoriju* $T = Th(\mathcal{M})$ *u jeziku* $L_{\mathbb{N}}$ *i skup formula* $\Sigma(x) = \{x > 0, x > 1, x > 2, \ldots\}$. *Uzmimo proizvoljan konačan podskup* Σ_0 *od* Σ *i valuaciju koja će* x*-u pridružiti prirodan broj veći od svih koji se pojavljuju u tom konačnom podskupu. Tada smo očito dobili interpretaciju na kojoj su istinite sve formule iz* Σ_0, *a kako je* $\mathcal{M}$ *po definiciji model za* T, *to imamo interpretaciju koja zadovaljava* $T \cup \Sigma_0$. *Prema teoremu kompktnosti zaključujemo da je* $\Sigma(x)$ *1-tip teorije* T.

Ako želimo biti potpuno formalni, u gornjoj definiciji skupa Σ su trebale biti formule $x > c_i$, gdje je $i \in \mathbb{N}$, a c_i novi konstantski simbol dodan jeziku, a koji će se interpretirati brojem i.

Demonstrirajmo sada kako izgleda jedan potpun tip. Kasnije ćemo vidjeti da svi potpuni tipovi u osnovi izgledaju tako.

Primjer 2.3. *Neka je ponovno* $\mathcal{M} = ((\mathbb{N}, <), n)_{n \in \mathbb{N}}$ *i* $T = Th(\mathcal{M})$. *Neka je* $p(x) = tp_{\mathcal{M}}(1) = \{\Phi(x) : \mathcal{M} \models \Phi[1]\}$. $\mathcal{M}$ *je po definiciji model za* T *i za* p, *pa je* p *1-tip od* T, *no on je očito potpun, jer za fiksnu valuaciju formula je na nekom modelu ili istinita ili lažna. Nadalje, vidimo da u ovom primjeru* 1 *realizira tip* p *u* $\mathcal{M}$.

Napomena 2.4. (*i*) *Iz definicije vidimo da je svaki* I*-tip teorije* T *realiziran u nekom modelu od* T.

(*ii*) *Neka je* $\Sigma(\overline{x})$ *neki skup* L*-forumla. Tada je* Σ *potpuni* n*-tip teorije* T *ako i samo ako postoji model* $\mathcal{M}$ *od* T *i* n*-torka* $\overline{a} \in M^n$ *tako da je* $\Sigma(\overline{x}) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$.

Razjasnimo (ii). Jasno je da je svaki $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ potpun. Neka je sada $\Sigma(\overline{x})$ potpuni n-tip od T. Po definiciji je $T \cup \Sigma(\overline{x})$ konzistentan skup formula, pa postoji inerpretacija na kojoj su oba skupa istiniti. Označimo sa a_i valuaciju varijable x_i u strukturi $\mathcal{M}$, koja pripada toj interpretaciji. Tada iz potpunosti lako slijedi $\Sigma(\overline{x}) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$.

Primjetimo još da se svaki n-tip $\Sigma(\overline{x})$ teorije T može proširiti do potpunog n-tipa od T. Naime, ako uzmemo interpretaciju $(\mathcal{M}, v)$ na kojoj su istiniti $\Sigma(\overline{x})$ i T (definicija tipova) i označimo sa $\overline{a} = v(\overline{x})$, valuacije varijabli iz Σ. Tada očito imamo : $\Sigma(\overline{x}) \subseteq tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ i $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ je potpuni n-tip od T. Sada se lako vidi da se potpuni n-tip može proširiti i do potpunog m-tipa za svako $m \geq n$.

Sada definiramo topologiju na prostoru tipova. Premda se topološki pristup čini neuobičajen, on će nam znatno olakšati neke kasnije dokaze.

Neka je T neka teorija u jeziku L. Sa $S_n(T)$ označavamo skup svih potpunih n-tipova teorije T. Za formulu $\Phi(\overline{x})$ sa slobodnim varijablama u skupu $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sa X_Φ označavamo skup $X_\Phi = \{p \in S_n(T) : \Phi \in p\}$. Na skupu $S_n(T)$ uzimamo topologiju definiranu bazom koju čine svi skupovi X_ϕ, pri čemu je ϕ proizvoljna formula u jeziku teorije T, čije se slobodne varijable nalaze u $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Trivijalno je za provjeriti kako je to doista baza neke topologije na skupu $S_n(T)$.

Nadalje, kako za potpun tip teorije T i proizvoljnu formulu ϕ vrijedi da je ili $\phi \in p$ ili $\neg\phi \in p$, to je jasno da vrijedi : $X_\phi = S_n(T) \backslash X_{\neg\phi}$. Dakle, svaki bazni otvoren skup topološkog prostora $S_n(T)$ je ujedno i otvoren i zatvoren.

Potpuni n-tip p ćemo zvati izolirani tip teorije T ako je p izolirana točka topološkog prostora $S_n(T)$. Prisjetimo se kako to znači da je skup $\{p\}$ otvoren skup u topološkom prostoru $S_n(T)$. Kako se unutar svakog otvorenog skupa koji sadrži p može smjestiti bazni otvoren skup koji sadrži p, to vrijedi da je p izolirani tip ako i samo ako postoji formula ϕ takva da je $\{p\} = X_\phi$. Za takvu formulu ϕ kažemo da izolira tip p.

U ovoj točki završavamo skupljanje alata koje ćemo kasnije upotrijebiti za dokaz Morleyevog teorema. Na početku proučavamo posebne klase struktura: saturirane i homogene strukture, te neka njihova svojstva.

Kao i obično fiksiramo jezik L i promatramo L-strukture. Kako ćemo proučavati tipove prisjetimo se notacije. Uzmimo L-strukturu $\mathcal{M}$. Neka je I skup indeksa (najčešće ordinalni broj), $A \subseteq M$, te $(b_i)_{i \in I}$ niz elemenata iz M. Nadalje, uzmimo da su x_i , za $i \in I$, različite varijable. Tada sa $tp_{\mathcal{M}}((b_i)_{i \in I}/A)$ označavamo skup svih L_A-formula $\Phi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, sa slobodnim varijablama iz skupa $\{x_i : i \in I\}$, takvih da $\mathcal{M} \models \Phi[b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}]$. Ako je $A = \emptyset$ pisat ćemo $tp_{\mathcal{M}}((b_i)_{i \in I})$.

Definicija 2.5. *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dvije L-strukture. Preslikavanje f zovemo parcijalno elementarno preslikavanje ako je domena od f podskup od M, kodomena podskup od N, te za sve L-formule $\Phi(x_1 \ldots, x_n)$ i $a_1, \ldots, a_n \in Dom(f)$ vrijedi $\mathcal{M} \models \Phi[a_1 \ldots, a_n]$ ako i samo ako $\mathcal{N} \models \Phi[f(a_1), \ldots, f(a_n)]$.*

U sljedećoj napomeni dajemo jednostavnu karakterizaciju parcijalno elementarnih preslikavanja.

Napomena 2.6. *Neka je f preslikavaje sa $A \subseteq M$ u N. Neka je $A = \{a_i : i \in I\}$. Stavimo $b_i = f(a_i)$. Tada je f parcijalno elementarno preslikavanje ako i samo ako vrijedi $tp_{\mathcal{M}}((a_i)_{i\in I}) = tp_{\mathcal{N}}((b_i)_{i\in I})$.*

U sljedećoj definiciji uvodimo pojmove saturiranost i homogenosti.

Definicija 2.7. (i) *Neka je $\mathcal{M}$ L-struktura, $A \subseteq M$ i $n < \omega$. Sa $S_n(A, \mathcal{M})$ označavamo skup svih potpunih n-tipova teorije $Th(\mathcal{M}, a)_{a\in A}$. Slično definiramo i $S_I(A, \mathcal{M})$ za proizvoljan skup indeksa I. Ako je I ordinal β pišemo $S_\beta(A, \mathcal{M})$. Ponekad ćemo izostavljati $\mathcal{M}$ ukoliko je jasan iz konteksta.*

(ii) *Neka je κ beskonačni kardinalni broj. Reći ćemo da je L-struktura $\mathcal{M}$ κ-saturirana ukoliko za sve $A \subseteq M$ takve da je $card(A) < \kappa$ vrijedi da je svaki potpuni tip $p \in S_n(A)$ realiziran u $\mathcal{M}$, za svaki $n < \omega$. Reći ćemo da je $\mathcal{M}$ saturirana ukoliko je $card(M)$-saturirana.*

(iii) *Kažemo da je struktura $\mathcal{M}$ κ-homogena ako za sve $\beta < \kappa$ i $\overline{a}, \overline{b}$, nizove u M duljine β, takve da je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{b})$, te $c \in M$ postoji $d \in M$ tako da je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}, c) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{b}, d)$. Reći ćemo da je $\mathcal{M}$ homogena ukoliko je $card(M)$-homogena.*

(iv) *Reći ćemo da je $\mathcal{M}$ jako κ-homogena ako za sve $\beta < \kappa$ i nizove $\overline{a}, \overline{b}$ duljine β iz M, takve da je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{b})$ postoji automorfizam f od $\mathcal{M}$ takav da je $f(\overline{a}) = \overline{b}$. Reći ćemo da je $\mathcal{M}$ jako homogena ako je jako $card(M)$-homogena.*

U sljedećoj lemi navodimo neka osnovna svojstva definiranih pojmova.

Lema 2.8. *Neka je $\mathcal{M}$ neka L-struktura.*
(i) *Ekvivalentno je :*
(a) *Struktura $\mathcal{M}$ je κ-saturirana*
(b) *Za sve $A \subseteq M$ i $p \in S_1(A)$, p je realiziran u $\mathcal{M}$*
(c) *Kada god je $\beta < \kappa$ i $A \subseteq M$, svaki tip $q \in S_\beta(A)$ je realiziran u $\mathcal{M}$.*
(ii) *U dijelu (iii) prethodne definicije možemo dozvoliti da je c proizvoljan niz duljine γ za bilo koje $\gamma < \kappa$.*
(iii) *Ako je $\mathcal{M}$ κ-saturirana tada je i κ-homogena.*
(iv) *Ako je $\mathcal{M}$ homogena tada je i jako homogena.*
(v) *Ako je $\mathcal{M}$ saturirana tada je i jako homogena.*

Dokaz. Tvrdnja (i), koja nam govori da je dovoljno promatrati samo potpune jedan tipove je jednostavna posljedica činjenice da je n-tip ustvari 1-tip teorije proširene sa prvih $n-1$ elemenata iz realizacije dotičnog n-tipa (također vidi napomenu 2.4 (ii)). Druga ekvivalencija se slično pokazuje. Tvrdnja (ii) lako slijedi transfinitnom indukcijom do κ.
(iii) Neka $\mathcal{M}$ κ-saturirana i uzmimo da su a i b nizovi duljine β za proizvoljni $\beta < \kappa$ sa svojstvom da je $tp_{\mathcal{M}}(a) = tp_{\mathcal{M}}(b)$, te $c \in M$. Označimo $a = (a_i : i < \beta)$ i $b = (b_i : i < \beta)$. Neka je $p(x) = tp_{(\mathcal{M},a_i)_{i<\beta}}(c)$. Kako je $tp_{\mathcal{M}}(a) = tp_{\mathcal{M}}(b)$, to je jasno $Th((\mathcal{M}, a_i)_{i<\beta}) \equiv Th((\mathcal{M}, b_i)_{i<\beta})$. Dakle $p(x)$ je potpuni tip teorije $Th((\mathcal{M}, b_i)_{i<\beta})$, pa zbog saturiranosti strukture $\mathcal{M}$ postoji $d \in M$ koji realizira $p(x)$. Međutim, tada je $tp_{\mathcal{M}}(a, c) = tp_{\mathcal{M}}(b, d)$.
(iv) Konstrukcija traženog automorfizma u ovoj tvrdnji potpuno je identična konstrukciji izomorfizma (jedino se kodomena mijenja) iz sljedeće propozicije. Kako je taj dokaz detaljno raspisan ovaj izostavljamo.
(v) Slijedi iz (iii) i (iv). □

Demonstrirajmo sada neke primjere saturiranih, pa dakle i homogenih modela.

Lema 2.9. (i) *Svaki konačan model je ω-saturiran.*
(ii) *Model* $(\mathbb{N}, <)$ *jezika* $L = \{<\}$ *nije ω-saturiran.*
(iii)*Model* $(\mathbb{Q}, <)$ *jezik* $L = \{<\}$ *je ω-saturiran.*

Dokaz. (i) Neka je $\mathcal{M}$ konačan model. Uzmimo $A \subseteq M$ konačan i $p(x) \in S_1(A)$. Iz prethodne leme vidimo da je dovoljno raditi s 1-tipovima. Kako je svaki tip realiziran u nekom modelu, to postoji $\mathcal{N}$, model teorije $Th(\mathcal{M}, a)_{a\in A}$ i $b \in N$ koji realizira p. Kako je $\mathcal{N}$ model teorije $Th(\mathcal{M}, a)_{a\in A}$, to je $(\mathcal{M}, a)_{a\in A} \equiv \mathcal{N}$, a kako je $(\mathcal{M}, a)_{a\in A}$ konačan, to u oni izomorfni. Sada iz $\mathcal{N} \models p[b]$ slijedi da postoji $a \in M$ takav da je $\mathcal{M} \models p[a]$.
(ii) Definirajmo $\Gamma(x) = \{\exists y_1(y_1 < x), \exists y_1, y_2(y_1 < y_2 < x), \ldots\}$. Jasno je da za svaki konačan $\triangle(x) \subseteq \Gamma(x)$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $(\mathbb{N}, <) \models \triangle[n_0]$. Dakle $\Gamma(x)$ je tip teorije $Th(\mathbb{N}, <)$. Kako je svaki tip sadržan u nekom potpunom tipu, to postoji $p \in S_1(\mathbb{N}, <)$ tako da je $\Gamma \subseteq p$. Međutim, kako očito ne postoji $m \in \mathbb{N}$ za koji vrijedi $(\mathbb{N}, <) \models \Gamma[m]$, to p nije realiziran u $(\mathbb{N}, <)$, odnosno model nije saturiran.
(iii). Neka je $A \subseteq \mathbb{Q}$ konačan, te $p \in S_1(A)$. Kao i u (i) postoji model $\mathcal{N}$ i $n_0 \in N$ tako da je $(\mathcal{M}, a)_{a\in A} \equiv \mathcal{N}$ i $\mathcal{N} \models p[n_0]$. Iz Löwenheim-Skolemovog teorema na dolje slijedi da postoji elementarna podstruktura $\mathcal{N}'$ od $\mathcal{N}$ koja sadrži bar jedan $n' \in N$ tako da je $\mathcal{N}' \models p[n']$. Kako je $\mathcal{N}'$ prebrojiv gust linearno uređen skup, to iz teorema 1.30 slijedi da je izomorfan sa $(\mathbb{Q}, <)$. Međutim, tada mora postojati $q \in \mathbb{Q}$ za koji je $(\mathbb{Q}, <) \models p[q]$, onosno model je saturiran. □

Sljedeća propozicija koju navodimo bit će nam važna za dovršetak dokaza Morleyevog teorema.

Kao što smo u prethodnom poglavlju napomenuli izomorfizam dviju struktura povlači njihovu elementarnu ekvivalenciju. S druge strane, obrat te tvrdnje ne vrijedi. Međutim, ako su dvije strukture elementarno ekvivalentne i jedna od njih je konačna, tada će one biti izomorfne, što smo uostalom koristili u prethodnom primjeru. Pitanje je hoće li svake dvije ekvipotentne elementarno ekvivalentne strukture biti izomorfne. Egzistencija prebrojivih nestandardnih modela aritmetike s nejednakošću daje negativan odgovor na ovo pitanje (vidjeti [2], poglavlje VI, paragraf 4). Međutim, ako su strukture saturirane sljedeće propozicija daje nam pozitivan odgovor na ovo pitanje.

