Hrvatski matematički elektronski časopis *math.e*

Broj 12

http://e.math.hr/

Afine transformacije ravni

Harun Šiljak

Sadržaj:

1. Uvod

Većinu problema iz oblasti euklidske geometrije moguće je rješiti upotrebom tzv. sintetičkih metoda. Međutim, ponekad traženje tog "elementarnog" rješenja predstavlja poteškoću i vrsnim poznavaocima geometrije, tako da su se stoljećima razvijale različite nesintetičke metode (analitička geometrija, kompleksni brojevi u geometriji, vektori), koje su olakšale rješavanje mnogih problema u ovom polju. Afine transformacije se nalaze negdje između sintetičkih i nesintetičkih metoda: ne pretvaraju geometrijski problem u algebarski (kao što to čine analitičke metode), ali su neodvojivo povezane sa vektorima, vektorskim prostorima i koordinatnim sistemima. U ovom tekstu ćemo pokušati da sistematično iznesemo teoriju afinih transformacija u ravni, prilagođenu srednjoškolskom nivou, te da kroz niz ilustrativnih primjera pokažemo njihovu primjenu pri rješavanju različitih geometrijskih problema.

> Transformaciju ravni nazivamo **afinom** ako predstavlja neprekidnu bijekciju koja svaku pravu preslikava u pravu.

Pomenimo još i da se svaka afina transformacija ravni može predstaviti u obliku

$$(x, y) \mapsto (ax + by + e, cx + dy + f)$$

za neke realne konstante a, b, c, d, e, f (zbog bijektivnosti potreban je i uslov $ad - bc \neq 0$). Obično se transformacija prikazuje u formi matrice:

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

Više o matričnim transformacijama ravni možete saznati iz članka [BJ].

Sva izometrijska preslikavanja su afine transformacije. To je npr. očito za najpoznatije predstavnike izometrijskih preslikavanja: translaciju, rotaciju, osnu i centralnu simetriju. Slijedećih pet teorema predstavljaju teoretske osnove afinih transformacija. Napomenimo još i to da su teoreme 2, 4 i 5 osnovno "oružje" u primjeni ove metode u planimetriji, što ćete u nastavku i vidjeti na primjerima.

Na ovom mjestu bilo bi korisno ponoviti osnovne činjenice o vektorskom prostoru V^2, tj. o vektorskoj ravni. Njezini elementi su vektori – klase međusobno ekvivalentnih orijentiranih dužina. Orijentirane dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ su *ekvivalentne* (tj. predstavljaju isti vektor) ako dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ imaju isto polovište. Poznato je da iz svake tačke ravni možemo "nanijeti" bilo koji vektor. Vektore sabiramo po "pravilu trougla": $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Za više informacija o vektorskoj algebri i teoriji vektorskih prostora, pogledati [MM].

Afina transformacija ravni L na prirodan način prenosi se i na vektore: $L(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{L(A)L(B)}$. Pokažimo najprije da je ova definicija dobra, tj. da ne ovisi o izboru predstavnika vektora.

Lema 1. Neka su A_1, B_1, C_1, D_1 slike tačaka A, B, C, D, redom, preslikanih afinom transformacijom L. Ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, tada je $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$.

Dokaz. Neka je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. U slučaju da tačke A, B, C i D nisu kolinearne, $ABCD$ je paralelogram. Kako se paralelne prave slikaju u paralelne prave (što ćemo dokazati u teoremi 2(c)), to je i $A_1B_1C_1D_1$ također paralelogram, pa je $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$. Ukoliko su tačke A, B, C, D kolinearne, uzmimo tačke E i F koje nisu kolinearne sa njima tako da je $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$. Tada je $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{E_1F_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$. □

Teorema 1. Ako je L afina transformacija, tada vrijedi

(a) $L(\vec{0}) = \vec{0}$,
(b) $L(\vec{a} + \vec{b}) = L(\vec{a}) + L(\vec{b})$ za proizvoljne vektore $\vec{a}$, $\vec{b}$ iz V^2,
(c) $L(k\vec{a}) = kL(\vec{a})$ za proizvoljan vektor $\vec{a}$ i realan broj k.

