GLASNIK MAT. - FIZ. I ASTR.
Tom 11. — No. 2 — 1956.

SUR L'ÉCART ABSTRAIT

Đuro Kurepa, Zagreb

C'est en 1905 que M. Fréchet [1], [2] (cf. [3] p. 62) a introduit *l'écart numérique* comme moyen de définir une classe d'espaces abstraits. En 1934 en généralisant les espaces métriques de M. Fréchet, Kurepa [1] a introduit *les espaces pseudo-métriques* en supposant que l'écart entre deux éléments de l'espace soit un point d'un ensemble totalement ordonné quelconque; en particulier, l'écart (a, a) d'un point de lui-même était un point jouant le rôle du nombre 0 dans la définition des écarts numériques. Les axiomes correspondants sont analogues aux axiomes respectifs dans le cas des espaces métriques. En 1936 Kurepa [4] [5] développa la Note [1] en donnant une nouvelle définition des espaces métriques susceptibles à une généralisation immédiate; c'est ainsi *qu'à tout ordinal initial régulier ω_α il fit correspondre des classes E_α et D_α le cas $\alpha = 0$ se réduisant aux espaces métriques et à ceux possédant un écart numérique,* respectivement; en même temps Kurepa prouva que *les écarts totalement ordonnés sont réductibles aux écarts bien ordonnés* (ou inversement bien ordonnés).

En 1936 Kurepa [3] *introduisit l'écart tout à fait abstrait* (pas nécessairement ordonné) aussi bien que, en particulier, *la distance abstraite* en partant d'une transformation uniforme du carré $E \times E = E^2$ sur un espace ou une structure, utilisant l'idée émise préalablement (par exemple [1] fin de III) qu' une structure peut définir une autre structure, et en particulier en insistant sur l'idée qu'un espace (ou structure) soit définissable par quelques propriétés directes liées à l'ensemble ou aux ensembles attachés à l'espace.

Entretemps, vint l'ouvrage de A. Weil [1] sur les *espaces uniformes*. Nous prouverons que *ces espaces admettent un écart simple* (Th. 7.1); nous y reviendrons dans un autre endroit. A partir de 1945 M. Fréchet [3]—[5] s'est occupé des écarts totalement ordonnés dans le but de les rapprocher des espaces uniformes; R. Doss [1]—[3], J. Colmez [1]—[3], Appert [1] etc. considéraient aussi des écarts ordonnés et les liens de ceux-ci avec des espaces uniformes. D'autre part, Kurepa [5] considéra des *espaces abstraits admettant une base ramifié de voisinages* d'une part et les *espaces définissables par des tableaux ramifiés* de voisinages d'autre part. R. Doss trouva un lien entre les derniers espaces et les espaces pseudo-métriques non métriques; P. Papić prouva récemment que *chaque espace à une base ramifiée est définissable par un tableau ramifié,* ce qui simplifie l'étude de ces espaces-là.

Nous allons prouver que *tout espace pseudo-métrique vérifiant la condition* (I') *est métrique ou totalement ordonnable* (ou les deux), (cf. Th. 8.2.1) ce qui est à rapprocher de quelques considérations antérieurs. En particulier, *l'ordination alphabétique des complexes*, initiée par F. Bernstein [1] et développée surtout par F. Hausdorff [1] *nous montrera un écart bien ordonné.* La considération des *eT*-espaces (cf. § 1.4) ou espaces-tableaux que Kurepa a définis dans sa *Thèse* ([2] p. 72) donnera un exemple de plus d'une distance bien ordonnée. Il en est encore ainsi des *R-espaces* (v. ci-après 5.). La différence symétrique des ensembles est aussi un cas d'une distance abstraite. Dans l'ensemble des applications d'un ensemble donné S on peut définir aussi un *écart régulier* ou une *proximité régulière.*

En renvoyant à un ouvrage plus complet où nous exposerons plus amplement le sujet nous nous contentons de donner ici quelques résultats dont quelques- uns datent depuis 19 ans (cf. aussi Menger [1], Price [1] et Kalisch [1]).

1. *L'écart et l'écart dual (la proximité). Quelques types d'écarts*

Soit $M = (M, —)$ un espace abstrait; cela veut dire qu'à tout $X \subseteq M$ on fait associer un ensemble, désigné par $\overline{X}$ et faisant partie de M. Par conséquent, chaque espace représente une organisation de l'ensemble des points de l'espace. Cette organisation peut servir à définir d'autres organisations (structures).