Propozicija 2.10. *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ elementarno ekvivalentne saturirane L-strukture istog kardinaliteta. Tada su one izomorfne.*

Dokaz. Uzmimo da je $card(M) = card(N) = \kappa$, te da je $M = (a_i : i < \kappa)$ i $N = (b_i : i < \kappa)$. Induktivno ćemo definirati elemente $c_i \in M$, te $d_i \in N$, za $i < \kappa$ takve da za sve $\alpha < \kappa$ vrijedi $tp_{\mathcal{M}}(c_i : i < \alpha) = tp_{\mathcal{N}}(d_i : i < \alpha)$.
Slučaj $\alpha = 0$ slijedi iz elementarne ekvivalentnosti danih struktura.
Pretpostavimo sada da tražena tvrdnja vrijedi za sve $\alpha < \beta$. Tada postoje jedinstveni $n \in \mathbb{N}$ i granični ordinal γ tako da vrijedi $\beta = \gamma + n$[1] Ukoliko je $n = 2m$ stavljamo $c_\beta = a_{\gamma+m}$ i označimo sa $p(x) = tp_{\mathcal{M}}(c_\beta / c_{<\beta})$. Neka je skup formula $q(x)$ nastao zamjenom parametara c_i sa d_i, za $i < \beta$ u $p(x)$. Prema pretpostavci indukcije vrijedi $tp_{\mathcal{M}}(c_{<\beta}) = tp_{\mathcal{N}}(d_{<\beta})$, pa je $q(x) \in S_1(d_{<\beta}, \mathcal{N})$. Kako je $\mathcal{N}$ saturirana struktura, to postoji $d_\beta \in N$ koji realizira tip $q(x)$, pa vrijedi $tp_{\mathcal{M}}(c_{\leq\beta}) = tp_{\mathcal{N}}(d_{\leq\beta})$. Primijetimo samo da smo se u ovoj konstrukciji slobodno služiti svojstvom zamjene parametara u skupu formula bez pretjeranog razjašnjavanja očiglednih svojstava koja vrijede.
Ukoliko je pak $n = 2m + 1$, stavljamo $d_\beta = b_{\gamma+m}$ i ponavljamo konstrukciju iz parnog slučja.
Sad definiramo parcijalno elementarno preslikavanje $f : M \to N$ stavivši $f(c_i) = d_i$, kada god je $i < \kappa$. Koraci back i forth naše induktivne konstukcije, te jedinstvenost raspisa ordinala preko graničnog ordinala i prirodnog broja nam jamče da je dobivena funkcija bijekcija.
Iz Činjenice da je f izomorfizam slijedi iz $tp_{\mathcal{M}}(c_i : i < \alpha) = tp_{\mathcal{N}}(d_i : i < \alpha)$, za sve $\alpha < \kappa$. Naime ako je R relacijski simbol mjesnosti n, tada za atomarnu formulu $R(x_1, \ldots, x_n)$ vrijedi : $\mathcal{M} \models R^{\mathcal{M}}(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ ako i samo ako vrijedi $\mathcal{N} \models R^{\mathcal{N}}(d_{i_1}, \ldots, d_{i_n})$, zbog jednakosti potpunih tipova, gdje smo za α uzeli ordinal veći od $i_1, \ldots, i_n$. Analogne tvrdnje dobivamo za konstantske simbole proučavajući formule $x = c$, pri čemu je c konstantski

[1] Tvrdnja je posljedica teorema o Cantorovoj normalnoj formi.

simbol, a x varijabla, te za funkcijske simbole proučavajući formule oblika $f(x_1, \ldots, x_n) = x$ i uzimajući u obzir što istinitost (ispunjivost) formule u strukturi znači. Te tri činjenice daju nam homomorfnost. Iz bijektivnosti slijedi da su strukture izomorfne. $\square$

Propozicija 2.11. *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ elementarno ekvivalentne L-strukture, $card(M) \leq \kappa$ i $\mathcal{N}$ je κ-saturirana. Tada se $\mathcal{M}$ može elementarno uložiti u $\mathcal{N}$.*

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu prethodne propozicije, međutim u ovom slučaju možemo koristiti samo forth klauzulu, jer struktura $\mathcal{M}$ nije nužno κ-saturirana, odnosno onu koja je raspisana u prethodnoj propoziciji. Funkcija koju na taj način dobivamo neće biti nužno surjektivna, no bit će homomorfizam s domenom M i pri tome parcijalno elementarno preslikavanje. Zbog homomorfnosti slika te funkcije je podstruktura od $\mathcal{N}$. Kako je dobivena funkcija još i parcijalno elementarna, to je njena slika elementarna podstruktura. $\square$

Ako su zadani $\mathcal{M}$ i κ željeli bismo pronaći elementarno proširenje $\mathcal{N}$ od $\mathcal{M}$ koje je κ-saturirano. Također će nas zanimati kolika je "veličina" tog proširenja. Time se bavimo u nekoliko sljedećih rezultata.

Ponovimo sada neke termine teorije skupova koje ćemo nadalje koristiti. Ako je κ kardinalni broj tada definiramo kofinalnost od κ, u oznaci $cf(\kappa)$, kao najmanji ordinal δ takav da postoji rastući niz ordinalnih brojeva $(\alpha_i : i < \delta)$ sa svojstvom da je $\lim_i \alpha_i = \kappa$. Poznato je da je $cf(\kappa)$ kardinal. Za κ ćemo reći da je regularan ako vrijedi $cf(\kappa) = \kappa$. Poznato je da je svaki kardinal sljedbenik regularan.

Sljedeća propozicija govori o egzistenciji saturiranih modela.

Propozicija 2.12. *Neka je $\mathcal{M}$ neka L-struktura i τ kardinalni broj takav da je $\tau > card(L) + \omega$, te $card(M) < 2^\tau$. Tada postoji elementarno proširenje $\mathcal{N}$ od $\mathcal{M}$ kardinalnosti ne veće od 2^τ koje je τ^+-saturirano.*

Dokaz. Teorem ćemo dokazati uz pretpostavku da je $card(M) = 2^\tau$. Iz dokaza će biti jasno da tada vrijedi i općenita tvrdnja.
Konstruiramo elementarni lanac $(\mathcal{M}_i : i < \tau^+)$, modela kardinlnosti 2^τ sa svojstvom da je $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ i da za svaki $\alpha < \tau^+$, podskup A od $\mathcal{M}_\alpha$ i potpuni n-tip p nad A je p realiziran u $\mathcal{M}_{\alpha+1}$. Pri tome na graničnim ordinalima uzimamo uniju prethodno definiranih modela.
Primjetimo nadalje, da je unija tog lanca model veličine 2^τ. Naime, lanac je duljine τ^+ i svi modeli su kardinalnosti 2^τ.

Tvrdnja (*): Svaki model $\mathcal{N}$ kardinalnost 2^τ ima elementarno proširenje kardinalnosti 2^τ koje realizira sve tipove nad podskupovima od N, čiji je kardinalitet manji ili jednak τ.
Primjetimo da je broj podskupov od N čiji kardinalitet nije veći od τ najviše 2^τ. Kako je kardinalitet jezika s kojim radimo manji ili jednak τ, to je broj svih formula ne veći od τ, pa je posebno i broj svih potpunih tipova nad danim podskupovima manji od 2^τ. Sada koristeći teorem kompaknosti i Löwenheim-Skolemov teorem možemo pronaći traženi model.[2]
Sada pomoću tvrdnje $(*)$ dobivamo željeni elementarni lanac modela. Neka je $\mathcal{N}$ unija lanca. Tada je $\mathcal{N}$ elementarno proširenje od $\mathcal{M}$ i kako smo već napomenuli, kardinalitet mu je 2^τ.
Još je preostalo dokazati da je $\mathcal{N}$ τ^+-saturiran. Neka je A podskup od N kardinaliteta ne većeg od τ i p potpuni n-tip nad A.Tada je $A \subseteq M_\alpha$ za neki $\alpha < \tau^+$. Naime u protivnom bi za svaki $\alpha < \tau^+$ postojao neki elemenat u skupu $M_{\alpha+1} \backslash M_\alpha$. Međutim, to povlači da je $cf(\tau^+) \leq card(A) \leq \tau$, što je u kontradikciji s činjenicom da je svaki kardinal sljedbenik regularan. No tada je p realiziran u $\mathcal{M}_{\alpha+1}$, pa dakle i u $\mathcal{N}$. $\square$

Lako je pokazati da je prethodni rezultat najbolji mogući. Preciznije :

Primjer 2.13. *Neka je $L = \{R\}$, gdje je R dvomjesni relacijski simbol, te $\mathcal{M}$ L-struktura čiji se nosač sastoji od svih konačnih podskupova od ω, te je R interpretiran kao inkluzija. Tada je svaki τ^+-saturirani model teorije $Th(\mathcal{M})$ kardinalnosti barem 2^τ.*

Korolar 2.14. *Pretpostavimo da vrijedi poopćena hipoteza kontinuuma, tj. $2^\tau = \tau^+$ za sve beskonačne kardinale τ. Neka je T L-teorija. Tada za svaki regularni kardinal $\lambda > card(L) + \omega$, T ima saturirani model kardinalnosti λ.*

Dokaz. Ako je λ kardinal sljedbenik, tada rezultat slijedi iz propozicije 2.12 (uz hipotezu kontinuuma). Pretpostavimo sada da je λ granični kardinal. Koristeći propoziciju 2.12 možemo konstuirati elementarni lanac $(\mathcal{M}_\alpha : \alpha < \lambda)$ sa svojstvom da je svaki $\mathcal{M}_\alpha$ saturiran model od T i da je kardinalnosti α^+ (ponovo, koristeći $2^\tau = \tau^+$). Neka je $\mathcal{N}$ unija tog lanca. Tada je on kardinalnosti λ. Nadalje, ako je A podskup od N kardinalnoti manje od λ, tada je zbog regularnosti od λ A sadržan u nekom M_α. Također možemo pretpostaviti da je $card(A) < \alpha^+$ (ako nije smjestimo ga u $M_{\alpha+1}$). Međutim, kako je M_α saturiran, to je svaki n-tip nad A realiziran u M_α. $\square$

[2] Ako čitaoca zanima na koji točno skup formula primjenjujmo teorem kompaknosti potpun dokaz tvrdnje može pronaći u [1], lema 5.1.3.

Propozicija 2.15. *Neka je κ proizvoljan kardinal. Tada svaka struktura $\mathcal{M}$ ima elementarno proširenje koje je κ^+-saturirano i jako κ^+-homogeno. Posebno, to proširenje je κ-saturirano i jako κ-homogeno.*

Dokaz. Pomoću propozicije 2.12 konstruiramo elementarni lanac $(\mathcal{M}_\alpha : \alpha < \kappa^+)$ sa svojstvom da je $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}$ i da je struktura $\mathcal{M}_{\alpha+1}$ upravo $card(M_\alpha)^+$-saturirana. Neka je $\mathcal{N}$ unija dobivenog lanca.
Pokažimo prvo da je $\mathcal{N}$ κ^+-saturiran. Kao i u prethodnim dokazima, iz regularnosti od κ^+ slijedi da je svaki podskup A od N, kardinalnosti manje od κ^+ sadržan u nekom M_α. Međutim, tada je $card(A) \leq card(M_\alpha)$, pa je svaki potpuni n-tip nad A realiziran u $\mathcal{M}_{\alpha+1}$, odnosno u $\mathcal{N}$.
Dokaz da je $\mathcal{N}$ jako κ^+-homogen se provodi transfinitnom indukcijom jednake strukture kao i u dokazu propozicije 2.10, dok je korak indukcije identičan dokazu tvrdnje (iii) leme 2.8. Potpuno raspisan dokaz može se naći u [3], teorem 12.21. □

Demonstrirajmo sada zašto je prethodna propozicija korisna. Pretpostavimo da je T potpuna teorija i da želimo proučavati njene modele kardinalnosti manje ili jednake κ. Neka je $\mathcal{N}$ model od T dobiven iz prethodne propozicije. Kako su svaka dva modela potpune teorije elementarno ekvivalentna, to primjenom leme 2.11 vidimo da je svaki model od T, kardinaliteta manjeg ili jednakog κ, izomorfan nekoj elementarnoj podstrukturi od $\mathcal{N}$. Dakle dovoljno je proučavati elementarne podstrukture od $\mathcal{N}$.

Sada dajemo jedan zanimljiv rezultat o homogenim strukturama.

Lema 2.16. *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dvije L-strukture i κ kardinal za koji vrijedi :*
(i) Za svaki konačan niz $\overline{a}$ iz M $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ je realiziran u $\mathcal{N}$.
(ii) $\mathcal{N}$ je κ-homogena.
Tada za svaki niz $\overline{a}$ iz M duljine strogo manje od κ vrijedi da je $tp_{\mathcal{M}}(a)$ realiziran u $\mathcal{N}$.

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po duljini niza $\overline{a}$. Pretpostavimo da je duljina niza $\overline{a}$ jednaka i. Tada za $j < i$ sa $\overline{a}|j$ označavamo prvih j elemenata niza $\overline{a}$. Konstruiramo niz $\overline{b}$ u N induktivno. Preciznije, konstruiramo b^j za svako $j < i$, tako da je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}|j) = tp_{\mathcal{N}}(b^j)$ i za $j < j'$ vrijedi da je $b^{j'}$ proširenje niza b^j.
Za konačne j tvrdnja slijedi iz pretpostavke (i). Za j granični, naprosto uzimamo uniju svih prethodnika. Preostao nam je slučaj sljedbenika. Dakle pretpostavimo da znamo $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}|j) = tp_{\mathcal{N}}(b^j)$ i da želimo proširiti b^j do b^{j+1} tako da je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}|(j+1)) = tp_{\mathcal{N}}(b^{j+1})$. Niz $\overline{a}|(j+1)$ možemo prenumerirati tako da počinje nizom duljine $\beta < j+1$, recimo c. Prema pretpostavci (jer indukcija ide za sve nizove) postoji d, niz duljine β u N takav da je

$tp_{\mathcal{M}}(c) = tp_{\mathcal{N}}(d)$. Sada iz κ-homogenosti slijedi da možemo naći traženo proširenje b^{j+1} od b^j. □

Nadalje se bavimo isključivo prebrojivim modelima. Pod time mislimo na modele (strukture) čija je kardinalnost najviše ω. Za teoriju T ćemo reći da je prebrojiva ako je njen jezik L kardinalnosti najviše ω.

Lema 2.17. *Neka je T prebrojiva i potpuna teorija. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $S_n(T)$, skup svih potpunih n-tipova teorije T, je prebrojiv za sve $n < \omega$.

(ii) Za svaki model $\mathcal{M}$ od T i konačan podskup $A \subseteq M$ je $S_1(A, \mathcal{M})$ prebrojiv.

(iii) Za svaki model $\mathcal{M}$ od T i konačan podskup $A \subseteq M$ je $S_n(A, \mathcal{M})$ prebrojiv, za sve $n < \omega$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Pretpostavimo da postoji model $\mathcal{M}$ od T i konačan podskup $A \subseteq M$ za koji je $S_1(A, \mathcal{M})$ neprebrojiv. Prema definiciji tipova tada postoji elementarno proširenje $\mathcal{N}$ od $\mathcal{M}$ i elementi $b_i \in N$, za $i < \omega_1$, takvi da je $tp_{\mathcal{N}}(b_i/A) \neq tp_{\mathcal{N}}(b_j/A)$, za sve $i, j < \omega_1, i \neq j$. Neka je $card(A) = n$ i neka je $\overline{a}$ konačan niz u kojem se pojavljuju svi elementi od A. Tada je jasno $tp_{\mathcal{N}}(\overline{a}, b_i) \neq tp_{\mathcal{N}}(\overline{a}, b_j)$ za $i \neq j$, odnosno $S_{n+1}(T)$ je neprebrojiv.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Pretpostavimo da je T teorija koja zadovoljava pretpostavku (ii). Pokažimo da tada teorija T ima najviše prebrojivo mnogo potpunuh n-tipova za sve prirodne brojeve n. Naime, ako je $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ potpuni n-tip od T i $\mathcal{M}$ model od T koji realizira Σ (takav postoji po definiciji tipova), tada postoje $a_1, \ldots, a_n$ iz M koji realiziraju Σ. Očito je $\Sigma(x_1) = \{\phi(x_1, a_2, \ldots, a_n) : \phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma\}$ potpun 1-tip od $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$, za $A = \{a_1, \ldots a_n\}$. Dakle potpunih n-tipova od T nema više nego potpunih 1-tipova od $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$, a tih je najviše prebrojivo. Primjenjujući prethodno razmatranje na $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ iz uvjeta leme dobivamo $(ii) \Rightarrow (iii)$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Ova tvrdnja je jasna (uz 2.4 (ii)). □

Propozicija 2.18. *Neka je T prebrojiva i potpuna teorija. Tada je ekvivalentno:*

(i) $S_n(T)$ je prebrojiv za sve $n < \omega$.