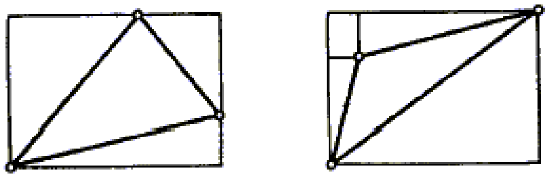
Dokaz. (a) $L(\vec{0}) = L(\overrightarrow{AA}) = \overrightarrow{L(A)L(A)} = \vec{0}$.
(b) Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Koristeći definicije sabiranja vektora i djelovanja afine transformacije na vektore dobijamo $L(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = L(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{L(A)L(C)} = \overrightarrow{L(A)L(B)} + \overrightarrow{L(B)L(C)} = L(\overrightarrow{AB}) + L(\overrightarrow{BC})$.
(c) Uzmimo prvo da je k cio broj. Tada za prirodno k vrijedi $L(k\vec{a}) = L(\vec{a} + \ldots + \vec{a}) = L(\vec{a}) + \ldots + L(\vec{a}) = kL(\vec{a})$, a za negativno k dovoljno je u prethodnom izrazu iskoristiti $k\vec{a} = (-k)(-\vec{a})$. Sada, neka je $k = {}^{m}\!/_{n}$ racionalan broj; $nL(k\vec{a}) = L(nk\vec{a}) = L(m\vec{a}) = mL(\vec{a})$, pa je $L(k\vec{a}) = ({}^{m}\!/_{n})L(\vec{a}) = kL(\vec{a})$. Konačno, ako je k iracionalan broj, postoji niz k_n racionalnih brojeva koji teže ka k (npr. niz decimalnih aproksimacija broja k). Kako je L neprekidna funkcija, $L(k\vec{a}) = L(\lim_{n\to\infty} k_n\vec{a}) = \lim_{n\to\infty} k_nL(\vec{a}) = kL(\vec{a})$. □

Teorema 2. Afine transformacije čuvaju:

(a) kolinearnost tačaka,
(b) konkurentnost pravih,
(c) paralelnost pravih,
(d) omjer dužina na pravcu,
(e) omjer površina poligona.

Dokaz. (a) Slijedi direktno iz činjenice da se afinom transformacijom prava slika u pravu.
(b) Slijedi iz činjenice da se prava slika u pravu i da je u pitanju bijekcija, jer se tada slika tačke presjeka pravih koje se preslikavaju nalazi u presjeku slika svake od tih pravih.
(c) Analogno dokazu (b), iz činjenice preslikavanja prave u pravu i bijektivnosti, slike pravih koje se ne sijeku se također ne sijeku.
(d) Neka je L afina transformacija i neka tačka C dijeli duž $\overline{AB}$ u omjeru $p : q$. Pokažimo da tada i C' dijeli duž $\overline{A'B'}$ u istom omjeru, pri čemu je $L(A) = A'$, $L(B) = B'$ i $L(C) = C'$. Zbog teoreme 1, iz uslova $q\overrightarrow{AC} = p\overrightarrow{CB}$ slijedi $q\overrightarrow{A'C'} = qL(\overrightarrow{AC}) = L(q\overrightarrow{AC}) = L(p\overrightarrow{CB}) = pL(\overrightarrow{CB}) = p\overrightarrow{C'B'}$.
(e) Neka su a_1 i a_2 dvije okomite prave. Pošto afina transformacija čuva omjer dužina na paralelnim pravima, dužine svih duži paralelnih jednoj pravoj se množe istim koeficijentom. Označimo sa k_1 i k_2 ove koeficijente za prave a_1 i a_2 redom, i neka je ψ ugao između slika ovih pravih. Pokažimo da data afina transformacija množi površine svih poligona sa k, gdje je $k = k_1k_2\sin\psi$. Za pravougaonike stranica paralelnih sa a_1 i a_2 i za pravougli trougao kateta paralelnih sa a_1 i a_2 tvrđenje očito vrijedi. Bilo koji drugi

trougao može se dobiti isjecanjem nekoliko takvih pravouglih trouglova iz pravougaonika stranica paralenih sa a_1 i a_2 (slika 1). Dakle, tvrdnja važi za svaki trougao, pa samim tim i za svaki poligon (jer je svaki poligon moguće nepresjecajućim dijagonalama izdjeliti na trouglove). □



Slika 1.

