АФИНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ

Под *афином трансформацијом* подразумевамо све линеарне трансформације, тј. трансформације облика

$$(x, y) \mapsto (ax + yb + c, dx + ey + f)$$

за неке константе a, b, c, d, e, f. Одмах можемо приметити да су све изометријске трансформације, као и сличност афине.
Афине трансформације задовољавају следеће две теореме:

Теорема 1. Афине транформације чувају: колинеарност, конкурентност, паралелност, однос дужина на правој, однос површина, полигоне, итд., али не чувају углове (па самим тим ни нормалност и концикличност).

Теорема 2. Сваке три неколинеарне тачке у равни се неком афином трансформацијом могу превести у произвољне три неколинеарне тачке.

1. Нека је $ABCDE$ конвексан петоугао и нека је $F = BC \cap DE, G = CD \cap EA, H = DE \cap AB, I = EA \cap BC, J = AB \cap DE$. Уколико су површине троуглова AHI, BIJ, CJF, DFG, EGH једнаке, доказати да су праве AF, BG, CH, DI, EJ конкурентне.

2. Нека су AX, BY, CZ три чевијане троугла ABC које задовољавају једнакост

$$\frac{BX}{XC} = \frac{CY}{YA} = \frac{AZ}{ZB} = k,$$

где је k дата константа већа од 1. Одредити однос површине троугла формираног од датих чевијана и троугла ABC.

3. (Француска 1996) Нека је ABC троугао. За праву l која није паралелна нити једној страници троугла ABC, нека је G_l тежиште тачака добијених у пресеку l са AB, BC, CA. Одредити геометријско место тачака G_l за све положаје l.

4. У шестоуглу $ABCDEF$ супротне стрнице су паралелне и једнаке. Доказати да троуглови ACE и BDF имају једнаке површине.

5. У троуглу ABC тачке D, E, Z, H, Θ су средишта дужи BC, AD, BD, ED, EZ, редом. Уколико је I тачка пресека BE и AC, а K тачка пресека $H\Theta$ и AC, доказати да је:
(а) $AK = 3CK$;
(б) $HK = 3H\Theta$;
(в) $BE = 3EI$;
(г) површина троугла ABC је 32 пута већа од површине троугла $E\Theta H$.

6. (Шведска 1996) Кроз тачку у унутрашњости троугла површине T повучене су линије паралелне страницама троугла које га деле на три трогла и три паралелограма. Нека су T_1, T_2, T_3 површине добијених троуглова. Доказати да је

$$\sqrt{T} = \sqrt{T}_1 + \sqrt{T}_2 + \sqrt{T}_3.$$

7. (ИМО 2002, предлог) За сваки скуп 5 тачака у равни од којих никоје три нису колинеарне, са $M(S)$ и $m(S)$ означене су највећа и најмања површина, редом, троуглова одређених тачкама из S. Која је најмања могућа вредност $M(S)/m(S)$?

radmarko@yahoo.com
март 2007.