(ii) T ima prebrojiv ω-saturiran model.

Dokaz. $(ii) \Rightarrow (i)$ Neka je $\mathcal{M}$ prebrojiv ω-saturiran model od T. Tada $\mathcal{M}$ realizira sve tipove iz $S_n(T)$, za svako n. Kako je skup svih n-torki iz M prebrojiv za svako n i kako jedna n-torka može realizirati samo jedan potpuni n-tip, zaključujemo da je i $S_n(T)$ prebrojiv za svako n.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je $\mathcal{M}_0$ bilo koji prebrojiv model od T. Koristeći pretpostavku (i), lemu 2.17, teorem kompaktnosti i Löwenheim-Skolemov teorem možemo

pronaći prebrojio elementarno proširenje $\mathcal{M}_1$ od $\mathcal{M}_0$ koje ima svojstvo da je za svaki konačan $A \subseteq M_0$ i tip $p \in S_n(A, \mathcal{M}_0)$ p realiziran u $\mathcal{M}_1$. Iterirajući opisanu konstrukciju dobivamo elementarni lanac prebrojivih modela $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}_1 \subseteq \ldots$, od T. Neka je $\mathcal{M}$ unija dobivenog lanca. Tada je jasno da je $\mathcal{M}$ prebrojiv i ω-saturiran. □

Za potpunu prebrojivu teoriju T koja zadovaljava neku od ekvivalentnih tvrdnji prethodne propozicije reći ćemo da je "malena". Kako su svaka dva modela potpune teorije elementarno ekvivalentna, to iz propozicije 2.10 slijedi da su svaka dva prebrojiva i saturirana modela od T izomorfna. Primijenimo li sada propoziciju 2.11 na T vidimo da je prebrojivo saturirani model od T ujedno i njen "najveći" prebrojiv model. Dakle "malene" teorije posjeduju "najveći" prebrojiv model. Uskoro ćemo se pozabaviti uvjetima za detektiranje "najmanjeg " prebrojivog modela.

Definicija 2.19. *Neka je T potpuna teorija. Model $\mathcal{M}$ od T se naziva prosti model ako se može elementarno uložiti u svaki drugi model $\mathcal{N}$ od T.*

Primijetimo da prosti model teorije T, ukoliko postoji, mora biti kardinaliteta ne većeg od $card(L) + \omega$. Naime, to nam diktira Löwenheim-Skolemov teorem na "dolje". Za odgovor na pitanje postoji li "najmanji" prebrojivi model neke teorije treba vidjeti da su svaka dva prosta modela te teorije izomorfna. To općenito neće biti istina, ali vidjet ćemo da za prebrojive teorije jest. Za to će nam biti potreban teorem o omašivanju tipova. Stoga uvodimo neke pojmove potrebne za njegov dokaz.

Definicija 2.20. *Neka je T L-teorija i $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ n-tip od T. Reći ćemo da je Σ pravi tip ako postoji L-formula $\phi(x_1 \ldots, x_n)$ tako da vrijedi :*
(i) ϕ je konzistentna sa T
(ii) za sve $\psi \in \Sigma$ vrijedi $T \models \forall \overline{x}(\phi(\overline{x}) \to \psi(\overline{x}))$.

Ovaj pojam se lako može karakterizirati topološki. Naime vrijedi sljedeće:

Lema 2.21. (i) *Neka je p potpuni n-tip od T. Tada je p pravi tip ako i samo ako je p izolirana točka prostora $S_n(T)$.*
(ii) *Ako je T potpuna i Σ pravi tip od T tada je Σ realiziran u svakom modelu od T.*

Dokaz. (i) Neka je $p \in S_n(T)$ pravi tip od T i $\phi(\overline{x})$ formula iz definicije pravog tipa. Tvrdimo da je $\{p\} = X_\phi$. Pokažimo prvo da je $\{p\} \subseteq X_\phi$. Pošto iz definicije pravog tipa znamo da je formula ϕ konzistentna s teorijom T, tada postoji model $\mathcal{M}$ od T i $\overline{a} \in M^n$ tako da vrijedi $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$. Tada je $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$. Pretpostavimo da $\phi \notin p$. Zbog potpunosti je tada $\neg\phi \in p$.

Kako po uvjetu (ii) definicije pravog tipa vrijedi $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}]$ za sve $\psi \in p$, to je posebno $\mathcal{M} \models \neg\phi[\overline{a}]$, što je nemoguće. Sada pak pokazujemo obratnu inkluziju, odnosno da vrijedi $X_\phi \subseteq \{p\}$. Neka je $q \in X_\phi$. Po definiciji skupa X_ϕ je tada $q \in S_n(T)$ i $\phi \in q$. Pretpostavimo da $p \neq q$. Tada postoji formula ψ tako da je $\psi \in q$ i $\neg\psi \in p$. Prema napomeni 2.4 (ii) postoji model $\mathcal{M}$ od T i $\overline{a} \in M^n$ takvi da je $q = tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$. Kako su ψ i $\phi \in q$ to vrijedi $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$ i $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}]$. Međutim iz stavke (ii) definicije pravih tipova tada je i $\mathcal{M} \models \neg\psi[\overline{a}]$, što daje kontradikciju. Zaključujemo da je p izolirani tip.

Pokažimo sada obrat. Ako je p izoliran, tada postoji formula ϕ i bazni otvoren skup X_ϕ takvi da je $\{p\} = X_\phi$. Pokazujemo da je ϕ formula iz definicije pravog tipa. Kako je svaki (potpuni) tip realiziran u nekom modelu od T, to je i ϕ konzistentna s T, odnosno vrijedi uvjet (i) definicije pravih tipova. Neka je sada $\psi \in p$ i $\mathcal{M}$ model od T. Pretpostavimo da postoji $\overline{a} \in M^n$ tako da je $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$ i $\mathcal{M} \models \neg\psi[\overline{a}]$. Označimo $q = tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$. Tada je $q \in S_n(T)$ i $\phi \in q$. Kako je $\{p\} = X_\phi$, to mora vrijediti $p = q$. Sada dobivamo kontradikciju iz činjenice da je $\neg\psi \in q$, odnosno $\psi, \neg\psi \in p$.
(ii) Neka je p neki pravi tip potpune teorije T i $\mathcal{M}$ prizvoljan model od T. Neka je ϕ formula iz definicije pravog tipa i $\mathcal{N}$ model u kome je ona realizirana nekom n-torkom $\overline{b}$. Kako su svaka dva modela potpune teorije elementarno ekvivalentna i u $\mathcal{N}$ je istinita formula $\exists\overline{x}\phi(\overline{x})$, to postoji n-torka $\overline{a}$ u M takva da je $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$. Međutim, tada iz uvjeta (ii) definicije pravih tipova slijedi da n-torka $\overline{a}$ realizira tip p u $\mathcal{M}$. $\square$

Obratom po kontrapoziciji iz leme 2.21(ii) dobivamo da ukoliko je neki tip potpune teorije T omašen u nekom modelu te teorije, tada on nije pravi tip teorije T. O obratu te tvrdnje govori nam sljedeći teorem.

Teorem 2.22 (Teorem o omašivanju tipova). *Neka je T prebrojiva teorija i Σ n-tip od T koji nije pravi tip. Tada T ima prebrojiv model koji omašuje Σ.*

Dokaz. Radi jednostavnosti zapisa dokazujemo samo slučaj za $n = 1$, jer se lako uvjeriti da se time ne gubi na općenitosti. Dokaz teorema je zapravo tipična (poopćena) Henkinova konstrukcija kakva se koristi pri dokazu teorema kompaknosti ili potpunosti logike prvog reda.
Prvo jeziku L-teorije T dodajemo prebrojivo mnogo konstantskih simbola $c_0, c_1, \dots$ i dobivamo jezik L'. Ideja je konstruirati potpunu i konzistentnu L'-teoriju T' koja sadrži T i ima sljedeća svojstva :
(i) Za sve L'-formule $\phi(x)$, iz $\exists x\phi(x) \in T'$, slijedi $\phi(c_m) \in T'$, za neko m.
(ii) Za svako m postoji $\psi(x) \in \Sigma$ tako da je $\neg\psi(c_m) \in T'$.
Pretpostavimo da imamo takvu teoriju T' i uzmimo da je $\mathcal{M}'$ neki njen model.

Neka je $\mathcal{M}''$ podstruktura koja se sastoji od inerpretacija konstantskih simbola c_i dodanih jeziku L. Svojstvo (i) i Tarski-Vaughtov test nam jamče da je tako dobivena struktura elementarna podstruktura od $\mathcal{M}'$, te je ona očito prebrojiva. Nadalje, svojstvo (ii) nam jamči da L-redukt te strukture omašuje $\Sigma(x)$, te je to traženi model.
Preostalo je konstruirati teoriju T'. Neka je $\sigma_0, \sigma_1, \ldots$ niz koji sadrži sve L'-rečenice. Induktivno ćemo konstruirati niz konzistentnih teorija $T = S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \ldots$ sa svojstvom da je skup S_{i+1} nastao dodavanjem konačno mnogo rečenica skupu S_i. Pretpostavimo da smo definirali skup S_i. Ukoliko je skup $S_i \cup \{\sigma_i\}$ konzistentan, stavaljamo $S_i' = S_i \cup \{\sigma_i\}$. U protivnom stavljamo $S_i' = S_i \cup \{\neg\sigma_i\}$.
U slučaju da smo dodali rečenicu σ_i i da je σ_i oblika $\exists x \phi(x)$ definiramo $S_i'' = S_i' \cup \phi(c_j)$, gdje je c_j konstantski simbol koji se ne pojavljuje u S_i'. Tada je jasno da je S_i'' konzistentan i da je $S_i'' = T \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_s\}$. Označimo sa $\overline{c} = (c_{i_1}, \ldots, c_{i_n})$ (konačan) niz novih konstantskih simbola (u odnosu na L) koji se javljaju u formulama $\psi_1, \ldots, \psi_s$. Formulu $\wedge_{j=1\ldots s}\psi_j$ zapišimo kao $\psi(\overline{c})$, pri čemu je $\psi(\overline{x})$ L-formula. Jasno je da je to moguće učiniti, jer je jezik u kojem su zapisane formule iz konjunkcije nastao dodavanjem konačno mnogo konstanti jeziku L. Također pretpostavljamo da je simbol c_i unutar niza $\overline{c}$. Ukoliko nije, možemo dodti formulu $c_i = c_i$ našem skupu.
<u>$Tvrdnja(*)$:</u> Postoji formula $\delta(x) \in \Sigma(x)$ tako da je skup $S_i'' \cup \{\neg\delta(c_i)\}$ <u>konzistentan</u> skup formula.
Naime, ukoliko tvrdnja ne vrijedi, tada $S_i'' \models \delta(c_i)$, za sve formule $\delta \in \Sigma$. Dakle $T \cup \psi(\overline{c}) \models \delta(c_i)$, za sve $\delta \in \Sigma$. Sada definirajmo L-formulu $\chi(x_i)$ sa $\exists x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n(\psi(x_1, \ldots, x_n))$. Jasno je da vrijedi $T \models \forall x_i(\chi(x_i) \rightarrow \delta(x_i))$, za sve $\delta \in \Sigma$. Kako je $\chi(x_i)$ konzistentna sa T (uzmemo L-redukt proizvoljnog modela od S_i'' koji sadrži interpretacije simbola iz $\overline{c}$) slijedi da je Σ pravi tip, što je u kontradikciji s pretpostavkom teorema. Time je pomoćna tvrdnja dokazana.

Sada stavljamo $S_{i+1} = S_i'' \cup \{\neg\delta(c_i)\}$, gdje je δ neka formula čija egzistencija slijedi iz tvrdnje $(*)$. Uzmemo li da je T' unija svih ovako definiranih S_i jasno je da T' zadovoljava zahtjeve (i) i (ii). $\square$

Prethodni se rezultat može pametnim preslagivanjem pojačati tako da nađemo model koji istovremeno omašuje prebrojivo mnogo tipova.

Korolar 2.23. *Neka je T prebrojiva teorija, te neka je za svako $i < \omega$, Σ_i n_i-tip od T koji nije pravi tip (za neki konačan n_i). Tada T ima prebrojiv model koji omašuje sve Σ_i.*

U sljedećoj definiciji uvodimo još jedan pojam koji će biti koristan pri proučavanju prebrojivih modela.

Definicija 2.24. *Za L-strukturu $\mathcal{M}$ ćemo reći da je atomarna ako je za svako n i n-torku $\overline{a}$ elemenata iz M tip $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ pravi tip teorije $Th(\mathcal{M})$. (Odnosno izolirana točka topološkog prostora $S_n(Th(\mathcal{M}))$).*

Atomarne strukture potpunih teorija moći ćemo razaznavati pomoću jedne posebne klase formula.

Definicija 2.25. *Neka je T potpuna L-teorija. Formula $\phi(x_1, \dots, x_n)$ jezika L se naziva potpuna n-formula ili atom ako je ϕ konzistentna sa T i za svaku L-formulu $\psi(x_1, \dots, x_n)$ vrijedi $T \models \forall\overline{x}(\phi(\overline{x}) \to \psi(\overline{x}))$ ili $T \models \forall\overline{x}(\phi(\overline{x}) \to \neg\psi(\overline{x}))$. (Odnosno ϕ izolira neki potpuni n-tip u $S_n(T)$).*

Iz definicije je jasno da vrijedi sljedeća karakterizacija atomarnosti :

Lema 2.26. *Neka je T potpuna L-teorija. Za svako $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $\Phi_n(x_1, \dots, x_n) = \{\neg\phi(x_1, \dots, x_n) : \phi(\overline{x})$ je potpuna n-formula od $T\}$. Tada je model $\mathcal{M}$ od T atomaran ako i samo ako $\mathcal{M}$ omašuje sve Φ_n.*

Propozicija 2.27. *Neka je T prebrojiva i potpuna teorija. Ekvivalentno je:*
(i) T ima atomarni model
(ii) T ima prebrojiv atomarni model
(iii) Za svako n izolirani tipovi su gusti u $S_n(T)$.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je $\mathcal{M}$ atomarni model od T. Löwenheim-Skolemov teorema na dolje daje nam prebrojiv elementarni podmodel. No tada je i on svakako atomaran.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Dovoljno je pokazati da svaki neprazan bazni otvoren skup X_ϕ, gdje je ϕ formula u jeziku teorije T, sadrži neki izolirani n-tip iz $S_n(T)$. Ako ϕ nije konzistentna s T tada je $X_\phi = \emptyset$. Uzmimo stoga formulu $\phi(x_1, \dots, x_n)$ konzistentnu s teorijom T i neka je $\mathcal{M}$ atomarni model od T. Kako postoji model $\mathcal{N}$ od T takav da je $\mathcal{N} \models \exists\overline{x}\phi(\overline{x})$, te kako je T potpuna, to vrijedi $\mathcal{M} \models \exists\overline{x}\phi(\overline{x})$, odnosno postoji $\overline{a} \in M^n$ tako da je $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$. Međutim, tada je $\phi \in tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ i $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ je potpuni n-tip od T. Iz atomarnosti slijedi da je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ izoliran, a iz definicije skupa X_ϕ imamo $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}) \in X_\phi$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Neka su Φ_n kao u lemi 2.26. Tvrdimo da niti jedan Φ_n koji je konzistentan s T nije pravi n-tip od T. Uzmimo stoga proizvoljan n. Pretpostavimo da je $\phi(x_1, \dots, x_n)$ konzistentna s T. Pokazujemo da T ne može zadovoljiti uvjet (ii) iz definicije pravih tipova. Prema pretpostavci postoji $p \in S_n(T)$, izoliran, takav da je $p \in X_\phi$. Neka je $\psi(x_1, \dots, x_n)$ formula koja izolira p, odnosno $\{p\} = X_\psi$. Po definiciji je ψ potpuna formula. Međutim, tada je $\neg\psi \in \Phi_n$.