Na ovom mjestu vrijedi primjetiti da afine transformacije općenito ne čuvaju udaljenost između tačaka niti uglove. To se jednostavno pokazuje na primjeru transformacije istezanja, definisane kao $(x, y) \rightarrow (cx, y)$ za realnu konstantu $c \neq 0$. Ovim ograničenjima je umnogome određen i tip problema u kojima se efikasno mogu primjeniti afine transformacije. Tako, zbog teoreme 2, vidljivo je da su ove transformacije izuzetno korisne pri radu sa omjerima, kao dužinskim tako i površinskim (što će se vidjeti na primjerima), te sa konkurentnim i paralelnim pravima. S druge strane, zbog svojih ograničenja, afine transformacije su izuzetno nepraktične u problemima u kojima se javljaju dužine duži (bez omjera) i uglovi, pa samim tim normale, konciklične tačke i slično.

Teorema 3. Neka su zadane dvije tačke u ravni, O i O', i dvije baze vektorskog prostora V^2, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ i $\{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}\}$. Tada postoji jedinstvena afina transformacija koja preslikava O u O' i $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ u $\{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}\}$.

Dokaz. Definišimo preslikavanje L na slijedeći način. Neka je X proizvoljna tačka. Pošto je $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ baza vektorskog prostora, onda postoje jedinstveni brojevi x_1 i x_2 takvi da je $\overrightarrow{OX} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$. Pridružimo tački X tačku $X' = L(X)$ takvu da je $\overrightarrow{O'X'} = x_1\vec{e'_1} + x_2\vec{e'_2}$. Kako je $\{\vec{e'_1}, \vec{e'_2}\}$ također baza, konstruisano preslikavanje je bijekcija (inverzno preslikavanje se da konstruisati na sličan način), a pokazuje se i da je neprekidno. Dokažimo sada da je slika bilo koje prave AB po preslikavanju L također prava. Neka je $A' = L(A)$, $B' = L(B)$ i neka su (a_1, a_2) i (b_1, b_2) koordinate tačaka A i B, redom, u bazi $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ (tj. $OA = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$, $\overrightarrow{OB} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$). Uzmimo proizvoljnu tačku C na pravoj AB. Kako vrijedi $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ za neko k, to je $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = (1-k)\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} = ((1-k)a_1 + kb_1)$ $e_1 + ((1-k)a_2 + kb_2)\vec{e_2}$. Po definiciji preslikavanja L, za sliku $C' = L(C)$ vrijedi $\overrightarrow{O'C'} = ((1-k)a_1 + kb_1)$ $e'_1 + ((1-k)a_2 + kb_2)\vec{e'_2} = (1-k)\overrightarrow{O'A'} + k\overrightarrow{O'B'} = \overrightarrow{O'A'} + k(\overrightarrow{O'B'} - \overrightarrow{O'A'}) = (1-k)\overrightarrow{O'A'} + k\overrightarrow{A'B'}$ pa tačka C' leži na pravoj $A'B'$. Jedinstvenost preslikavanja L slijedi iz teoreme 1. Zaista, $L(\overrightarrow{OX}) = x_1L(\vec{e_1}) + x_2L(\vec{e_2})$, dakle, slika tačke X jednoznačno je određena slikama vektora $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ i slikom tačke O. □

Teorema 4. Za data dva trougla ABC i $A_1B_1C_1$ postoji jedinstvena afina transformacija koja jedan preslikava u drugi.

Dokaz. Dovoljno je u teoremi 3 uzeti $O = A$, $\vec{e_1} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e_2} = \overrightarrow{AC}$, $O' = A_1$, $e'_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$, $e_2 = \overrightarrow{A_1C_1}$. □

Iz teoreme 4 i teoreme 2(c) slijedi

Teorema 5. Za data dva paralelograma postoji jedinstvena afina transformacija koja jedan preslikava u drugi.