1,1. Ecart abstrait. Proximité abstraite. Axiomes O^1, O^2, O^3, $O^{1'}$. E étant un ensemble et M un espace (ou une structure quelconque) on considérera une application ϱ de $E^2 = E \times E$ sur M; cela veut dire que, pour tout $(a, b) \in E^2$, $\varrho\,(a, b)$ est un point de M; en particulier, $\varrho\,(a, a) \in M$. Dans le cas général $\varrho\,(a, b) \neq \varrho\,(b, a)$; mais pour simplifier l'exposition nous nous restreindrons ici au cas symétrique où $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$. L'élément $\varrho(a, b)$ peut être appelé *l'écart de* b *à partir de* a ou *la proximité de* b *à* a ou le *degré de proximité de* b a. Le cas le plus connu de l'écart est celui où $\varrho(a, b)$ est un nombre réel ≥ 0 (Fréchet 1905). Mais l'existence d'un écart abstrait quelconque entre les éléments de E peut entraîner une structure (organisation) au sein de E. De ces deux *dénominations duales: écart* et *proximité,* l'une se prête mieux dans un cas, l'autre dans un autre cas. Le passage de l'une à l'autre se fait en permutant les signes $<$ et $>$ et en changeant convenablement les dénominations (par exemple: initial — terminal etc.). Indifférement, on peut se servir des deux modes d'expositions, et parler donc de *M-écart* ou de *M-proximité.*

Pour simplifier, nous supposerons que les axiomes O^1, O^2, O^3 que voici soient vérifiés (v. Kurepa [3]).

O^1. (*Axiome d'identité*) $\varrho(a, b) = \varrho(a, a) \Longrightarrow a = b$;

O^2. (*Axiome de symétrie*) $\varrho(a, b) = \varrho(b, a)$.

Si M est un espace et si ϱ est un M-écart dans E c'est-à-dire si $\varrho(a, b) \leqslant M$, $(a, b \leqslant E)$ alors par l'axiome d'organisation O^3 que voici la structure de M se transforme en une structure sur E.

O^3. Si $a \leqslant E$ et $F \subseteq E$, alors a est contigu à F dans E, symboliquement $a \leqslant \overline{F}$ si et seulement si $\varrho(a, a)$ est contigu à $\varrho(a, F)$ dans M:

$$a \leqslant \overline{F} \Longleftrightarrow \varrho(a, a) \leqslant \overline{\varrho(a, F)}; \quad \text{ici } \varrho(a, F) = \{\varrho(a, x) \mid x \leqslant F\}.$$

1.2. O p é r a t e u r $\mathscr{E}[M]$. Si pour un espace E il y a un espace (structure) M et un M-écart ϱ tels que les axiomes O^1, O^2, O^3 soient vérifiés, nous dirons que l'espace E est un M-espace ou que E est définissable moyennant un écart abstrait symétrique extrait de M, ce que nous indiquerons par $E \leqslant \mathscr{E}[M]$ ou tout simplement par $E[M]$. Enonçons tout de suite la condition $O^{1'}$ que voici (cf. K u r e p a [3])[1]:

$O^{1'}$ (*condition de continuité*) Si $a \leqslant E$, $F \subseteq E$ et si $a \leqslant \overline{F}$, alors

$$\varrho(a, a) \leqslant \overline{\varrho(F, F)}; \quad \text{ici } \varrho(F, F) = \{\varrho(f, f) \mid f \leqslant F\}.$$

Nous allons passer en revue quelques classes d'écarts et de proximités. On peut parler de différentes espèces d'écarts; on aura ainsi l'écart numérique, ordonné, bien ordonné, ensembliste, spatial etc. suivant qu'il est un nombre, un point d'un ensemble ordonné, un ensemble, un point d'un espace etc.

2. *Écart numérique. Écart bien ordonné*

2.1. É c a r t s n u m é r i q u e s (F r é c h e t [1]). Dans ce cas M est l'ensemble (ou plûtot l'espace) des nombres réels ≥ 0; $\varrho(a, a) = 0$.