Pretpostavimo sada da vrijedi $T \models \forall \overline{x}(\phi(\overline{x}) \rightarrow \eta(\overline{x}))$, za sve $\eta \in \Phi_n$. Uzmimo model $\mathcal{M}$ od T takv da je $p = tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$, za neko $\overline{a} \in M^n$. Kako je $p \in X_\phi$, to je $\phi \in p$, pa vrijedi $\mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]$. Međutim, tada vrijedi i $\mathcal{M} \models \neg\psi[\overline{a}]$, a kako je $\psi \in p$, to je $\mathcal{M} \models \psi[\overline{a}]$, što je nemoguće. Dakle niti jedan Φ_n koji je konzistentan s T nije pravi n-tip od T. Prema teoremu o omašivanju tipova, odnosno korolaru 2.23 postoji model od T koji omašuje sve Φ_n. Prema lemi 2.26 takav model je atomaran. $\square$

Lema 2.28. *Neka je $\mathcal{M}$ neka L-struktura, te $\overline{a}$ i $\overline{b}$ konačni nizovi iz M. Tada je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{b})$ izoliran ako i samo ako su $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ i $tp_{\mathcal{M}}(\overline{b}/\overline{a})$ izolirani.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{b})$ izoliran i neka je $f(\overline{x}, \overline{y})$ formula koja ga izolira, odnosno $\{tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{b})\} = X_f$. Sada je lako provjeriti da formula $\exists \overline{y} f(\overline{x}, \overline{y})$ izolira tip $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$, te da formula $f(\overline{a}, \overline{y})$ izolira tip $tp_{\mathcal{M}}(\overline{b}/\overline{a})$.
Obratno, pretpostavimo da formula $g(\overline{x})$ izolira tip $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$ i da formula $h(\overline{a}, \overline{y})$ izolira tip $tp_{\mathcal{M}}(\overline{b}/\overline{a})$ (u $Th(\mathcal{M}, a)$). Tada se lako vidi da će formula $g(\overline{x}) \wedge h(\overline{x}, \overline{y})$ izolirati tip $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{b})$. $\square$

Sljedeće dvije propozicije dat će nam egzistenciju "najmanjeg" modela potpunih i prebrojivih teorija, kao što smo prethodno najavili.

Propozicija 2.29. *Neka je T potpuna prebrojiva teorija i neka je $\mathcal{M}$ model od T. Tada je $\mathcal{M}$ prosti model od T ako i samo ako je $\mathcal{M}$ prebrojiv atomaran model od T.*

Dokaz. Pretpostavimo da je model $\mathcal{M}$ od T prost. Već smo prije napomenuli da takav model mora biti prebrojiv. Neka je $p \in S_n(T)$ tip koji nije izoliran. Prema propoziciji 2.22 p je omašen u nekom modelu $\mathcal{N}$ od T. Kako je $\mathcal{M}$ prost, to postoji elementarno ulaganje od $\mathcal{M}$ u $\mathcal{N}$. Međutim, tada je p omašen i u $\mathcal{M}$. Dakle svaki potpuni n-tip od T koji je realiziran u $\mathcal{M}$ mora biti izoliran u $\mathcal{M}$, odnosno $\mathcal{M}$ je atomaran.
Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{M}$ prebrojiv atomaran model od T. Trebamo pokazati da se $\mathcal{M}$ može elementarno uložiti u proizvoljan model $\mathcal{N}$ od T. Neka je $M = \{a_0, a_1, \ldots\}$. Induktivno definiramo elementarno preslikavanje $f : M \rightarrow N$. Kako je $tp_{\mathcal{M}}(a_0)$ pravi tip od $Th(\mathcal{M})$, to je on prema lemi 2.21(i) realiziran i u $\mathcal{N}$. (Jer je T potpuna, to je $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, pa je i $Th(\mathcal{M}) = Th(\mathcal{N})$). Dakle postoji $c_0 \in N$ takav da je $tp_{\mathcal{M}}(a_0) = tp_{\mathcal{N}}(c_0)$. Stavimo $f(a_0) = c_0$. Pretpostavimo sada da smo definirali f na $\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$ sa $f(a_i) = c_i$ tako da vrijedi $tp_{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = tp_{\mathcal{N}}(c_0, \ldots, c_{n-1})$. Označimo $b = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ i $d = (c_0, \ldots, c_{n-1})$. Tada je $(\mathcal{M}, b) \equiv (\mathcal{N}, d)$. Neka je $p_b(x) = tp_{\mathcal{M}}(a_n/b)$. Kako je zbog atomarnosti $tp_{\mathcal{M}}(b, a_n)$ pravi tip, a jasno je da je potpun, to iz leme 2.21(i) slijedi da je on izoliran. Iz leme 2.28 slijedi da je i $p_b(x)$ izoliran (u $S_1(Th(\mathcal{M}, b))$). Tada se lako vidi da je i $p_d(x)$,

tip dobiven zamjenom parametara iz b u $p_b(x)$ onima iz d, također izoliran i popun u $S_1(Th(\mathcal{N}, d))$ (Dovoljno je u formuli koja izolira tip $p_b(x)$ zamijeniti parametre iz b parametrima iz d). Prema lemi 2.21(ii) postoji $c_n \in N$ koji realizira $p_d(x)$. Tada je jasno da vrijedi $tp_{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_n) = tp_{\mathcal{N}}(c_0, \ldots, c_n)$, pa možemo staviti $f(a_n) = c_n$.

□

Propozicija 2.30. *Neka je T potpuna prebrojiva teorija. Svaka dva prosta modela od T su izomorfna.*

Dokaz. Prema prethodnoj propoziciji svaki prost model je ujedno prebrojiv atomarni model. Također je jasno da su svaka dva prosta modela elementarno ekvivalentna. Koristeći sada teorem 2.3.3 iz [1], o jedinstvenosti prebrojivih atomarnih modela , dobivamo da su svaka dva prosta modela od T izomorfna.

□

Istraživanje svojstava prebrojivih modela koje smo ovdje započeli daje mnogo zanimljivih rezultata, no kako bi nas daljnje izučavanje u tom pravcu udaljilo od cilja koji smo si zadali u ovom radu (dokaz Morleyevog teorema kategoričnosti), na žalost ga nećemo nastaviti. Napomenimo samo kako je to područje dalo mnogo iznenađujućih rezultata, poput primjerice Vaughtovog teorema, koji govori kako niti jedna prebrojiva i potpuna teorija nema, do na izomorfizam, točno dva prebrojiva modela.

3 ω-stabilne teorije i Morleyev teorem

U ovom poglavlju dajemo dokaz Morleyevog teorema. Za to će nam biti potrebni još neki pojmovi, od kojih će centralnu ulogu imati ω-stabilne teorije i nerazlučivi nizovi.

Prisjetimo se izreke Morleyevog teorema: Ako je potpuna prebrojiva teorija T κ-kategorična za neki neprebrojiv kardinal κ, tada je ona λ-kategorična za sve neprebrojive kardinale λ.

Ugrubo govoreći, generalna shema dokaza je sljedeća :

Korak 1. Dokazati da je svaka κ-kategorična teorija ω-stabilna.

Korak 2. Koristeći ω-stabilnost i κ-kategoričnost pronaći dovoljno saturiranih modela, prostih (preciznije konstruktibilnih) modela proizvoljne veličine i nerazlučivih nizova nad neprebrojivim modelima.

Korak 3. Koristeći tehnike iz koraka 2 dokazati teorem.

Kako se dokaz sastoji od tri dijela, to će ova poglavlje biti razdijeljen na tri pragrafa, od kojih će svaki pratiti pojedini korak dokaza.

3.1 Od kategoričnosti do stabilnosti

U ovom paragrafu uvodimo pojam ω-stabilnih teorija koji će igrati ključnu ulogu u sljedećem paragrafu i pokazujemo da je svaka κ-kategorična teorija ω-stabilna. Stabilnost je općenito važno svojstvo i mnoga izučavanja u teoriji modela se rade pod pretpostvkom ω-stabilnosti.

Definicija 3.1. *Potpuna prebrojiva teorija T je ω-stabilna ako je za svaki model $\mathcal{M}$ od T i svaki prebrojiv podskup $A \subseteq M$ skup svih potpunih* 1*-tipova* $S_1(A, \mathcal{M})$ *prebrojiv. (Odnosno, teorija $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ ima najviše prebrojivo potpunih 1-tipova).*

Primijetimo sada da ako je T ω-stabilna tada postoji najviše prebrojivo mnogo potpunih n-tipova od T za sve prirodne brojeve n. Naime, ako je $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ potpuni n-tip od T i $\mathcal{M}$ model od T koji realizira Σ (takav postoji po definiciji tipova), tada postoje $a_1, \ldots, a_n$ iz M koji realiziraju Σ. Očito je $\Sigma(x_1) = \{\phi(x_1, a_2, \ldots, a_n) : \phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma\}$ potpun 1-tip od $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$, za $A = \{a_1, \ldots a_n\}$. Dakle potpunih n-tipova od T nema više nego potpunih 1-tipova od $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$, a tih je najviše prebrojivo.

Za sada nećemo davati primjere ω-stabilnih teorija, jer će to biti mnogo lakše koristeći neke teoreme koji uskoro slijede.

Sljedeći pojam pokazat će se kao koristan u pojedinim dokazima.

Definicija 3.2. *Neka je T_0 teorija u jeziku L_0. Kažemo da T_0 posjeduje Skolemove funkcije ako za svaku L_0-formulu $\phi(x, \overline{y})$, gdje je $\overline{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, postoji n-mjesni funkcijski simbol $f \in L_0$ tako da vrijedi :*

$$T \models \forall \overline{y}(\exists x \phi(x, \overline{y}) \to \phi(f(\overline{y}), \overline{y})).$$

Pokažimo sada da se za svaku teoriju može bez gubitka općenitosti smatrati da posjeduje Skolemove funkcije.

Lema 3.3. *Neka je T teorija u jeziku L. Tada postoji proširenje L_0, jezika L, kardinalnosti najviše $card(L) + \omega$ i L_0-teorija T_0 koja proširuje T i posjeduje Skolemove funkcije.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}$ model od T. Za svaku formulu $\phi(x, \overline{y})$ dodajemo jeziku L novi funkcijski simbol $f_\phi(\overline{y})$. Tako dobiven jezik označimo s L_1. Proširimo $\mathcal{M}$ do L_1-strukture definirajući $f_\phi^{\mathcal{M}}(\overline{b})$ kao elemenat $c \in M$ tako da je $\mathcal{M} \models \phi(c, \overline{b})$, ukoliko takav c postoji, a proizvoljno inače. Opisanu konstrukciju iteriramo, te dobivamo jezike $L \subseteq L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots$ i proširenja $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots$ od $\mathcal{M}$. Neka je L_0 unija svih L_i, gdje je $i \in \mathbb{N}$ i $\mathcal{M}_0$ unija proširenja. Stavimo $T_0 = Th(\mathcal{M}_0)$. Tada je T_0 tražena teorija u jeziku L_0.

Naime, ako je $\phi(x, \overline{y})$ formula u jeziku L_0 tada je ona formula jezika L_n, za neko $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\mathcal{N}$ proizvoljan model od T_0. Tada je, zbog potpunosti, $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$. Dakle dovoljno je provjeriti $\mathcal{M} \models \forall \overline{y}(\exists x \phi(x, \overline{y}) \to \phi(f_\phi(\overline{y}), \overline{y}))$. Neka su $a, \overline{b}$ takvi da je $\mathcal{M} \models \phi(a, \overline{b})$. Međutim tada vrijedi i $\mathcal{M}_k \models \phi(a, \overline{b})$ za neko k. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $k \geq n$. Tada je po konstrukciji $\mathcal{M}_{k+1} \models \phi(f_\phi(\overline{b}), \overline{b})$, pa posebno i $\mathcal{M} \models \phi(f_\phi(\overline{b}), \overline{b})$. □

Sljedeća lema nam daje jedan od razloga zašto su teorije sa Skolemovim funkcijama korisne.

Lema 3.4. *Ako je T teorija koja posjeduje Skolemove funkcije tada je podstruktura svakog modela od T elementarna podstruktura.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}$ podstruktura nekog modela $\mathcal{N}$ teorije T. Pretpostavimo da je $\mathcal{N} \models \exists x \phi(x, \overline{b})$, za neko $\overline{b}$ iz M. Kako teorija T ima Skolemove funkcije, to postoji funkcijski simbol f sa svojstvom $\mathcal{N} \models \phi(f(\overline{b}), \overline{b})$. Kako je $\mathcal{M}$ podstruktura, to je $f(\overline{b}) \in M$. Primjenom Tarski-Vaughtovog testa (propozicija 1.11) zaključujemo da je $\mathcal{M}$ elementarna podstruktura od $\mathcal{N}$. □

Definicija 3.5. *Neka je $\mathcal{M}$ L-struktura, $A \subseteq M$, $(I, <)$ uređen skup i $(b_i : i \in I)$ niz međusobno različitih elemenata u M. Reći ćemo da je $(b_i : i \in I)$ nerazlučiv niz nad A u strukturi $\mathcal{M}$ (u odnosu na $(I, <)$), ako za svako $n < \omega$ i sve $i_1 < \ldots < i_n$, $j_1 < \ldots < j_n$ vrijedi $tp_{\mathcal{M}}((b_{i_1}, \ldots, b_{i_n})/A) = tp_{\mathcal{M}}((b_{j_1}, \ldots, b_{j_n})/A)$.*

Ako je $A = \emptyset$ govorit ćemo samo nerazlučiv niz. Kako će I često biti ordinal α sa uobičajenim uređajem, pisat ćemo $(b_i : i < \alpha)$.

Svakako će nas zanimati kako se "dočepati" nerazlučivih nizova. Sljedeća lema djelomično odgovara na to pitanje.

Lema 3.6. *Neka je $\mathcal{M}$ proizvoljna L-struktura i $(a_i : i < \omega)$ nerazlučiv niz u $\mathcal{M}$. Nadalje, neka je $(I, <)$ uređen skup. Tada postoji L-struktura $\mathcal{N}$ koja sadrži elemente $(b_i : i \in I)$, takva da je $(b_i : i \in I)$ nerazlučiv niz u $\mathcal{N}$, te za sve n i $i_1 < \ldots < i_n \in I$ vrijedi $tp_{\mathcal{N}}(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) = tp_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)$.*

Dokaz. Neka je L' jezik dobiven dodavanjem novih konstantskih simbola $\{b_i : i \in I\} \cup \{a_i : i < \omega\}$ jeziku L. Označimo sa

$$\Omega = \{\phi(a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow \phi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}) : n < \omega, \\ i_1 < \ldots < i_n \in I, \phi \in L\}.$$

Neka je $\Delta = Th(\mathcal{M}) \cup \Omega \cup \{\neg b_i = b_j : i, j \in I, i \neq j\}$. Dovoljno je pokazati da je skup Δ konačno ispunjiv. Naime, tada prema teoremu kompaktnosti postoji L'-struktura $\mathcal{N}$ na kojoj je Δ istinit. Uzmimo sada dva konačna niza $i_1 < \ldots < i_n$, te $j_1 < \ldots < j_n$ iz I. Kako je $\mathcal{N} \models \Delta$, to iz definicije skupa Ω i potpunosti teorije $Th(\mathcal{M})$ slijedi

$$tp_{\mathcal{N}}(b^{\mathcal{N}}_{i_1}, \ldots, b^{\mathcal{N}}_{i_n}) = tp_{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = tp_{\mathcal{N}}(b^{\mathcal{N}}_{j_1}, \ldots, b^{\mathcal{N}}_{j_n}).$$

Zaključujemo da je $(b^{\mathcal{N}}_i : i \in I)$ traženi nerazlučiv niz.