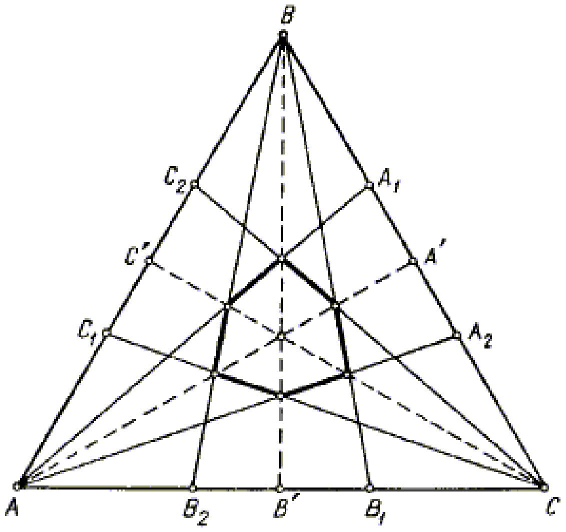
2. Primjeri riješenih zadataka

Zahvaljujući teoremama 4 i 5, često pri rješavanju problema u proizvoljnom trouglu možemo problem svesti na dokazivanje tvrdnje u jednakostraničnom trouglu, što je često mnogo lakše. Slično, paralelogram je moguće (po potrebi) transformisati u kvadrat. Ponekad je, pak, praktičnije trougao zamijeniti jednakokrakim trouglom, što ćemo vidjeti na nekim od primjera što slijede. Naravno, pri svakoj od transformacija mora se paziti na zakonitosti iz teoreme 2 i ograničenja vezana za uglove i dužine.

Na slijedećih nekoliko primjera vidjećemo iz prve ruke afine transformacije "na djelu". Biće tu i relativno lahkih i teških problema (tu je i jedan prijedlog za IMO). Zadaci su izabrani tako da pokažu standardni metod rješavanja planimetrijskih problema uz pomoć afinih transformacija i omoguće zainteresiranom čitaocu da riješi probleme za samostalan rad na kraju članka, te da lahko prepozna mogućnost primjene afinih transformacija u problemima sa kojim se bude u budućnosti susretao (na takmičenjima, u nastavi ili istraživačkom radu).

Primjer 1. ([IJ]) Po dvije prave su povučene kroz svako tjeme trougla tako da naspramnu stranicu dijele na tri jednaka dijela. Dokažite da se dijagonale koje spajaju naspramna tjemena šestougla nastalog u presjeku ovih pravih sijeku u jednoj tački.

Rješenje. U zadatku su očito "u igri" samo omjeri na pravima i konkurentnost, osobine koje afina tranformacija čuva (prema teoremi 2). U skladu sa teoremom 4, možemo dati trougao transformisati u jednakostranični i u njemu dokazati tvrđenje zadatka. Neka tačke A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 dijele stranice jednakostraničnog trougla ABC na jednake dijelove i neka su A', B', C' središta stranica (slika 2). Kako su prave BB_1 i CC_2, te BB_2 i CC_1 simetrične u odnosu na pravu AA', a simetrične prave se sijeku na osi simetrije, to se jedna dijagonala razmatranog šestougla nalazi na AA'. Slično, preostale dijagonale se nalaze na BB' i CC'. Jasno je, dalje, da se težišnice AA', BB', CC' sijeku u jednoj tački, čime je tvrdnja dokazana.



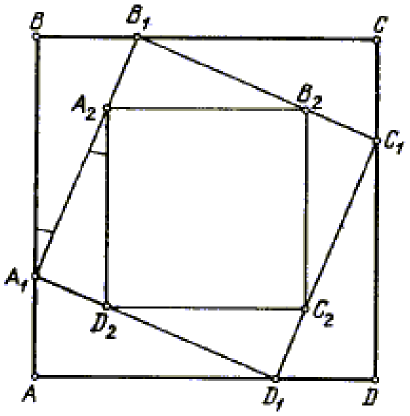
Slika 2.

Primjer 2. ([VP]) Na stanicama AB, BC, CD, DA paralelograma $ABCD$ izabrane su redom tačke A_1, B_1, C_1, D_1, a na stranicama A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 četverougla $A_1B_1C_1D_1$ izabrane su redom tačke A_2, B_2, C_2, D_2 tako da vrijedi

$$\frac{|AA_1|}{|BA_1|}=\frac{|BB_1|}{|CB_1|}=\frac{|CC_1|}{|DC_1|}=\frac{|DD_1|}{|AD_1|}=\frac{|A_1D_2|}{|D_1D_2|}=\frac{|D_1C_2|}{|C_1C_2|}=\frac{|C_1B_2|}{|B_1B_2|}=\frac{|B_1A_2|}{|A_1A_2|}.$$

Dokažite da je $A_2B_2C_2D_2$ paralelogram čije su stranice paralelne sa stranicama paralelograma $ABCD$.