2.2. É c a r t s t o t a l e m e n t o r d o n n é s o u b i e n o r d o n n é s (K u r e p a [1], F r é c h e t [3] [4], D o s s [1], C o l m e z [1]). M est un ensemble (ou l'espace) totalement ordonné avec un premier (ou dernier) point ζ; on pose $\varrho(a, a) = \zeta$; si en particulier $\zeta = \omega_\alpha$ et M est l'ensemble des ordinaux $\leqq \omega_\alpha$, on obtient la classe E_α, le cas E_0 coïncidant avec la classe de Fréchet des écarts numériques (pour la démonstration v. K u r e p a [4] [5]).

2.3 O r d i n a t i o n a l p h a b é t i q u e e t l'é c a r t. Soient ω_α un ordinal initial régulier et T une famille de ω_α — complexes d'éléments d'un ensemble C; si l'on pose $i(a, a) = \omega_\alpha$ $(a \leqslant T)$ et si l'on désigne pour $a, b \leqslant T$ par $i(a, b)$ le premier ordinal $\xi < \omega_\alpha$ tel que $a_\xi \neq b_\xi$, alors i est une proximité symétrique bien ordonnée.

---

[1]) Dans notre définition primitive la condition de continuité fut imposée à priori à l'espace considéré (v. K u r e p a [3]).

La métrique i jouit d'une propriété remarquable; c'est que si $a, b, c \leqslant T$, on a le triangle $\{a, b, c\}$; dans la i-métrique ce triangle est isoscèle: *l'ensemble* $i\{a, b, c\}$ *des écarts* $i(a, b)$, $i(b, c)$, $i(c, a)$ *se compose de* $\leqq 2$ *éléments*.

Lemme 2.3.1. $k\,i\{a, b, c\} \leq 2$. *De plus* $i(a, c) \geq \inf\{i(b, a), i(c, b)\}$ (cf. Kurepa, *Thèse*, p. 44 L. 5.1 et 5.4 relation (ϱ)). Là, $i\{a, b, c\}$ désigne l'ensemble des $i(x, y)$ $(x, y \leqslant \{a, b, c\}, x \neq y)$.

En effet, dans le cas contraire, on aurait trois ordinaux distincts: $\alpha = i(b, c)$, $\beta = i(c, a)$, $\gamma = i(a, b)$; supposons que $\alpha < \beta < \gamma$; alors les relations $i(c, a) = \beta$, $c_{\beta\cdot} = a_{\beta\cdot}$, $\beta < \gamma = i(a, b)$, $a_{\gamma\cdot} = b_{\gamma\cdot}$ entraînent $b_{\beta\cdot} = a_{\beta\cdot} = c_{\beta\cdot}$ donc $b_{\beta\cdot} = c_{\beta\cdot}$ donc (à cause de $\alpha < \beta$) en particulier $b_{\gamma\cdot} = c_{\gamma\cdot}$ contrairement à la définition de $\alpha = i(b, c)$. Le reste du lemme se démontre immédiatement.

Voici une conséquence bien utile concernant l'écart i:

Lemme 2.3.2. *Si* $i(a, b)$, $i(b, c) \geq \xi$ *alors* $i(a, c) \geq \xi$ *et dualement*[2)].

Le lemme 2. 3. 2. s'ensuit immédiatement de la seconde partie du lemme 2. 3. 1. Le lemme 2. 3. 2. (ou plutôt son dual) fut utilisé surtout par R. Doss.

3. *Condition* (Δ) *de triangle isoscèle. Condition* (J). *Condition* (Δ_2)

Pour un écart ordonné e et la proximité ordonnée i formulons la condition (Δ) et la condition duale (Δ^*) que voici:

Condition de triangle isoscèle:

$$(\Delta) \qquad e(a, b) \leq \sup\{e(a, c),\ e(c, b)\}$$

et dualement

$$(\Delta^*) \qquad i(a, b) \geq \inf\{i(a, c),\ i(c, b)\}.$$

Les conditions (Δ) et (Δ^*) entraînent respectivement:

Condition (J) $e(a, b) < \xi$, $e(b, c) < \xi \Longrightarrow e(a, c) < \xi$

Condition (J^*) $i(a, b) > \xi$, $i(b, c) > \xi \Longrightarrow i(a, c) > \xi$.

Condition (Δ_2) (cf. L. 3.1)):

$$k\{a\,b,\ b\,c,\ c\,a\} \leq 2.$$

Là, a, b, c sont points de l'espace considéré: k signifie »*le cardinal de*«.