Preostaje nam pokazati da je skup Δ konačno ispunjiv. Međutim, zbog nerazlučivosti niza $(a_i : i < \omega)$ će svaki konačan podskup Δ' od Δ biti ispunjiv u $\mathcal{M}$. Naime, neka su $\phi_1(a_1, \ldots, a_{n_1}) \leftrightarrow \phi_1(b_{1,1}, \ldots, b_{1,n_1}), \ldots, \phi_k(a_1, \ldots, a_{n_k}) \leftrightarrow \phi_k(b_{k,1}, \ldots, b_{k,n_k})$ sve formule iz Ω koje se pojavljuju u Δ'. Kako je elemenata b_j konačno mnogo, to postoje međusobno disjunktni konačni nizovi prirodnih brojeva $i_{1,1} < \ldots < i_{1,n_1}, \ldots, i_{k,1} < \ldots < i_{k,n_k}$. Interpretiramo li sada $b^{\mathcal{M}}_{l,m} = a_{i_{l,m}}$, gdje je $1 \leq l \leq k, 1 \leq m \leq n_l$, iz nerazlučivosti niza $(a_i : i < \omega)$ slijedi da su formule iz Ω koje se nalaze u Δ' istinite u $\mathcal{M}$. Preostale simbole b_i koji se pojavljuju u formulama iz $\Delta' \cap \{\neg b_i = b_j : i \neq j, i, j \in I\}$ interpretiramo međusobno različitim elementima a_i. Kako je tih simbola konačno, te kako je $(a_i : i < \omega)$ beskonačan, to je uvijek moguće učiniti. $\square$

U daljnjem izlaganju trebat će nam neki kombinatorni rezultati. Prvo ustalimo notaciju. Za skup X i $n < \omega$ sa $X^{[n]}$ označavat ćemo skup svih n-članih podskupova od X.

Propozicija 3.7 (Ramseyev teorem). *Neka je $n < \omega$, te X_1 i X_2 dva disjunktna podskupa od $\omega^{[n]}$, takvi da je $X_1 \cup X_2 = \omega^{[n]}$. Tada postoji beskonačan podskup Y od ω, te $i \in \{1, 2\}$ tako da je $Y^{[n]} \subseteq X_i$.*

Premda dokaz nije pretjerano težak ovdje ga ne navodimo iz dva razloga. Kao prvo, rezultat je pretežno kombinatorne prirode i kao takav nije nam od pretjeranog interesa sam po sebi. Nadalje, dokaz je poprilično dugačak i koristi tehniku ultrafiltera, te bi bilo potrebno razraditi i osnovne činjenice o ultrafilterima. Dokaz se može pronaći u [1], teorem 3.3.7, a za potpunu raspravu vidjeti [1], stranice 166 do 169.

Iteriranjem prethodne propozicije dobivamo sljedeće poopćenje :

Napomena 3.8. *Neka su $n_1, \ldots, n_r, r < \omega$, te neka je $X_{i,1}, X_{i,2}$ particija od $\omega^{[n_i]}$, za $i = 1, \ldots, r$. Tada postoji beskonačan podskup Y od ω i brojevi $j_i \in \{1, 2\}$, takvi da je $Y^{[n_i]}$ sadržan u X_{i,j_i}, za $i = 1, \ldots, r$.*

Propozicija 3.9. *Neka je T L-teorija, te neka je za svako n sa $\Sigma_n(x_1, \ldots, x_n)$ označen neki skup L-formula u slobodnim varijablama $x_1, \ldots, x_n$. Pretpostavimo da postoji model $\mathcal{M}$ od T i niz međusobno različitih elemenata $(a_i : i < \omega)$ u M tako da za sve $i_1 < \ldots < i_n < \omega$, $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ realizira $\Sigma_n(x_1, \ldots, x_n)$ u $\mathcal{M}$. Tada postoji model $\mathcal{N}$ od T i nerazlučiv niz $(b_i : i < \omega)$ u $\mathcal{N}$ tako da $(b_1, \ldots, b_n)$ realizira $\Sigma_n(x_1, \ldots, x_n)$, za sve $n < \omega$.*

Dokaz. Neka je L jezik teorije T. Dodavanjem prebrojivo mnogo konstantskih simbola $\{c_i : i < \omega\}$ dobivamo jezik L'. Označimo sa

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \{\phi(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) \leftrightarrow \phi(c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}) : i_1 < \ldots < i_n < \omega, \\ j_1 < \ldots < j_n < \omega, \phi \in L\} \\ \Omega_2 = \cup\{\Sigma_n(c_{i_1}, \ldots, c_{i_n}) : i_1 < \ldots < i_n < \omega\}. \end{aligned}$$

Neka je $\Omega = T \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{\neg c_i = c_j : i, j < \omega, i \neq j\}$. Dovoljno je pokazati da je Ω ispunjiv. Naime, tada će interpretacije konstanti c_i činiti traženi nerazlučiv niz.

Neka je stoga Ω' proizvoljan konačan podskup od Ω. Uzmimo da su $\phi_1(x_1, \ldots, x_{n_1}), \ldots, \phi_r(x_1, \ldots, x_{n_r})$ L-formule iz Ω' koje su u Ω_1. Za $i = 1, \ldots, r$ particionirati ćemo skup $\omega^{[n_i]}$ u dva skupa $X_{i,1}, X_{i,2}$ na sljedeći način: ukoliko je $\mathcal{M} \models \phi_i(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n_i}})$ stavljamo $\{j_1, \ldots, j_{n_i}\} \in X_{i,1}$, u protivnom $\{j_1, \ldots, j_{n_i}\} \in X_{i,2}$. Jasno je da vrijedi $\omega^{[n_i]} = X_{i,1} \cup X_{i,2}$ i da su $X_{i,1}$ i $X_{i,2}$ disjunktni. Neka je Y skup čija egzistencija slijedi iz propozicije 3.8. Označimo $Y = \{s_0, s_1, \ldots\}$, gdje je $s_0 < s_1 < \ldots$. Ako interpretiramo c_i kao a_{s_i} dobivamo traženi model za Ω'. Naime T i Ω_2 će biti ispunjeni po pretpostavci, a Ω_1 po definiciji skupova $X_{i,1}, X_{i,2}$, te svojstva skupa Y. Nadalje, kako su elementi a_i međusobno različiti, to će i c_i biti međusobno različiti (preostale c_i koji se ne pojavljuju u Ω_1 i Ω_2 interpretiramo proizvoljnim međuobno različitim elementima, što zbog konačnosti uvijek možemo učiniti). □

Sljedeći rezultat nam daje pomalo iznenađujuću činjenicu o nerazlučivim nizovima. Naime za teoriju s beskonačnim modelima možemo pronaći proizvoljno duge nerazlučive nizove u nekom modelu od T.

Korolar 3.10. *Neka je T teorija za koju postoji beskonačni model. Tada za svaki kardinal κ postoji model $\mathcal{M}$ od T i skup $(a_i : i < \kappa)$, međusobno različitih elemenata od M, tako da je $(a_i : i < \kappa)$ nerazlučiv niz u $\mathcal{M}$.*

Dokaz. Ako uzmemo da su svi skupovi Σ_n iz propozicije 3.9 prazni, dobivamo egzistenciju prebrojivog nerazlučivog niza u nekom modelu od T. Sada iz leme 3.6 dobivamo egzistenciju proizvoljno dugog nerazlučivog niza. $\square$

Sljedeća propozicija glavni je tehnički rezultat ovog paragrafa.

Propozicija 3.11. *Neka je T prebrojiva teorija i κ proizvoljan neprebrojiv kardinal. Tada postoji model $\mathcal{M}$ od T kardinalnosti κ, takav da je za svaki prebrojiv podskup A od M najviše prebrojivo mnogo tipova iz $S_1(A, \mathcal{M})$ realizirano u $\mathcal{M}$.*

Dokaz. Prema lemi 3.3 postoji prebrojiva teorija T' u jeziku L', koja proširuje T i sadrži Skolemove funkcije. Jasno je kako je dovoljno pokazati tvrdnju za teoriju T'. Neka je $\mathcal{M}$ model od T' kardinalnosti κ i $(b_i : i < \kappa)$ nerazlučiv niz čija egzistencija slijedi iz prethodnog korolara. Zbog leme 3.4 na $\mathcal{M}$ možemo gledati kao na podstrukturu same sebe, generiranu skupom $(b_i : i < \kappa)$. Naime, svaki se element od $\mathcal{M}$ može zapisati kao $t^{\mathcal{M}}(\bar{b})$, za neki L'-term t i neki konačan niz b_i-ova $\bar{b}$. Primijetimo da, pošto je jezik L' prebrojiv, M ima kardinalnost κ.

Uzmimo sada A prebrojiv podskup od M. Za svako $a \in A$ odaberimo jedan term t_a jezika L' i konačan niz $\bar{b}_a$ u skupu $(b_i : i < \kappa)$ takvi da je $a = t_a^{\mathcal{M}}(\bar{b}_a)$. Neka je B skup svih b_i koji se pojavljuju u $\bar{b}_a$, za neko $a \in A$. Tada je B prebrojiv. Nadalje, neka je $I_0 = \{i < \kappa : b_i \in B\}$. Tada je I_0 prebrojiv podskup od κ.

Sada za svako $n \in \mathbb{N}$ definiramo relaciju ekvivalencije E_n na skupu svih n-torki elemenata iz κ. Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_n < \kappa$ i $\beta_1, \ldots, \beta_n < \kappa$. Tada definiramo $E_n((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n))$ ovako :
(i) Za sve $1 \leq i, j \leq n$ vrijedi:

$$\alpha_i < \alpha_j \Leftrightarrow \beta_i < \beta_j$$

$$\text{i}$$

$$\alpha_i = \alpha_j \Leftrightarrow \beta_i = \beta_j.$$

(ii) Za sve $z \in I_0$ i sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi:

$$\alpha_i < z \Leftrightarrow \beta_i < z$$
$$\text{i}$$
$$\alpha_i = z \Leftrightarrow \beta_i = z.$$

Lako je provjeriti da je E_n doista relacija ekvivalencije. Primijetimo da, zbog dobre uređenosti od κ, postoji najviše prebrojivo mnogo klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju E_n.

Neka vrijedi $E_n((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_n))$ i neka je $s(x_1, \ldots, x_n)$ L'-term. Tada je $tp_{\mathcal{M}}(s(b_{\alpha_1}, \ldots, b_{\alpha_n})/A) = tp_{\mathcal{M}}(s(b_{\beta_1}, \ldots, b_{\beta_n})/A)$.

Tvrdnja slijedi iz nekoliko činjenica. Prvo, uočimo da se svaki element od A može prikazati kao $t(\overline{b})$, za neki L'-term t i neki $\overline{b} \in B$. Međutim, iz definicije od E_n i nerazlučivosti niza $(b_i : i < \kappa)$ imamo da za sve $\overline{b} \in B$ vrijedi $tp_{\mathcal{M}}(b_{\alpha_1}, \ldots, b_{\alpha_n}, \overline{b}) = tp_{\mathcal{M}}(b_{\beta_1}, \ldots, b_{\beta_n}, \overline{b})$, odnosno da vrijedi tražena tvrdnja.

Kako postoji samo prebrojivo mnogo L' terama i kako je broj E_n klasa ekvivalencije prebrojiv za svako n, to , uzimajući u obzir dokazanu tvrnju, najviše prebrojivo mnogo različitih tipova nad A može biti realizirano u $\mathcal{M}$. $\square$

Sada smo u stanju završiti prvi korak u dokazu Morleyevog teorema.

Teorem 3.12. *Neka je T potpuna prebrojiva teorija. Ako je T κ-kategorična za neki neprebrojiv kardinal κ, tada je T ω-stabilna.*

Dokaz. Pretpostavimo da T nije ω-stabilna. Tada postoji model $\mathcal{M}$ od T i prebrojiv podskup $A \subseteq M$ tako da je $S_1(A, \mathcal{M})$ neprebrojiv. Kako su svi modeli potpune teorije elementarno ekvivalentni, to možemo pronaći elementarno proširenje $\mathcal{N}$ od $\mathcal{M}$ koje realizira sve tipove iz $S_1(A, \mathcal{M})$. Koristeći Löwenheim skolmov teorem možemo naći, u ovisnosti o kardinalnosti od N, ili elementarnu podstrukturu ili elementarno proširenje $\mathcal{N}'$ od $\mathcal{N}$ koja ima kardinalnost κ, sadrži A i koja realizira neprebrojivo mnogo potpunih 1-tipova nad A. Prema prethodnoj propoziciji postoji model $\mathcal{N}''$ od T kardinalnosti κ, koji realizira prebrojivo mnogo potpunih 1-tipova nad A. Međutim tada $\mathcal{N}'$ i $\mathcal{N}''$ ne mogu biti izomorfni, pa teorija T nije κ-kategorična. $\square$

Imajući na umu prethodne rezultate lako nam je dati neke primjere ω-stabilnih teorija.

Primjer 3.13. *Teorija beskonačnih skupova iz primjera 1.4. je ω-stabilna. Naime, ona je κ-kategorična za sve neprebrojive kardinale κ.*

3.2 Neka svojstva ω-stabilnih teorija

Kao što smo najavili, u ovom paragrafu razmatramo drugi korak potreban za dokaz Morleyevog teorema. Prvi cilj nam je pronaći "dovoljno" saturiranih modela. Pojam Morleyevog ranga proizvoljne formule u odnosu na neku strukturu, koji sada uvodimo, će nam to omogućiti.

Definicija 3.14. *Neka je T potpuna teorija, $n < \omega$, $\mathcal{M}$ model od T, te $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ formula sa slobodnim varijablama $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i parametrom $\overline{a}$ iz M. Prvo induktivno definiramo što znači da je Morleyev rang, u oznaci $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$, veći ili jednak α, pri čemu je α ordinal :*
(i) $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq 0$ ako je $\mathcal{M} \models \exists\overline{x}(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$.
(ii) Ako je δ granični ordinal definiramo $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \delta$ ako vrijedi $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha$, za sve $\alpha < \delta$.
(iii) $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha + 1$ ako postoji elementarno proširenje $\mathcal{N}$ od $\mathcal{M}$ i formule $\psi_j(\overline{x}, \overline{b}_j)$, za sve $j < \omega$, sa parametrima $\overline{b}_j$ iz N tako da vrijedi :
(a) $\mathcal{N} \models \exists\overline{x}(\psi_j(\overline{x}, \overline{b}_j) \to \phi(\overline{x}, \overline{a}))$, za sve $j < \omega$,
(b) $RM_n^{\mathcal{M}}(\psi(\overline{x}, \overline{b}_j)) \geq \alpha$, za sve $j < \omega$, te
(c) $\mathcal{N} \models \neg\exists\overline{x}(\psi_i(\overline{x}, \overline{b}_i) \wedge \psi_j(\overline{x}, \overline{b}_j))$, za sve $i \neq j$.
Sada definiramo da je Morleyev rang formule ϕ u odnosu na strukturu $\mathcal{M}$ jednak ordinalu α, u oznaci $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = \alpha$, ako i samo ako je α najveći ordinal za kojeg vrijedi $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha$. Ukoliko takav ne postoji definiramo $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = \infty$.

Često ćemo pisati $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$, kada su n i struktura $\mathcal{M}$ jasni iz konteksta, ili $RM^{\mathcal{M}}(\phi)$, ako nam je bitno naglasiti u kojoj strukturi promatramo Morleyev rang.

Bilo bi nam korisno za daljnja razmatranja da $RM_n^{\mathcal{M}}(-)$ zapravo ovisi samo o $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$. To općenito nije istina, no sljedeća lema pokazat će nam kako željena tvrdnja vrijedi za ω-saturirane modele. Daljnje dvije leme pokazuju da je Morleyev rang očuvan (odnosno jednak) u svaka dva elementarna ω-saturirana proširenja dane strukture. Kako smo pokazali da svaka struktura ima ω-saturirano elementarno proširenje (2.12), to ćemo ubuduće pretpostavljati da Morleyev rang promatramo na ω-saturiranim strukturama.

Neka je T teorija u jeziku L, $\phi(\overline{x})$ L-rečenica i $\mathcal{M}$ model od T. Sa $\phi(\mathcal{M})$ označavamo $\{\overline{a} \in M : \mathcal{M} \models \phi[\overline{a}]\}$. Ako formula $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ koristi parametre $\overline{a}$, umjesto $\phi((\mathcal{M}, a)_{a \in \overline{a}})$ još ćemo pisati i $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$.