Rješenje. Prema teoremi 5, svaki paralelogram se može afinom transformacijom transformisati u kvadrat. Dovoljno je trougao ABC transformisati u jednakokrako-pravougli trougao i paralelogram $ABCD$ postaje kvadrat. Pošto su osnovni elementi u problemu omjeri dužina na pravoj i paralelne prave, to ovdje možemo primjeniti afine transformacije i uzeti u daljem razmatranju da je $ABCD$ kvadrat.



Slika 3.

Razmotrimo rotaciju za ugao od 90° oko središta kvadrata *ABCD* koja ga preslikava u samog sebe. Ovom rotacijom se i četverouglovi $A_1B_1C_1D_1$ i $A_2B_2C_2D_2$ slikaju sami u sebe. Prema tome, i oni su kvadrati (pokažite to!) pa vrijedi $|AA_1| = |BB_1|$, $|B_1A_2| = |A_1D_2|$ i dovoljno dokazati da je npr. $AB \parallel A_2D_2$. Imamo:

$$\operatorname{tg}\angle BA_1B_1 = \frac{|BB_1|}{|BA_1|} = \frac{|AA_1|}{|BA_1|} = \frac{|B_1A_2|}{|A_1A_2|} = \frac{|A_1D_2|}{|A_1A_2|} = \operatorname{tg}\angle A_1A_2D_2.$$

Iz toga slijedi $AB \parallel A_2D_2$, što smo i htjeli pokazati.

Primjer 3. ([VP]) U trapezu *ABCD* osnovica *AB* i *CD*, kroz tačku *D* povučena je prava paralelna sa krakom *BC*, koja siječe dijagonalu *AC* u tački *P*. Prava paralelna sa krakom *AD*, povučena kroz tačku *C*, siječe dijagonalu *BD* u tački *Q*. Dokažite da je prava *PQ* paralelna sa osnovicama trapeza *ABCD*.

Rješenje. Neka je *E* sjecište dijagonala trapeza. Afina transformacija koja trougao *ADE* preslikava u jednakokraki trougao preslikava trapez *ABCD* u jednakokraki trapez *A'B'C'D'*. Tada su tačke *P'* i *Q'* simetrične u odnosu na simetralu duži *A'B'*, pa je $P'Q' \parallel A'B'$.

Primjer 4. ([IJ]) Neka je tačka *T* težište trougla *ABC* i neka su *M*, *N*, *P* tačke na stranicama *AB*, *BC*, *CA* trougla, redom, koje dijele ove stranice u istom omjeru ($|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = |CP| : |PA| = p : q$). Dokažite:

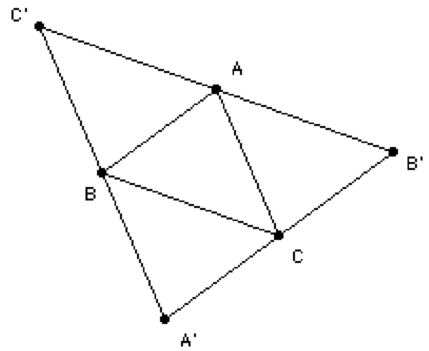
(a) *T* je težište trougla *MNP*,

(b) *T* je težište trougla čija su tjemena u presjeku pravih *AN*, *BP* i *CM*.

Rješenje. (a) Afinom transformacijom preslikajmo trougao *ABC* u jednakostranični trougao *A'B'C'*. Neka su *T'*, *M'*, *N'*, *P'* slike tačaka *T*, *M*, *N*, *P*. Rotacijom za ugao od 120° oko tačke *T'* trougao *M'N'P'* se slika u samog sebe. Prema tome, to jednakostranični trougao, a *T'* mu je težište, odnosno sjecište težišnica. Pošto se afinom transformacijom težišnica slika u težišnicu, *T* je težište trougla *MNP*.
(b) Na isti način zaključujemo da je *T* težište i trougla nastalog u presjeku pravih *AN*, *BP* i *CM*.

Primjer 5. ([JS]) Za svaki skup *S* od pet tačaka u ravni od kojih nikoje tri nisu kolinearne, sa $M(S)$ i $m(S)$ označene su najveća i najmanja površina trouglova određenih tačkama iz *S*. Koja je najmanja moguća vrijednost omjera $M(S)/m(S)$?