Il faut remarquer qu'on peut considérer la condition (Δ_2) indépendamment des conditions (Δ), (Δ^*), (I), (I^*), et en particulier dans le cas où lécart n'est pas totalement ordonné.

Lemme 3.1. *Si* e *vérifie* (Δ), *alors*

$$e(a, x) = \xi, \quad e(x, b) < \xi \Longrightarrow e(a, b) = \xi.$$

---

2) Evidemment, ξ désigne un ordinal quelconque $\leqq \omega_\alpha$; il va sans dire que $\{a, b, c\} \subseteq T$.

Supposons par contre que $e(a, b) \neq \xi$, donc $e(a, b) < \xi$ ou $e(a, b) > \xi$. Le second cas ne peut pas avoir lieu, le triangle $\{a, x, b\}$ étant isoscèle. Le premier cas $e(a, b) < \xi$ ne peut pas avoir lieu non plus, sans quoi on aurait $e(a, b) < \xi$, $e(b, x) < \xi$ et donc à la suite de J aussi $e(a, x) < \xi$, contrairement à l'hypothèse $e(a, x) = \xi$.

Considérons un espace E et les ensembles

$$(1) \qquad E(a\,; = \xi) = \{x \mid x \in E,\ a\,x = \xi\}$$

$$(2) \qquad E(a\,; < \xi) = \{x \mid x \in E,\ a\,x < \xi\}$$

$$(3) \qquad E(a\,; \leq \xi) = \{x \mid x \in E,\ a\,x \leq \xi\}.$$

Théorème 3.1. *Si l'espace vérifie* (Δ), *les ensembles de la forme (1) sont deux à deux disjoints ou identiques. Les ensembles de la forme (2) forment une famille ramifiée; il en est de même des ensembles de la forme (3) aussi bien que de ceux qui sont de la forme (2)* $\vee$ *(3).*

Si $E(a\,; < \xi)$, $E(a', < \xi')$ *ont un point* p *en commun, alors*

$$(4) \qquad \xi \leq \xi' \Longrightarrow E(a\,; < \xi) \subseteq E(a', < \xi').$$

On a

$$(5) \qquad E(a\,; = \xi) = \bigcup_x E(x\,; < \xi), \quad (x \in E, a\,x = \xi).$$

Prouvons (4).

Premier cas: $\xi = \xi'$. Si alors $ax < \xi$, on aura aussi $a'x < \xi$, ce qui résulte des relations $ax < \xi$, $ap < \xi$. De même, si $a'x' < \xi'$, on aura $ax' < \xi$. Par conséquent, les sphéroïdes $E(a; < \xi)$, $E(a' < \xi)$ sont disjoints ou identiques.

Second cas: $\xi \neq \xi'$, par exemple $\xi < \xi'$. D'après le premier cas on aura

$E(a\,; < \xi') \subseteq E(a'\,; < \xi')$; ce qui, vu $E(a, < \xi) \subseteq E(a, < \xi')$ entraîne $E(a, < \xi) \subseteq E(a'\,; < \xi')$.

Le reste de la relation (4) se prouve aisément.

Prouvons encore la décomposition (5). Que $(5)_1 \subseteq (5)_2$ c'est bien évident. Prouvons la réciproque: si $p \in (5)_2$, alors $p \in (5)_1$. Or, $p \in (5)_2$ veut dire qu'il existe un point $x \in E$ vérifiant $ax = \xi$, $xp < \xi$; à la suite du lemme 3.1 on aura $ap = \xi$ donc $p \in (5)_1$.

4. eT-*espaces (ou espaces-tableaux) et l'écart abstrait.* T-espaces

4.1. Les eT-espaces. Soit T un arbre c'est-à-dire un tableau ramifié non vide: un ensemble ordonné tel que pour tout $x \in T$ l'ensemble ox ou $(-, x)_T$ des prédécesseurs de x dans T soit bien ordonné. Nous posons $\gamma x = t(ox) =$ type d'ordre de ox; *le rang, la longueur, ou l'indice* γT de T est défini par $\gamma T = t\{\gamma x \mid x \in T\}$, t y indique *»le type d'ordre de«. La rangée* $R_\alpha T$ de T se définit par $R_\alpha T = \{x \mid x \in T, \gamma x = \alpha\}$. Ces notions étaient considérées dans

Kurepa [2]. Nous y avons considéré (p. 72) T comme un espace de la façon suivante. Soit $a \in T$; si a n'a aucun prédécesseur, l'ensemble $\{a\}$ sera le seul voisinage de a; il en sera de même si a possède un prédécesseur immédiat. Dans chaque autre cas soit $z < a$; alors $V(a) = 1z - 1a$, $1a$ ou $(a, —)$ désignant l'ensemble des points de T succédant à a:

$$1a = \{y \mid y > a,\ y \in T\}.$$

On obtient ainsi la famille des voisinages de a.