Uočimo sada da uvjete (i) i (iii) iz definicije Morleyevog ranga možemo iskazati na sljedeći način :
(i) $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq 0$ ako i samo ako je $\phi(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.
(iii) $RM_n^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha + 1$ ako i samo ako postoji prebrojivo mnogo L_M-formula $\psi_1(\overline{x}), \psi_2(\overline{x}), \ldots$, takvih da su skupovi $\psi_1(\mathcal{M}), \psi_2(\mathcal{M}), \ldots$ u parovima

disjunktni (uvjet (c)) podskupovi od $\phi(\mathcal{M})$ (uvjet (a)) i vrijedi $RM(\psi_i(\overline{x})) \geq \alpha$, za sve $i < \omega$.

Lema 3.15. *Neka je T potpuna teorija, $\mathcal{M}$ ω-saturiran model od T, te $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ formula. Ako su $\overline{a}, \overline{b}$ iz M takvi da je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{b})$, tada je $RM^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = RM^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x}, \overline{b}))$.*

Dokaz. Transfinitnom indukcijom po α pokazujemo da vrijedi $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha$ ako i samo ako je $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha$.

Kako je $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{b})$, to je očito $\phi(\mathcal{M}, \overline{a}) = \emptyset$ ako i samo ako je $\phi(\mathcal{M}, \overline{b}) = \emptyset$. Dakle $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq 0$ ako i samo ako $RM(\phi(\overline{x}, \overline{b})) \geq 0$.

Pretpostavimo sada da je α granični ordinal i da tvrdnja vrijedi za sve $\beta < \alpha$. Tada imamo :

$$\begin{aligned} RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha &\Leftrightarrow RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \beta, \text{za sve } \beta < \alpha \\ &\Leftrightarrow RM(\phi(\overline{x}, \overline{b})) \geq \beta, \text{za sve } \beta < \alpha, \text{po pretpostavci} \\ &\Leftrightarrow RM(\phi(\overline{x}, \overline{b})) \geq \alpha. \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki ordinalni broj α i da je $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha + 1$. Tada postoje L_M-formule $\psi_1(\overline{x}), \psi_2(\overline{x}), \ldots$, takve da je $\psi_1(\mathcal{M}), \psi_2(\mathcal{M}), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$ i da je za svako i $RM(\psi_i(\overline{x})) \geq \alpha$. Neka su $\chi_i(\overline{x}, y_1, \ldots, y_{m_i})$ L-formule i $\overline{c}_i \in M^{m_i}$ takvi da je $\psi_i(\overline{x}) = \chi_i(\overline{x}, \overline{c}_i)$. Kako je $\mathcal{M}$ ω-saturirana, to je ona i ω-homogena (lema 2.8), pa postoje $\overline{d}_1, \overline{d}_2, \ldots$ takvi da je :

$$tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_m) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{b}, \overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_m)$$

za sve $m < \omega$. Međutim, tada je $\chi_1(\mathcal{M}, \overline{d}_1), \chi_2(\mathcal{M}, \overline{d}_2), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{M}, \overline{b})$, te prema pretpostavci indukcije vrijedi $RM(\chi_i(\overline{x}, \overline{d}_i)) \geq \alpha$. Dakle $RM(\phi(\overline{x}, \overline{b})) \geq \alpha + 1$.

Analogno bismo pokazali da iz $RM(\phi(\overline{x}, \overline{b})) \geq \alpha + 1$ slijedi $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha + 1$.

Dakle pokazali smo da je $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \geq \alpha$ ako i samo ako je $RM(\phi(\overline{x}, \overline{b})) \geq \alpha$, za sve ordinale α. Dakle imamo :

$$RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = RM(\phi(\overline{x}, \overline{b})).$$

□

Lema 3.16. *Pretpostavimo da su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dva ω-saturirana modela teorije T i da je $\mathcal{M}$ elementarna podstruktura od $\mathcal{N}$. Tada za svaku L_M-formulu $\phi(\overline{x})$ vrijedi $RM^{\mathcal{M}}(\phi(\overline{x})) = RM^{\mathcal{N}}(\phi(\overline{x}))$.*

Dokaz. Kao i u prethodnoj lemi indukcijom po α dokazujemo da vrijedi $RM^{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha$ ako i samo ako $RM^{\mathcal{N}}(\phi) \geq \alpha$.

Kako je $\mathcal{M}$ elementarna podstruktura od $\mathcal{N}$, to vrijedi $\phi(\mathcal{M}) = \emptyset$ ako i samo ako $\phi(\mathcal{N}) = \emptyset$. Dakle $RM^{\mathcal{N}}(\phi) \geq 0$ ako i samo ako $RM^{\mathcal{N}}(\phi) \geq 0$.

Pretpostavimo sada da je α granični ordinal. Tada imamo:

$$\begin{aligned} RM^{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha &\Leftrightarrow RM^{\mathcal{M}}(\phi) \geq \beta, \text{za sve } \beta < \alpha \\ &\Leftrightarrow RM^{\mathcal{N}}(\phi) \geq \beta, \text{za sve } \beta < \alpha, \text{po pretpostavci} \\ &\Leftrightarrow RM^{\mathcal{N}}(\phi) \geq \alpha. \end{aligned}$$

Uzmimo sada da je $RM^{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha+1$. Tada postoje L_M-formule $\psi_1, \psi_2, \ldots$, takve da je $\psi_1(\mathcal{M}), \psi_2(\mathcal{M}), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{M})$ koji zadovoljava $RM^{\mathcal{M}}(\psi_i) \geq \alpha$, za sve $i < \omega$. Prema pretpostavci indukcije $RM^{\mathcal{N}}(\psi_i) \geq \alpha$. Nadalje, kako je $\mathcal{M}$ elementarna podstruktura od $\mathcal{N}$, to je i $\psi_(\mathcal{N}), \psi_2(\mathcal{N}), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{N})$, pa vrijedi $RM^{\mathcal{N}}(\phi) \geq \alpha + 1$.

Obratno, neka je $RM^{\mathcal{N}}(\phi) \geq \alpha+1$. Tada postoji niz L_N-formula $\psi_1, \psi_2, \ldots$ takvih da je $\psi_1(\mathcal{N}), \psi_2(\mathcal{N}), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{N})$ i da je $RM^{\mathcal{N}}(\psi_i) \geq \alpha$, za sve i. Neka je $\overline{a}$ konačan niz koji sadrži sve parametre iz M koji se pojvljuju u formuli ϕ. Neka su $\chi_i(\overline{x}, \overline{y})$ L-formule i $\overline{b}_i$ iz N takvi da je $\psi_i(\overline{x}) = \chi_i(\overline{x}, \overline{b}_i)$. Zbog ω-saturiranosti od $\mathcal{M}$ i jer je $tp_{\mathcal{N}}(\overline{a}, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_m)$ potpuni tip od T postoje $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots$ iz M takvi da je

$$tp_{\mathcal{N}}(\overline{a}, \overline{b}_1, \ldots, \overline{b}_m) = tp_{\mathcal{M}}(\overline{a}, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_m) = tp_{\mathcal{N}}(\overline{a}, \overline{c}_1, \ldots, \overline{c}_m)$$

za sve $m < \omega$. Prema prethodnoj lemi je $RM^{\mathcal{N}}(\chi_i(\overline{x}, \overline{c}_i)) \geq \alpha$, pa je prema pretpostavci indukcije $RM^{\mathcal{M}}(\chi(\overline{x}, \overline{c}_i)) \geq \alpha$. Dakle je i $RM^{\mathcal{M}}(\phi) \geq \alpha + 1$.

Zaključujemo da je $RM^{\mathcal{M}}(\phi) = RM^{\mathcal{N}}(\phi)$ □

Lema 3.17. *Pretpostavimo da je $\mathcal{M}$ model od T, ϕ L_M-formula, te $\mathcal{N}_0$ i $\mathcal{N}_1$ ω-saturirana elementarna proširenja od $\mathcal{M}$. Tada je $RM^{\mathcal{N}_0}(\phi) = RM^{\mathcal{N}_1}(\phi)$.*

Dokaz. Lako je dokazati da postoji $\mathcal{N}_2$, zajedničko elementarno proširenje od $\mathcal{N}_0$ i $\mathcal{N}_1$ (vidjeti [6] 2.5.11). Neka je $\mathcal{N}_3$ ω-saturirano elementarno proširenje od $\mathcal{N}_2$ čija egzistencija slijedi iz 2.12. Prema 3.16 je $RM^{\mathcal{N}_0}(\phi) = RM^{\mathcal{N}_3}(\phi) = RM^{\mathcal{N}_1}(\phi)$. □

Sljedeća lema daje nekoliko osnovnih svojstava Morleyevog ranga.

Lema 3.18. *Neka je $\mathcal{M}$ ω-saturiran model potpune teorije T. Tada vrijedi :*

(i) Ako je $\mathcal{M} \models \phi(\overline{x}, \overline{a}) \to \psi(\overline{x}, \overline{b})$, tada je $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) \leq RM(\psi(\overline{x}, \overline{b}))$.

(ii) $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a}) \vee \psi(\overline{x}, \overline{b})) = max\{RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})), RM(\psi(\overline{x}, \overline{b}))\}$

(iii) Pretpostavimo da je skup $\phi(\mathcal{M}, \overline{a}) \neq \emptyset$. Tada je $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = 0$ ako i samo ako je skup $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$ konačan.

Dokaz. (i) Transifinitnom indukcijom po α, slično kao u 3.15 i 3.16, lako se pokazuje da iz $RM(\phi(\overline{x},\overline{a})) \geq \alpha$ slijedi $RM(\psi(\overline{x},\overline{a})) \geq \alpha$.
(ii) Primijetimo da iz (i) slijedi $RM(\psi \vee \phi) \geq max\{RM(\phi), RM(\psi)\}$. Za obratnu nejednakost indukcijom po α pokazujemo da iz $RM(\phi \vee \psi) \geq \alpha$ slijedi da je $RM(\phi) \geq \alpha$ ili $RM(\psi) \geq \alpha$.

Ako je $RM(\phi \vee \psi) \geq 0$, tada postoji $\overline{c} \in M$ takav da je $\mathcal{M} \models (\phi \vee \psi)[\overline{c}]$. Tada je $\mathcal{M} \models \phi[\overline{c}]$ ili $\mathcal{M} \models \psi[\overline{c}]$, odnosno $RM(\phi) \geq 0$ ili $RM(\psi) \geq 0$.

Pretpostavimo sada da je α granični ordinal i da je $RM(\phi \vee \psi) \geq \alpha$. Tada je posebno $RM(\phi \vee \psi) \geq \nu$, za sve $\nu < \alpha$. Ako postoji $\nu < \alpha$ takav da je $RM(\phi) \geq \mu$ za sve $\nu \leq \mu < \alpha$, tada je $RM(\phi) \geq \alpha$. U protivnome za svaki $\nu < \alpha$ postoji $\mu \geq \nu$, $\mu < \alpha$ za koji $RM(\phi) \ngeq \mu$. Po pretpostavci indukcije $RM(\psi) \geq \mu$, pa i $RM(\psi) \geq \nu$. Kako je ν proizvoljam vrijedi $RM(\psi) \geq \alpha$.

Neka je sada $RM(\phi \vee \psi) \geq \alpha+1$. Tada postoje L_M-formule $\eta_1, \eta_2, \ldots$ takve da je $\eta_1(\mathcal{M}), \eta_2(\mathcal{M}), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $(\phi \vee \psi)(\mathcal{M})$ za koje je $RM(\eta_i) \geq \alpha$. Označimo sa $\phi_i = \phi \wedge \eta_i$, te $\psi_i = \psi \wedge \eta_i$. Prema pretpostavci indukcije za svako i je $RM(\phi_i) \geq \alpha$ ili $RM(\psi_i) \geq \alpha$. Dakle vrijedi $RM(\phi_i) \geq \alpha$ ili $RM(\psi_i) \geq \alpha$ za prebrojivo mnogo $i < \omega$. U prvom slučaju je očito $RM(\phi) \geq \alpha + 1$, a u drugom $RM(\psi) \geq \alpha + 1$.
(iii) Kako je $\phi(\mathcal{M}, \overline{a}) \neq \emptyset$, to je $RM(\phi(\overline{x},\overline{a})) \geq 0$.

Pretpostavimo da je $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$ konačan. Kada bi postojale L_M-formule $\psi_1, \psi_2, \ldots$ takve da je $\psi_1(\mathcal{M}), \psi_2(\mathcal{M}), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$ i da je $RM(\psi_i) \geq 0$, morao bi $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$ biti beskonačan ($RM(\psi_i) \geq 0$ povlači $\psi_i(\mathcal{M}) \neq \emptyset$). Dakle $RM(\phi(\overline{x},\overline{a})) \ngeq 1$, odnosno $RM(\phi(\overline{x},\overline{a})) = 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$ beskonačan i neka je $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots$ niz međusobno različitih elemenata iz $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$. Označimo sa $\psi_i(\overline{x}) = \phi(\overline{x}, \overline{a}) \wedge \overline{x} = \overline{a}_i$. Tada je očito $\psi_1(\mathcal{M}), \psi_2(\mathcal{M}), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$ za koje je $RM(\psi_i) \geq 0$ (naime $\mathcal{M} \models \psi_i[\overline{a}_i]$), odnosno $RM(\phi(\overline{x},\overline{a})) \geq 1$. $\square$

Uočimo da iz tvrdnje (i) prethodne leme posebno slijedi da je za svake dvije formule ϕ, ψ $RM(\phi \wedge \psi) \leq min\{RM(\phi), RM(\psi)\}$. Ovu tvrdnju ćemo nadalje koristiti bez posebnog isticanja.

Još uvodimo i pojam Morleyevog stupnja, čiju egzistenciju daje sljedeća lema.

Lema 3.19. *Neka je $\mathcal{M}$ ω-saturiran model potpune teorije T, te $\phi(\overline{x}, \overline{a})$ formula s parametrima iz M, takva da je $RM(\phi(\overline{x}, \overline{a})) = \alpha$. Tada postoji najveći prirodni broj d i formule $\psi_i(\overline{x}, \overline{b}_i)$, sa parametrima iz M, za sve $i < d$, takvi da je $RM(\psi_i(\overline{x}, \overline{b}_i)) = \alpha$ za sve $i < d$, te su skupovi $\psi_1(\mathcal{M}, \overline{b}_1), \ldots \psi_d(\mathcal{M}, \overline{b}_i)$ u parovima disjunktni podskupovi od $\phi(\mathcal{M}, \overline{a})$. Broj d nazivamo Morleyev stupanj od $\phi(\overline{x}, \overline{a})$, u oznaci $dM(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$. Nadalje, kao i za Morleyev rang vrijedi da $dM(\phi(\overline{x}, \overline{a}))$ ovisi samo o $tp_{\mathcal{M}}(\overline{a})$.*

Dokaz. Konstruirat ćemo skup $S \subseteq 2^{<\omega}$, skup konačnih nizova nula i jedinica i skup formula $\{\phi_\sigma : \sigma \in S\}$ sa sljedećim svojstvima :

(i) Ako je $\sigma \in S$ i $\tau \subseteq \sigma$, tada je $\tau \in S$.

(ii) $\phi_\emptyset = \phi$.

(iii) $RM(\phi_\sigma) = \alpha$, za sve $\sigma \in S$.

(iv) Ako je $\sigma \in S$ razmatramo dva slučaja. Ukoliko postoji L_M-formula ψ takva da je $RM(\phi_\sigma \wedge \psi) = \alpha$ i $RM(\phi_\sigma \wedge \neg\psi) = \alpha$ tada su $(\sigma, 0)$ i $(\sigma, 1)$ sadržani u S i $\phi_{(\sigma,0)} = \phi_\sigma \wedge \psi$, te $\phi_{(\sigma,1)} = \phi_\sigma \wedge \neg\psi$. U protivnom niti jedan $\tau \supseteq \sigma$ nije sadržan u S.