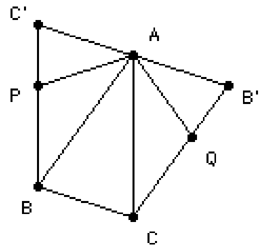
Rješenje. Dokažimo da je najmanji mogući omjer $(1+\sqrt{5})/2$ i da se on postiže ako se *S* sastoji od vrhova pravilnog petougla. Označimo sa *A*, *B*, *C*, *D* i *E* tačke skupa *S* i neka je $P(\Delta ABC) = M(S)$. Neka je $k = 2M(S)/(1 + \sqrt{5})$. Sada trebamo pokazati da barem jedan od trouglova formiranih od tačaka iz skupa *S* ima površinu manju ili jednaku *k*. Povucimo pravce *B'C'*, *C'A'* i *A'B'* kroz *A*, *B*, *C* paralelne sa *BC*, *CA*, *AB* redom (slika 4).



Slika 4.

Tačka D se mora nalaziti na istoj strani prave $B'C'$ kao i BC, inače bi vrijedilo $P(\Delta BCD) > P(\Delta ABC)$, što se protivi činjenici da je $P(\Delta ABC)$ maksimalna. Slično, D se nalazi sa iste strane $C'A'$ kao i CA, te sa iste strane $A'B'$ kao i AB. Prema tome, D se nalazi ili unutar ΔABC ili na jednoj od njegovih stranica. Slično zaključujemo i za tačku E. Kako su trouglovi $A'BC$, $B'CA$, $C'BA$ disjunktni (izuzimajući tačke A, B i C, u kojima se tačke D i E ne mogu naći), u jednom od njih se ne nalazi ni D ni E. Bez umanjenja općenitosti, uzmimo da se tačke D i E nalaze u četverouglu $B'CBC'$.

Afine transformacije čuvaju omjer površina trouglova; zato možemo transformisati ΔABC u trougao uglova 36°, 72°, 72° što će nam omogućiti da odaberemo tačke P i Q tako da je $APBCQ$ pravilan petougao. Pošto je $AB \parallel CQ$ i $AB \parallel A'B'$, tačka Q se nalazi na pravcu $B'C$. Analogno, P se nalazi na BC'.



Slika 5.

Sada razmotrimo dva slučaja, u zavisnosti da li se tačke D i E nalaze unutar ili van petougla $APBCQ$.

1. Tačka D se nalazi u petouglu. Ako se nalazi u ΔABP, tada je $P(\Delta ABD) \leq P(\Delta ABP) = k$. Slično vrijedi i ako se D nalazi u ΔACQ. Ako se pak nalazi u ΔABC, tad je površina bar jednog od trouglova ΔABD, ΔBCD, ΔCAD manja ili jednaka od $P(\Delta ABC)/3 < k$. Slično zaključujemo i za tačku E.

2. Tačke D i E se nalaze u $\Delta APC'$ ili $\Delta AQB'$. Ako se obje nalaze u istom trouglu, tada je $P(\Delta ADE) \leq P(\Delta APC') < k$. Ako se nalaze u različitim trouglovima, na primjer D u $\Delta APC'$ i E u $\Delta AQB'$, tada je $P(\Delta ADE) = (|AD| \cdot |AE|/2) \sin\angle DAE \leq (|AP|^2/2) \sin\angle PAQ = P(\Delta PAQ) = k$.

Analizom navedenih primjera mogli ste vidjeti uobičajene ideje, metode i tehnike vezane za rad sa afinim transformacijama, ali i primjere nestandardnih ideja koje zahtjevaju izvjesnu dozu imaginacije i kreativnosti. Ideje iz ovih primjera pokušajte iskoristiti u zadacima za samostalan rad koji se nalaze na kraju teksta. Neki od njih se daju riješiti standardnim putem, no neki će zahtjevati od rješavača nove ideje. Neka vas ne obeshrabri početni neuspjeh u nekim od zadataka. Probajte opet, posmatrajte, razmišljajte, analizirajte!

3. Zadaci za samostalan rad

Zadatak 1. ([VP]) Na stranicama AB, BC i CD paralelograma $ABCD$ su izabrane tačke K, L i M redom, tako da dijele stranice u istom omjeru. Neka su b, c i d prave koje prolaze tačkama B, C i D i paralelne su sa KL, KM, ML redom. Dokažite da se prave b, c i d sijeku u jednoj tački.