En se servant de cette famille de voisinages on définit la contiguité de a d'un ensemble $X \subseteq T$ d'une façon bien connue: $a \in \overline{X}$ équivaudra à ce que chaque voisinage de a contient un point de X. En faisant ainsi pour tout $a \in T$, on obtient un espace bien défini. La classe des espaces pareils c'est, par définition, la classe des *eT-espaces* (cf. [1] p. 72).

Nous considérons encore *la condition (N)* que voici:

(N) *Si* a, b *ont les mêmes prédécesseurs et si l'ensemble de ceux-ci n'a pas un dernier élément, alors* a = b; *symboliquement*:

$$(a, b) \in T,\quad oa = ob,\quad \gamma a \in (\mathrm{II}) \Longrightarrow a = b.$$

Sans mention expresse du contraire, on supposera que par la suite T vérifie (N).

Lemme 4.1.1. *Chaque* eT-*espace peut être défini au moyen d'un écart bien ordonné de manière que chaque triangle soit isoscèle et que la condition* (Δ^*) *soit verifié pour chaque triple de points distincts* (cf. Lemmes 2.3.1, 2.3.2).

En effet, définissons

$$(a, a) = \gamma a \quad \text{ou} \quad \gamma a + 2 \quad \text{suivant que} \quad \gamma a \in (\mathrm{II}) \ \text{ou}\ \gamma a \in' (\mathrm{II})$$

$$(a, b) = t\big((-, a] \cap (-, b]\big) \quad \text{si} \quad a \neq b.$$

Alors les axiomes O^1, O^2, O^3 sont démontrables.

$$O^1 \qquad a \neq b \Longleftrightarrow (a, b) \neq (a, a).$$

On a $(a, a) \in \{\gamma a, \gamma a + 2\}$. Si $(a, a) = \gamma a$, considérons les deux cas, suivant que $a < b$ ou $\sim (a < b)$. Si $a < b$, $(a, b) = \gamma a + 1 > \gamma a = (a, a)$; si $\sim (a < b)$, alors $(— a] \cap (—, b] \subseteq (—, a)$; l'égalité y ne peut avoir lieu que si le noeud $|a|$ de seconde espèce est multiponctuel, cas que nous excluons à la suite de la condition (N). Reste le cas où $(a, a) = \gamma a + 2$; ce cas est bien simple puisque $(a, b) < \gamma a + 2$ pour chaque $b \neq a$.

O^2 $(a, b) = (b, a)$; c'est évident.

O^3 Pour que $a \in \overline{F}$, il faut et il suffit que tout voisinage $V(a, a)$ de (a, a) contient un (a, f) de $(a, F) = \{(a, x) \mid x \in F\}$.

La propriété O^3 est évidente étant donné que pour tout $z < a$ on a

$$(1) \qquad 1z - 1a = \{x \mid x \in T, \gamma z + 1 < (a, x) \leq (a, a)\}.$$

Tout d'abord $(1)_1 \subseteq (1)_2$. En effet, soit $b \in (1)_1$. On a deux cas, suivant que $z < b \leq a$ ou $b \in' (z, a]$. Si $z < b < a$, alors $\gamma z < < \gamma b < \gamma a$ donc $\gamma z + 1 < \gamma b + 1 \leq \gamma a$ donc $\gamma z + 1 < (a, b) \leq (a, a)$ et par conséquent $b \in (1)_2$.