S konstruiramo stavivši $\emptyset \in S$ i ispunjavajući (ii) i (iii), a nadalje prema uvjetu (iv). Primijetimo da će tako svi uvjeti biti ispunjeni, te da je S binarno stablo. Tvrdimo da je skup S konačan. U protivnom bi, prema Königovoj lemi (vidjeti primjerice [6], A.21) postojala funkcija $f : \omega \to 2$, za koju je restikcija $f|_n \in S$, za sve $n < \omega$. Označimo sa $\psi_i = \phi_{f|_n} \wedge \neg\phi_{f|_{i+1}}$. Tada je $RM(\phi_i) = \alpha$ za sve i, te je $\psi_1(\mathcal{M}), \psi_2(\mathcal{M}), \ldots$ beskonačan niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{M})$, odnosno $RM(\phi) \geq \alpha + 1$, što je nemoguće.

Neka je $S_0 = \{\sigma \in S : \tau \notin S, \text{ za sve } \tau \supseteq \sigma\}$ skup svih listova stabla S. Stavimo $d = card(S_0)$ i neka je $\psi_1, \ldots, \psi_d$ niz u kojem se sve formule skupa $\{\phi_\sigma : \sigma \in S_0\}$ pojavljuju točno jednom. Tada je $RM(\phi_i) = \alpha$, $\phi(\mathcal{M})$ disjunktna unija skupova $\psi_1(\mathcal{M}), \ldots, \psi_d(\mathcal{M})$, te ne postoji formula χ takva da vrijedi $RM(\psi_i \wedge \chi) = RM(\psi_i \wedge \neg\chi) = \alpha$, za neko i.

Pokazujemo da je d najmanji takav, odnosno da zadovoljava tvrdnju leme. Neka je $\theta_1, \ldots \theta_n$ niz L_M-formula Morleyevog ranga α, takvih da je $\theta_1(\mathcal{M}), \ldots, \theta_n(\mathcal{M})$ niz u parovima disjunktnih podskupova od $\phi(\mathcal{M})$. Tvrdimo da je $d \leq n$. Prema izboru formula $\psi_1, \ldots, \psi_d$, za svako $i \leq d$ postoji najviše jedan $j \leq n$ takav da je $RM(\psi_i \wedge \theta_j) = \alpha$. Kada bi bilo $n > d$, tada bi postojao $j' \leq n$ takav da je $RM(\psi_i \wedge \theta_{j'}) < \alpha$, za sve $i \leq d$. Međutim, kako vrijedi

$$\mathcal{M} \models \theta_{j'} \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{d} \phi_i \wedge \theta_{j'},$$

to je prema lemi 3.18(i) $RM(\theta_{j'}) < \alpha$, što je kontradikcija. □

Pokažimo sada da je ω-stabilnost zapravo ekvivalentna tome da je Morleyev rang definiran za sve formule.

Propozicija 3.20. *Neka je T potpuna prebrojiva teorija. Ekvivalentno je :*
(i) T je ω-stabilna.
(ii) Za svaki model $\mathcal{M}$ od T i L_M-formulu $\phi(\overline{x})$ je $RM(\phi(\overline{x})) < \infty$.
(iii) Za svaki $\lambda \geq \omega$, model $\mathcal{M}$ od T i podskup $A \subseteq M$ takav da je $card(A) \leq \lambda$ je skup $S_1(A, \mathcal{M})$ kardinalnosti najviše λ. (Kažemo da je T λ-stabilna.)

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$ Neka je $\mathcal{M}$ model od T. Kako je T ω-stabilna, to je potpunih jedan tipova nad prebrojivim skupovima prebrojivo mnogo. Koristeći lemu 3.15 zaključujemo da postoji ordinal γ takav da za svaku formulu $\phi(\overline{x})$ sa parametrima iz M vrijedi da $RM(\phi(\overline{x})) \geq \gamma$ povlači $RM(\phi(\overline{x})) = \infty$. Možemo također pretpostaviti da je $\mathcal{M}$ ω-saturiran (2.12 i potpunost od T). Ako je $\phi(\overline{x})$ formula takva da je $RM(\phi(\overline{x})) = \infty$, tada po definiciji (i svojstvu ordinala γ) postoje formule $\psi_1(\overline{x}), \psi_2(\overline{x})$, čiji je Morleyev rang također ∞, takve da je $\mathcal{M} \models \neg\exists\overline{x}(\psi_1(\overline{x}) \wedge \psi_2(\overline{x}))$. Iterirajući ovu konstrukciju (prvo na ψ_1, ψ_2 itd.) dobivamo L_M-formule $\psi_\eta(\overline{x})$, za $\eta \in 2^\omega$, takve da vrijedi : ako je η početni dio od τ tada $\mathcal{M} \models \psi_\tau(\overline{x}) \rightarrow \psi_\eta(\overline{x})$, te da su za svako η formule $\psi_{\eta 0}(\overline{x}), \psi_{\eta 1}(\overline{x})$ međusobno inkonzistentne, odnosno ne postoji $\overline{a} \in M$ tako da je $\mathcal{M} \models (\psi_{\eta 0} \wedge \psi_{\eta 1})[\overline{a}]$. Označimo sa A skup svih parametara iz M koji se pojavljuju u formulama ψ_η. Za svako $\tau \in 2^\omega$ se tip $\{\psi_{\tau|j}(\overline{x}) : j < \omega\}$, gdje $\tau|j$ oznčava početni komad od τ duljine j, može proširiti do potpunog n-tipa $p_\tau(\overline{x})$ od $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in M}$. Međutim, kako za $\tau_1 \neq \tau_2$ vrijedi $p_{\tau_1} \neq p_{\tau_2}$, to smo konstuirali 2^ω potpunih tipova nad prebrojivim skupom, što je u kontradikciji s ω stabilnosti od T.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Neka je $\mathcal{M}$ model od T kardinalnosti λ. Pokazat ćemo da je $S_1(M)$, tj. $S_1(Th(\mathcal{M}, a)_{a \in M})$ kardinalnosti najviše λ. Za svako $p(x) \in S_1(M)$ neka je $\phi_p(x) \in p(x)$ formula takva da je $(RM(\phi(x)), dM(\phi(x)))$ najmanji mogući (misli se u leksikografskom uređaju, odnosno, prvo minimiziramo Morleyev rang, a potom Morleyev stupanj).
Tvrdnja :Neka je $p(x) \in S_1(M)$ i neka je $RM(\phi_p) = \alpha$, te $dM(\phi_p) = d$. Tada za svaku L_M-formulu $\psi(x)$ vrijedi : $\psi(x) \in p(x)$ ako i samo ako $RM(\phi_p(x) \wedge \psi(x)) = \alpha$ i $dM(\phi_p(x) \wedge \psi(x)) = d$.
Implikacija s lijeva na desno slijedi iz definicije. Pretpostavimo sada da vrijedi desna strana i da $\psi(x) \notin p$. Tada je $\neg\psi(x) \in p$, pa je $RM(\phi_p(x) \wedge \neg\psi(x)) = \alpha$. Tada vrijedi $dM(\phi_p(x) \wedge \psi(x)) \geq 1$, što povlači $dM(\phi_p(x)) \geq d + 1$. Time smo dobili željenu kontradikciju, odnosno vrijedi tvrdnja.

Zaključujemo da je svaki $p \in S_1(M)$ određen sa $\phi_p(x)$, odnosno $\phi_p = \phi_q$ povlači $p = q$. Kako postoji najviše λ L_M-formula, to postoji i najviše λ

tipova u $S_1(M)$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Ova implikacija je očita. $\square$

Sada smo u stanju dobiti željene rezultate o saturiranim modelima.

Propozicija 3.21. *Neka je prebrojiva i potpuna teorija T ω-stabilna. Tada za svaki kardinal κ i regularni cardinal $\lambda \leq \kappa$, T ima λ-saturirani model kardinalnosti κ.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}_0$ model od T kardinalnosti κ. Koristeći svojstvo 3.20(iii) možemo konstruirati elementarni lanac $(\mathcal{M}_\alpha : \alpha < \lambda)$, modela od T kardinalnosti κ, sa svojstvom da su svi tipovi u $S_1(M_\alpha)$ realizirani u $M_{\alpha+1}$. Kako smo takve konstrukcije detaljno raspisivali u prethodnom poglavlju, ovdje ih ne navodimo (vidjeti primjerice 2.12). Neka je $\mathcal{M}$ unija tako dobivenog lanca. Tada je $\mathcal{M}$ kardinalnosti κ. Ostaje pokazati da je $\mathcal{M}$ λ-saturiran.

Uzmimo $A \subseteq M$ kardinalnosti strogo manje od λ. Kako je λ regularan, to je $A \subseteq M_\alpha$, za neko $\alpha < \lambda$ (također vidjeti 2.12). Međutim, tada će svaki potpuni tip nad A biti reliziran u $\mathcal{M}_{\alpha+1}$, pa dakle i u $\mathcal{M}$. Zaključujemo da je $\mathcal{M}$ λ-saturiran. $\square$

Korolar 3.22. *Neka je potpuna prebrojiva teorija T κ-kategorična za neki neprebrojiv kardinal κ. Tada T ima saturirani model kardinalnosti κ.*

Dokaz. Prema 3.12 T je ω-stabilna. Ako je κ regularan rezultat slijedi iz prethodne propozicije, uzimajuću $\lambda = \kappa$. Ako κ nije regularan, tada je κ granični kardinal (znamo da su svi sljedbenici regularni). Međutim, za svako $\lambda < \kappa$ je λ^+ regularan, pa prema 3.21 T ima model kardinalnosti κ koji je λ^+-saturiran. Kako je T κ-kategorična, to vrijedi i da je svaki model od T kardinalnosti κ λ^+-saturiran, za sve $\lambda < \kappa$. No tada je i κ-saturiran. $\square$

Sljedeći cilj koji želimo postići je egzistencija konstruktibilnih modela nad proizvoljnim skupovima.

Definicija 3.23. *Neka je $\mathcal{M}$ L-struktura i $A \subseteq M$. Reći ćemo da je $\mathcal{M}$ konstruktibilna nad A ako postoji ordinal γ i niz $\{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ u M, takvi da je $M = A \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ i za sve $\beta < \gamma$ je tip $tp_\mathcal{M}(b_\beta / A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\})$ izoliran u $S_1(A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\}, \mathcal{M})$.*

Napomena 3.24. *Neka je $\mathcal{M}$ konstruktibilna nad A i $\{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ niz iz definicije konstruktibilnosti. Za svako $\beta < \gamma$ je po definiciji $tp_\mathcal{M}(b_\beta / A \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\})$ izoliran tip, pa postoji formula $\phi(x)$ sa parametrima iz $A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\}$, koja ga izolira. Jasno je da se $\phi(x)$ može napisati kao $\phi'(x, \overline{b})$, gdje je $\phi'(x, \overline{y})$ L_A-formula, a $\overline{b}$ konačan niz u skupu $\{b_\alpha : \alpha < \beta\}$. Jasno je i da $\phi'(x, \overline{b})$ također izolira i $tp_\mathcal{M}(b_\beta / A \cup \{\overline{b}\})$. Govorit ćemo da je $tp_\mathcal{M}(b_\beta / A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\})$ izoliran nad $A \cup \{\overline{b}\}$.*

Lema 3.25. *Neka je L-struktura $\mathcal{M}$ konstruktibilna nad A. Tada je za svaki konačan niz $\bar{c}$ iz M tip $tp_{\mathcal{M}}(\bar{c}/A)$ izoliran. Dakle, $\mathcal{M}$ je atomarna struktura.*

Dokaz. Zapišimo M kao $A \cup \{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$, kao u definiciji 3.23. Iz definicije je jasno da možemo pretpotaviti da su b_α međusobno različiti i da nisu elementi od A. Označimo $B_\beta = A \cup \{b_\alpha : \alpha < \beta\}$. Niz $(b_{\beta_1}, \ldots, b_{\beta_n})$ ćemo nazivati dobar niz, ukoliko je $\beta_1 < \ldots, < \beta_n$ i za sve $i = 1, \ldots, n$ vrijedi da je $tp_{\mathcal{M}}(b_{\beta_i}/B_{\beta_i})$ izoliran nad $A \cup \{b_{\beta_1}, \ldots, b_{\beta_{i-1}}\}$. Iterirajući lemu 2.28 (dodajući element po element) zaključujemo da ako je $\bar{b}$ dobar niz, tada je $tp_{\mathcal{M}}(\bar{b}/A)$ izoliran.
<u>*Tvrdnja* :</u> Za svaki konačan niz $\bar{c}$ iz $\{b_\alpha : \alpha < \gamma\}$ postoji dobar niz koji ga sadrži.
Indukcijom po $\beta < \gamma$ pokazujemo da se svaki konačan niz $\bar{c}$ iz $B_\beta \backslash A$ može proširiti do dobrog niza u $B_\beta \backslash A$. Jedini zanimljiv slučaj je kada promatramo ordinal sljedbenik. Pretpostavimo stoga da je $\bar{c}$ konačan niz u $B_{\beta+1} \backslash A$ i da tvrdnja vrijedi za sve ordinale manje ili jednake od β. Možemo pretpostaviti da je b_β sadržn u $\bar{c}$ (u protivnom imamo niz u $B_\beta \backslash A$, pa tvrdnja slijedi iz pretpostavke). Neka je $\bar{b}$ konačan niz takav da je $tp_{\mathcal{M}}(b_\beta/B_\beta)$ izoliran nad $A \cup \bar{b}$ (napomena 3.24). Označimo sada $\bar{c}' = \bar{c} \backslash \{b_\beta\}$ i $\bar{c}'' = \bar{b}\bar{c}'$. Tada je $\bar{c}''$ konačan niz sadržan u $B_\beta \backslash A$, pa je po pretpostavci indukcije sadržan u nekom dobrom nizu $\bar{d}$. Tada je jasno da je $(\bar{d}, b_\beta)$ dobar niz u $B_{\beta+1} \backslash A$ koji proširuje $\bar{c}$.
Koristeći upravo dokazanu tvrdnju pokazujemo da vrijedi tvrdnja leme. Neka je $\bar{c}$ konačan niz iz M. Ponovno možemo pretpostaviti da $\bar{c}$ ne sadrži elemente iz A. Prema upravo dokazanoj tvrdnji postoji dobar niz $\bar{c}'$ koji proširuje $\bar{c}$. Kako smo već napomenuli, tada je $tp_{\mathcal{M}}(\bar{c}'/A)$ izoliran, pa je (ponovno prema 2.28) izoliran i $tp_{\mathcal{M}}(\bar{c}/A)$. □

Propozicija 3.26. *Neka je T potpuna, prebrojiva i ω-stabilna teorija, te $\mathcal{M}$ model od T i $A \subseteq M$. Tada postoji elementarna podstruktura $\mathcal{N}$ od $\mathcal{M}$ koja sadrži A i koja je konstruktibilna nad A.*

Dokaz. Ako je A nosač neke elementarne podstrukture tada smo gotovi (stavimo $\gamma = 0$ u definiciji konstruktibilnosti). U protivnom, prema Tarski-Vaughtovom testu, postoji L_A-formula $\phi(x)$ takva da $\mathcal{M} \models \exists x \phi(x)$ i za sve $a \in A$ vrijedi $\mathcal{M} \models \neg\phi[a]$. Odaberimo sada formulu $\phi(x)$ koja zadovoljava prethodnu tvrdnju i za koju je $(RM(\phi(x)), dM(\phi(x))) = (\alpha, d)$ minimalan u odnosu na leksikografski uređaj. Pokažimo da $\phi(x)$ izolira potpuni tip u $S_1(A, \mathcal{M})$. Naime u protivnom postoji L_A-formula $\psi(x)$ takva da su $\phi(x) \wedge \psi(x)$ i $\phi(x) \wedge \neg\psi(x)$ obje konzistentne sa $Th(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$. Međutim, tada bar jedna od njih ima manji (RM, dM) od (α, d), što daje kontradikciju.