Zadatak 2. ([VP]) Na stranicama AB, BC i AC trougla ABC se nalaze tačke M, N i P redom. Dokažite:

(a) Ako su tačke M_1, N_1 i P_1 centralno simetrične tačkama M, N i P u odnosu na središta odgovarajućih stranica, tada je $P(\Delta MNP) = P(\Delta M_1N_1P_1)$

(b) Ako se tačke M_1, N_1 i P_1 nalaze na stranicama AC, BA i CB redom, tako da je $MM_1 \parallel BC$, $NN_1 \parallel CA$, $PP_1 \parallel AB$, tada je $P(\Delta MNP) = P(\Delta M_1N_1P_1)$.

Zadatak 3. ([KK]) Neka su X, Y, Z tačke na stranicama BC, CA, AB, redom, trougla ABC za koje važi $|BX| / |XC| = |CY| / |YA| = |AZ| / |ZB| = k$, za zadanu konstantu $k > 1$. Pronadite odnos površina trougla čija se tjemena nalaze u presjeku duži AX, BY i CZ i trougla ABC (kao funkciju od k).

Zadatak 4. ([ML], Albanija 2004.) Odrediti omjer površine osmougla koji se nalazi u presjeku pravih povučenih iz tjemena paralelograma do središta naspramnih stranica s površinom tog paralelograma.

Zadatak 5. ([MR], Švedska 1996.) Kroz tačku u unutrašnjosti trougla površine T povučene su prave paralelne stranicama trougla, koje ga dijele na tri trougla i tri paralelograma. Neka su T_1, T_2, T_3 površine dobijenih trouglova. Dokažite da je $\sqrt{T} = \sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} + \sqrt{T_3}$.

Zadatak 6. ([DJ], prijedlog za IMO 1995.) Neka je O tačka u unutrašnjosti konveksnog četverougla $ABCD$, čija je površina S i neka su K, L, M i N tačke na stranicama AB, BC, CD i DA, redom. Ako su $OKBL$ i $OMDN$ paralelogrami, dokazati da je $\sqrt{S} \geq \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$, gdje su S_1 i S_2 redom površine četverouglova $ONAK$ i $OLCM$.

Slijedeći zadatak naveden je pogrešno u [KK] i [MR]. Ovdje je dat ispravljen tekst.

Zadatak 7. Neka je $ABCDE$ konveksan petougao i neka je $F = BC \cap DE$, $G = CD \cap EA$, $H = DE \cap AB$, $I = EA \cap BC$, $J = AB \cap DC$. Ukoliko je $P(\Delta AHI) = P(\Delta BIJ) = P(\Delta CJF) = P(\Delta DFG) = P(\Delta EGH)$, dokažite da se prave AF, BG, CH, DI, EJ sijeku u jednoj tački.

Literatura

[BJ] T. Bedeković, B. Jandras i D. Žubrinić, *Matrične transformacije ravnine*, Math.e **1** (2004). *http://e.math.hr/linal*

[DJ] D. Djukić, V. Janković, I. Matić i N. Petrović, *The IMO compendium*, Springer, 2006.

[IJ] I.M. Jaglom, *Geometričeskie preobrazovanija II*, Moskva, 1956.

[KK] K.S. Kedlaya, *Geometry unbound*, 2006. *http://www-math.mit.edu/~kedlaya/geometryunbound/*

[MM] D.S. Mitrinović, D. Mihailović i P.M. Vasić, *Linearna algebra – Polinomi – Analitička geometrija*, Beograd, 1973.

[ML] MathLinks Forum. *http://www.mathlinks.ro*

[VP] V.V. Prasolov, *Problems in plane geometry* (prijevod: D. Leites), 2005. *http://students.imsa.edu/~tliu/Math/planegeo.pdf*

[MR] M. Radovanović, *Afine transformacije*, 2007. *http://www.matf.bg.ac.yu/~matic/competitions/dodatne/afine_mr.pdf*

[JS] J. Scholes, *43rd IMO Shortlist*, 2002. *http://www.kalva.demon.co.uk/short/soln/sh02g5.html*

---

1. Uvod
2. Primjeri riješenih zadataka
3. Zadaci za samostalan rad
Literatura