Reste le cas où $b \in' (z, a]$; soit alors b' le premier point de (z, a) vérifiant $b' \| b$ donc $(-b') \cdot < b$. Par conséquent $(a, b) = = t(-, a] \cap (-, b] = t(-, b') = \gamma b' \in [\gamma z + 1, (a, a)]$ donc $(a, b) \in \in (1)_2$. Ainsi donc $(1)_1 \subseteq (1)_2$. Dualement $(1)_2 \subseteq (1)_1$. En effet, soit ξ un ordinal $< (a, a)$; soit $x, x \in T$ un point quelconque tel que

$$(2) \qquad \xi + 1 \leq (a, x) \leq (a, a).$$

Soit $a_\xi \in R_\xi\ [a]$; on a $\xi < (a, a)$ et le point a_ξ est bien determiné et vérifie (2) pour $x = a_\xi$ puisque $(a_\xi, a) = \gamma a_\xi + 1 = \xi + 1 < (a, a)$. Aucun x vérifiant (2) ne peut précéder a_ξ; c'est que si $x < a_\xi$, alors $x < a_\xi < a$ et $(a, x) = t(-, x] = \gamma x + 1 < \xi + 1$ puisque $\gamma x < \gamma a_\xi = \xi$. On n'a pas $x \| a_\xi$ non plus; c'est que si $x \| a_\xi$, alors $(a, x) \leq t(-, a_\xi) = \xi$. De même si x vérifie (2), alors $\sim (a < x)$, sans quoi $(a, x) = \gamma a + 1 > \gamma a = (a, a)$. Bref, nécessairement, si $x \in (1)_2$, alors $x \in (1)_1$.

Prouvons que chaque triangle est isoscèle: a, b, c étant 3 points distincts, on aura

$$(a, b) \geq \inf \{(a\, c),\ (c, b)\}.$$

En effet, on aura

$$(3) \qquad (-, a] \cap (-, c] \subseteq (-, c]$$

$$(4) \qquad (-, b] \cap (-, c] \subseteq (-, c].$$

Par conséquent, les ensembles $(3)_1$ $(4)_1$ sont comparables: on aura ou bien $(3)_1 \subseteq (4)_1$ ou bien $(3)_1 \supset (4)_1$ et dès lors $(a, b) = (a, c)$ et $(a, b) = (b, c)$. Q. E. D.

L e m m e 4. 1. 2. *Soit* $\mathrm{a} \in \overline{\mathrm{F}}$ *avec* $\mathrm{a} \in \mathrm{T}$, $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{T}$; *soit* h *un procédé faisant correspondre à chaque* $\mathrm{f} \in \mathrm{F}$ *un ensemble non vide* h (f) *vérifiant* $\mathrm{h}(\mathrm{f}) \subseteq [\mathrm{f}, -) \setminus [\mathrm{a}, -)$; *si* $\mathrm{h}\,\mathrm{F} = \bigcup_{x \in F} \mathrm{h}(\mathrm{x})$, *on aura aussi* $\mathrm{a} \in \overline{\mathrm{h}\mathrm{F}}$ *et viceversa:* $\mathrm{a} \in \overline{\mathrm{F}} \Longleftrightarrow \mathrm{a} \in \overline{\mathrm{h}\mathrm{F}}$.

La preuve en est immédiate.

Dans le cas général, un eT-espace ne vérifie pas la condition $O^{1'}$. Par exemple, en considérant la famille σ_0 des ensembles bien ordonnés non vides bornés extraits de l'ensemble ordonné de nombres rationnels, l'ensemble σ_0 étant ordonné par la relation $\leq$ disant »*est une portion initale de*«, l'ensemble σ_0 est un arbre de rang ω_1 et on s'assure que l'espace abstrait $e\sigma_0$ ne vérifie pas la condition $O^{1'}$.

Dès lors, on a le suivant:

P r o b l è m e 4. 1. 1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un* eT-*espace vérifie la condition* $O^{1'}$.*

* Entretemps, Z. M a m u z i ć a résolu ce problème (cf. ce *Glasnik* p. 96).

Remarquons dès à présent que chaque eT-espace est homéomorphe d'un espace totalement ordonné (cf. Théorème 9.10).

4.2. T-espaces. A étant un arbre définissons *le T-espace A* de la manière suivante:

Soit $p \in A$; si $\gamma p \in$ (II), alors $\{p\}$ sera le voisinage de p.

Si $\gamma p \in$ (II), soit $p_0 \in A$, $p_0 < p$; posons

$$A(p_0, p| = \{y \mid y \in A, p_0 < y, \gamma y \leq p\}.$$

L'ensemble $A(p_0, p|$ sera considéré comme voisinage de p.