Neka je b_0 neka realizacija od $\phi(x)$ u $\mathcal{M}$. Po upravo pokazanom tada $b_0 \notin A$ i tip $tp_{\mathcal{M}}(b_0/A)$ je izoliran. Nastavljajući s opisanom konstrukcijom dobivamo niz međusobno različitih b_α u M sa svojstvom da je $tp_{\mathcal{M}}(b_\beta/A \cup \{b_\beta : \beta < \alpha\})$ izoliran. Kako je M skup, konstrukcija će stati nakon nekog ordinala. Dobiveni elementi će tada (zajedno s A) tvoriti željenu elementarnu podstrukturu. $\square$

Posljednji rezultat koji trebamo je egzistencija beskonačnih nerazlučivih nizova u neprebrojivim modelima ω-stabilnih teorija.

Definicija 3.27. *Neka je T ω-stabilna teorija, $\mathcal{M}$ model od T i $A \subseteq M$. Za $p(\overline{x}) \in S_n(A, \mathcal{M})$ definiramo uređen par ordinala $(RM(p), dM(p)) = min\{(RM(\phi(\overline{x}), dM(\overline{x}))) : \phi(\overline{x}) \in p(\overline{x})\}$, u odnosu na leksikografski uređaj.*

Primjenom leme 3.19 i propozicije 3.20 vidimo da je prethodni pojam dobro definiran.

Lema 3.28. *Neka je T ω-stabilna teorija, $\mathcal{M}$ model od T i $A \subseteq M$. Nadalje, neka je $\phi(x)$ L_A-formula takva da je $(RM(\phi(x)), dM(\phi(x))) = (\alpha, d)$. Tada postoji najviše jedan potpuni tip $p(x) \in S_1(A, \mathcal{M})$, takav da je $\phi \in p$ i $(RM(p), dM(p)) = (\alpha, d)$.*

Dokaz. Neka je $p(x) \in S_1(A)$ takav tip. Primijetimo da za proizvoljne formule ϕ, ψ vrijedi $\phi \wedge \psi \in p$, $RM(\phi(x) \wedge \psi(x)) \leq RM(\phi(x))$ i $dM(\phi(x) \wedge \psi(x)) \leq dM(\phi(x))$. Ako je $\phi(x)$ formula kao u pretpostavci leme, tada je jasno da za svaku L_A-formulu $\psi(x)$ vrijedi : $\psi(x) \in p(x)$ ako i samo ako je $(RM(\phi(x) \wedge \psi(x)), dM(\phi(x) \wedge \psi(x))) = (\alpha, d)$. Dakle p je jednoznačno određen formulom ϕ. $\square$

Lema 3.29. *Neka je T ω-stabilna teorija, $\mathcal{M}$ model od T i $A \subseteq M$. Neka je $\phi(x)$ L_A-formula takva da je $(RM(\phi(x)), dM(\phi(x))) = (\alpha, d)$, te $(b_i : i < \omega)$ niz međusobno različitih elemenata iz M. Definiramo $p_i(x) = tp_{\mathcal{M}}(b_i/A \cup \{b_j : j < i\})$. Neka vrijede sljedeće dvije tvrdnje :*
(i) $\mathcal{M} \models \phi[b_i]$, za sve $i < \omega$, te
(ii) $(RM(p_i), dM(p_i)) = (\alpha, d)$, za sve $i < \omega$.
Tada je $(b_i : i < \omega)$ nerazlučiv niz nad A u $\mathcal{M}$.

Dokaz. Indukcijom po $n < \omega$ pokazujemo da vrijedi : $tp_{\mathcal{M}}(b_0, \ldots, b_n/A) = tp_{\mathcal{M}}(b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}/A)$, za sve $i_0 < \ldots < i_n$. Jasno je da iz toga slijedi nerazlučivost niza $(b_i : i < \omega)$.

Promotrimo slučaj $n = 0$. Neka je dakle $i < \omega$ proizvoljan. Označimo sa $p(x) = tp_{\mathcal{M}}(b_i/A)$. Zbog pretpostvke (i) je $\phi(x) \in p(x)$, pa je jasno da vrijedi $(RM(p), dM(p)) \leq (\alpha, d)$. S druge strane, očito je $p(x) \subseteq p_i(x)$, pa zbog pretpostvke (ii) vrijedi : $(RM(p), dM(p)) \geq (\alpha, d)$. Dakle $(RM(p), dM(p)) =$

(α, d). S druge strane, $p_0 = tp_{\mathcal{M}}(b_0/A)$, pa je $(RM(p_0), dM(p_0)) = (\alpha, d)$. Sada iz (i) slijedi $\phi \in p$, te $\phi \in p_0$. Prema prehodnoj lemi mora vrijediti $p = p_0$, odnosno $tp_{\mathcal{M}}(b_i/A) = tp_{\mathcal{M}}(b_0/A)$.

Pretpostavimo sada da je $n > 0$ i da tvrdnja vrijedi za sve $k < n$. Uzmimo proizvoljne $i_0 < \ldots < i_n < \omega$. Kao i u baznom koraku zaključujemo da je za $tp_{\mathcal{M}}(b_{i_n}/A \cup \{b_{i_0}, \ldots, b_{i_{n-1}}\})$ par $(RM, dM) = (\alpha, d)$, kao i za p_n. Koristeći lemu 3.28, vidimo da za svaku L_A-formulu $\psi(x, y_0, \ldots, y_{n-1})$ vrijedi :
(a) $\mathcal{M} \models \psi(b_n, b_0, \ldots, b_{n-1}) \Leftrightarrow$ za formulu $\phi(x) \wedge \psi(x, b_0, \ldots, b_{n-1})$ vrijedi $(RM, dM) = (\alpha, d)$.
(b) $\mathcal{M} \models \psi(b_{i_n}, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{n-1}}) \Leftrightarrow$ za formulu $\phi(x) \wedge \psi(x, b_{i_0}, \ldots, b_{i_{n-1}})$ vrijedi $(RM, dM) = (\alpha, d)$.
Prema pretpostavci indukcije je $tp_{\mathcal{M}}(b_0, \ldots, b_{n-1}/A) = tp_{\mathcal{M}}(b_{i_0}, \ldots, b_{i_{n-1}}/A)$. Koristeći razmatranja 3.15 do 3.17 dobivamo da su desne strane od (a) i (b) ekvivalentne. Međutim, tada je prema (a) i (b) $tp_{\mathcal{M}}(b_0, \ldots, b_n/A) = tp_{\mathcal{M}}(b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}/A)$, što dokazuje lemu. $\square$

I konačni željeni rezultat o nerazlučivim nizovima :

Propozicija 3.30. *Neka je teorija T ω-stabilna. Nadalje, neka je $\mathcal{M}$ model od T kardinalnosti $\kappa > \omega$ i $A \subseteq M$ kardinalnosti strogo manje od κ. Tada $\mathcal{M}$ sadrži beskonačan nerazlučiv niz nad A.*

Dokaz. Možemo pretpostaviti da je A beskonačan (konačni slučaj će trivijalno slijediti). Neka je stoga $\lambda = card(A)$. Uočimo da formula $x = x$ ima (strogo) više od λ realizacija u $\mathcal{M}$. Neka je $\phi(x)$ L_M-formula koja ima više od λ realizacija u $\mathcal{M}$ i za koju je $(RM(\phi(x)), dM(\phi(x))) = (\alpha, d)$ minimalan. Dodajući, ukoliko je to potrebno, elemente skupu A, možemo pretpostaviti da je $\phi(x)$ L_A-formula. Konstruirat ćemo realizacije $b_0, b_1, \ldots$ formule $\phi(x)$ u $\mathcal{M}$, takve da je za $tp_{\mathcal{M}}(b_i/A \cup \{b_0, \ldots, b_{i-1}\})$ par $(RM, dM) = (\alpha, d)$.

Prvo konstruiramo željeni b_0. Pretpostavimo da za svaku realizaciju $c \in M$ od $\phi(x)$ vrijedi $(RM(tp_{\mathcal{M}}(c/A)), dM(tp_{\mathcal{M}}(c/A))) > (\alpha, d)$. Neka je , za svako c, $\psi_c(x)$ L_A-formula koja svjedoči tu činjenicu. Primijetimo da je najviše λ takvih formula. Međutim, postoji strogo više od λ elemenata $c' \in M$ s tim svojstvom, pa mora postojati strogo više od λ elemenata sa istim $\psi_c(x)$, što je u kontradikciji s odabirom (α, d). Dakle željeni b_0 postoji.

Na analogan način dobivamo $b_1, b_2, \ldots$. Prema prethodnoj lemi niz $(b_i : i < \omega)$ je nerazlučiv nad A. $\square$

3.3 Morleyev teorem

U ovom paragrafu dokzujemo Morleyev teorem. Sljedeće propozicija, koja će biti ključna za dokaz, govori nam da ω-stabilne teorije imaju poželjno svojstvo nasljeđivanja saturirnosti.

Propozicija 3.31. *Neka je T potpuna prebrojiva teorija koja je ω-stabilna. Nadalje, neka postoji neprebrojiv kardinal κ takav da je svaki model od T kardinalnosti κ saturiran. Tada je svaki neprebrojiv model od T saturiran.*

Dokaz. Propoziciju dokazujemo obratom po kontrapoziciji. Pretpostavimo stoga da je $\lambda > \omega$ i da je $\mathcal{M}$ nesaturirani model od T kardinalnosti λ. Tada postoji podskup A od M, kardinalnosti strogo manje od λ i tip $p(x) \in S_1(A, \mathcal{M})$ koji nije realiziran u $\mathcal{M}$. Neka je $I = (a_i : i < \omega) \subseteq M$ nerazlučiv niz nad A čiju egzistenciju jamči prethodna propozicija. Primijetimo da ne postoji formula $\phi(x)$ s prametrima iz $A \cup I$, koja je konzistentna s T i za koju vrijedi $\mathcal{M} \models \forall x(\phi(x) \to \psi(x))$, za sve $\psi(x) \in p(x)$. Naime, svaka realizacija dane formule u $\mathcal{M}$(zbog potpunosti svi su modeli elementarno ekvivalentni) bi realizirala tip $p(x)$. Dakle vrijedi :
$(*)$ Za svaku konzistentnu formulu $\phi(x)$ nad $A \cup I$ postoji formula $\psi(x) \in p(x)$, takva da je $\mathcal{M} \models \exists x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x))$.

Neka je A_0 prebrojiv podskup od A. Za svaku konzistentnu formulu $\phi(x)$ nad $A_0 \cup I$ odaberimo $\psi_\phi(x) \in p(x)$ kao u $(*)$. Kako je skup $A_0 \cup I$ prebrojiv postoji prebrojiv podskup A_1 od A, koji sadrži A_0 i takav da su sve $\psi_\phi(x)$ nad A_1. Iterirajući ovu konstrukciju dobivamo niz $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, prebrojivih podskupova od A. Neka je A' unija tako dobivenih A_i i neka je $p'(x) \in S_1(A', \mathcal{M})$ skup svih formula iz $p(x)$ u kojima se javljaju samo konstantski simboli iz A'. Tada je A' prebrojiv, I nerazlučiv nad A' i vrijedi:
$(**)$ Za svaku konzistentnu formulu $\phi(x)$ nad $A' \cup I$ postoji formula $\psi(x) \in p'(x)$, takva da je $\mathcal{M} \models \exists x(\phi(x) \wedge \neg\psi(x))$.

Prema lemi 3.6 postoji model $(\mathcal{N}, a)_{a\in A'}$ teorije $Th(\mathcal{M}, a)_{a\in A'}$ koji sadrži niz $I' = (b_i : i < \kappa)$, takav da je I' nerazlučiv nad A' u $\mathcal{N}$ i da za svako n vrijedi $tp_{\mathcal{N}}(b_0, \ldots, b_n/A') = tp_{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_n/A')$. Prema 3.26 postoji elementarna podstruktura $\mathcal{N}'$ od $\mathcal{N}$ koja sadrži $A' \cup I'$ i koja je konstruktibiln nad $A' \cup I'$. Uočimo da je $\mathcal{N}'$ model od T (jer je model za $Th(\mathcal{M}, a)_{a\in A'}$) i da je kardinalnosti κ (zbog konstruktibilnosti).
<u>$Tvrdnja$</u> : $p'(x)$ nije reliziran u $\mathcal{N}'$.
Pretpostavimo da $p'(x)$ jest realiziran u $\mathcal{N}'$ nekim elementom c. Prema 3.25 tip $tp_{\mathcal{N}'}(c/A' \cup I')$ je izoliran. Neka je $\phi(x, b_{i_0}, \ldots, b_{i_n})$ formula koja ga izolira, pri čemu je $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ $L_{A'}$-formula i $i_0 < \ldots < i_n < \kappa$.

Tada za svaki $\psi(x) \in p'(x)$ vrijedi $\mathcal{N}' \models \forall x(\phi(x, b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}) \rightarrow \psi(x))$. Nadalje iz nerazlučivosti niza $(b_i : i < \kappa)$ i svojstava modela $\mathcal{N}'$ vrijedi $tp_{\mathcal{N}'}(b_{i_0}, \ldots, b_{i_n}/A') = tp_{\mathcal{M}}(a_0, \ldots, a_n/A')$. Tada svakako vrijedi i $\mathcal{M} \models \forall x(\phi(x, a_0, \ldots, a_n) \rightarrow \psi(x))$, za sve $\psi(x) \in p'(x)$, što je u kontradikciji s $(**)$.
Dakle $\mathcal{N}'$ je model od T kardinalnosti κ koji nije saturiran. □

Uočimo prije dokaza samog teorema da "kategoričnost čuva saturiranost". Naime, uzmimo da je neka teorija T κ-kategorična i neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ dva modela od T kardinalnosti κ. Tvrdimo da je $\mathcal{M}$ saturiran ako i samo ako je $\mathcal{N}$ saturiran. Uzmimo primjerice da je $\mathcal{M}$ saturiran i pretpostavimo da $\mathcal{N}$ nije saturiran. Tada postoji potpuni n-tip p nad nekim podskupom B od N koji nije realiziran u $\mathcal{N}$. Koristeći izomorfizam između $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zamjenimo parametre u p kako bismo dobili potpuni n-tip nad nekim podskupom A od M. Tada će zbog saturiranosti tip p biti realiziran u $\mathcal{M}$. Međutim, tada postoji formula $\phi(\overline{x}, \overline{y})$ u jeziku teorije T za koju vrijedi $\mathcal{M} \models \exists \overline{x} \phi(\overline{x}, \overline{a})$ i ne vrijedi $\mathcal{N} \models \exists \overline{x} \phi(\overline{x}, \overline{b})$, gdje su $\overline{a}$ i $\overline{b}$ pripadni parametri iz skupova A odnosno B. Međutim, kako su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ izomorfne strukture to nije moguće.

I konačno, sam teorem :

Teorem 3.32 (Morley). *Neka je T potpuna prebrojiva teorija koja je κ-kategorična za neki $\kappa > \omega$. Tada je T λ-kategorična, za sve $\lambda > \omega$.*

Dokaz. Prema 3.12 imamo da je T ω-stabilna. Nadalje, iz korolara 3.22 znamo da postoji saturiran model od T kardinalnosti κ. Kako je T κ-kategorična, to su svi modeli od T kardinalnosti κ saturirani, pa je prema prethodnoj propoziciji, za $\lambda > \omega$, svaki model od T kardinalnosti λ saturiran. Kako su svaka dva modela potpune teorije elementarno ekvivalentna, to je prema propoziciji 2.10 teorija T λ-kategorična. □

Literatura

[1] C. C. Chang, H. J. Keisler, Model Theory, Elsevier, 1998.

[2] H. D. Ebbinghaus, J. Flum, W. Thomas, Mathematical Logic, Springer Verlag, 1994.

[3] C. W. Henson, Model Theory, skripta, Mathematics Department University of Illinois, 1998.

[4] W. Hodges, A Shorter Model Theory, Cambridge University Press, 2003.

[5] A. Marcja, C. Toffalori, A Guide to Classical and Modern Model Theory, Kluwer Academic Publishers, 2003.

[6] D. Marker, Model Theory: An Introduction, Springer-Verlag, 2002.

[7] A. Pillay, Lecture notes - Model theory, Department of Mathematics University of Illinois at Urbana-Champaign, 2002.

[8] M. Vuković, Matematička logika 1, skripta, PMF-MO, 2006.

[9] M. Vuković, Teorija skupova, skripta
http : //web.math.hr/ vukovic/TS_skripta_2005.pdf