En faisant varier p_0 et p, on obtient ainsi une famille d'ensembles définissant ce que nous appellerons le T-espace A.

Par exemple, à l'arbre σ_0 de tout à l'heure correspond le T-espace σ_0; il nous semble que cet T-espace n'admet pas un écart bien ordonné, contrairement à ce qui se passe avec le eT-espace σ_0.

5. *Les* R-*espaces*

Rappelons d'abord qu'un système d'ensembles est *ramifié* pourvu que ses éléments soient comparables ou disjoints. Un système ramifié T est un *tableau ramifié* si pour chaque $X \in T$ la famille des $Y \in T$ vérifiant $Y \supset X$ est bien ordonné par rapport à la relation $\supset$. T étant un tableau ramifié d'ensembles, on peut considérer chaque $X \in T$ comme voisinage de chaque $x \in X$; l'ensemble $\cup X (X \in T)$ devient ainsi un espace. Ces espaces sont appelés les R-*espaces*.[3]

En particulier on peut considérer le cas où T vérifie ces deux conditions (cf. aussi les T complets dans Kurepa [2], pp. 81—84):

T_1. *Pour chaque point* p, *la famille* T(p) *des* X $\in$ T *vérifiant* p $\in$ X *a l'ensemble* $\{$p$\}$ *comme l'intersection de ses éléments.*

$$(T_1) \qquad \cap T(p) = \{p\}.$$

(C) *Pour chaque chaîne* K $\subseteq$ T *on a ceci:*

Si k $\cap$ K > 1, *alors* $\cap$ K $\in$ T.

Lemme 5.1. *Si* T *vérifie* (T_1) *et* (C), *alors chaque noeud* N_2 *de* T *est constitué d'un seul élément de* T[4].

Ceci étant on a (cf. Kurepa [3] p. 1050) le

Théorème 5.1. *Soit* S *un espace définissable moyennant un tableau ramifié d'ensembles,* T, *tel que chaque élément de* T *soit voisinages de chacun de ses points. Si l'espace vérifie l'axiome* (T_1)

---

[3]) cf. Kurepa ([3] p. 1050 et [5] p. 128 (»*espaces admettant une base ramifiée de voisinages*« et les $\mathcal{T}$ *(T) - espaces*)). P. Papić [1]—[3] a étudié de plus près ces espaces et a prouvé en particulier que la supposition du bon ordre de chaque chaîne extraite d'un système ramifié ne présente aucune restriction essentielle. *La dénomination R-espace* provient de P. Papić [1]—[3].

[4]) Chaque ensemble maximal $X \subseteq T$ dont les éléments possèdent les mêmes prédécesseurs s'appelle un noeud de T. Un noeud X est de seconde espèce ou un N_2, si l'ordinal β vérifiant $X \subseteq R_\alpha T$ est de seconde espèce.

de séparation de Fréchet (pour chaque a $\leqq$ E *la famille* T (a) *des voisinages de* a *possède pour l'intersection l'ensemble* $\{a\}$), *alors l'espace* S *admet un écart bien ordonné, vérifiant la condition du triangle isoscèle tel que, en particulier,* S $\leqq \mathscr{E}$ [γT) *et* (a, b) $\geqq$ $\geqq$ inf. $\{$(a, c), (c, b)$\}$, (a, b, c $\leqq$ S).

Tout d'abord, pour chaque $a \leqq S$ soit γa le type d'ordre de l'ensemble $T(a)$ des éléments de T contenant le point a. Pour que a soit nonisolé, il faut et il suffit que l'ordinal γa soit de seconde espèce: $\gamma a \leqq$ (II).

Définissons l'écart (a, b) des points $a, b \leqq S$ comme il suit:

$$(a, b) = t(T(a) \cap T(b)) .$$

Prouvons que les trois axiomes O^1, O^2, O^3 soient vérifiés.

$$O^1 \quad (a, a) = (a, b) \Rightarrow a = b .$$

En effet, la relation $(a, b) = (a, a)$ implique

$$T(a) \cap T(b) = T(a)$$

et qu'en particulier $a, b \leqq X$ pour chaque $X \leqq T(a)$. Or, l'intersection des $X \leqq T(a)$ étant $\{a\}$, à la suite de l'hypothèse que l'axiome de Fréchet soit vérifié, on en déduit que $a = b$.

Vérifions la condition (Δ^*) du triangle isoscèle. Tout d'abord.

$$(1) \qquad T(a) \cap T(b) \subseteq T(b) .$$

$$(2) \qquad T(c) \cap T(b) \subseteq T(b) .$$

Par conséquent, les ensembles $(1)_1$, $(2)_1$ sont portions initiales de la chaîne $T(b)$; on a donc soit $(1)_1 \subseteq (2)_1$ soit $(1)_1 \supseteq (2)_1$ et dès lors respectivement $(a, b) = (a, c)$ et $(a, c) = (b, c)$.

O^2 $(a, b) = (b, a)$ — c'est évident.

O^3. N é c e s s i t é: $\{a\}$, $F \subseteq S$, $a \leqq \overline{F'} \Rightarrow$ pour chaque ordinal $\alpha < (a, a)$ il y a un point $a_\alpha \leqq S$ vérifiant $\alpha < (a, a_\alpha) \leqq (a, a)$. En effet, il suffit de désigner par $a_\cdot$ un point quelconque de l'élément de $R_{\alpha+1} T$ contenant le point a.

S u f f i s a n c e: Si pour chaque $\alpha < (a, a)$ l'ensemble F contient un élément a_α tel que (1) $\alpha < (a, a^\alpha) \leq (a, a)$, alors $a \leqq \overline{F}$ c'est-à-dire que

$$T_\xi(a) \cap F \neq v ; \quad (\xi < \gamma a) .$$

Or, (1) veut dire que la partie commune de $T(a), T(a_\alpha)$ est d'un type d'ordre $\leqq (\alpha, \gamma a]$; en particulier $R_\alpha T(a)$ contient le point a_α de F. Puisque α est quelconque $\leq \gamma a$, on en déduit que $a \leqq \overline{F}$.

Quant à la condition de continuité $O^{1'}$, elle n'est pas vérifiée dans le cas général. En particulier, considérant le cas où chaque famille disjonctive de T soit $\leq \aleph_0$ l'espace correspondant vérifie

$O^{1'}$ au moins pour une base T si et seulement si $\gamma T < \omega_1$; contrairement à ce que nous avons écrit (Kurepa [3] p. 1050) qu'alors nécessairement S vérifie $O^{1'}$, cette assertion est équivalente au problème de Suslin, comme P. Papić a bien voulu me remarquer et en connexion avec quelques discussions initiées par Z. Mamuzić. D'après Papić, la condition $O^{1'}$ pour un R-espace S vérifiant $S \subseteq E(\gamma T)$ équivaut à ce que, quel que soit $\alpha < \gamma T$, l'union des éléments de $R_\alpha T$ soit à la fois ouverte et fermée (bien entendu, chaque élément de T est ambigu c'est-à-dire fermé et ouvert).

6. *Les espaces bien ordonnés et écarts abstraits*

α étant un ordinal soit $I(\alpha)$ l'ensemble des ordinaux $< \alpha$.

Théorème 6.1. *L'espace bien ordonné* $\mathrm{I}(\omega_\alpha)$ *peut être défini par un écart* $< \omega_\alpha$ *de telle sorte que la condition* $\mathrm{O}^{1'}$ *aussi bien que celle du triangle isoscèle subsistent; symboliquement:* $\mathrm{I}(\omega_\alpha) \subseteq \subseteq \mathrm{E}[\mathrm{I}(\omega_\alpha)] \cap \mathrm{O}^{1'}$, *et* $(a, b) \geq \inf\{(a\text{-}c), (c, b)\}$.

Pour s'en assurer, définissons, pour $a, b \subseteq I(\alpha)$ l'écart (a, b) de de la façon suivante:

$$(a, b) = \inf\{a, b\} + 1 \quad \text{si} \quad a \neq b$$

$$(a, a) = a \quad \text{ou} \quad a + 2, \quad \text{suivant que} \quad a \subseteq (\mathrm{II}) \quad \text{ou} \quad a \subseteq' (\mathrm{II}).$$

Les axiomes O^1, O^2, O^3, $O^{1'}$ sont vérifiés.

$$O^1 \qquad (a, b) = (a, a) \Rightarrow a = b.$$

Il s'agit de prouver qu'on n'a ni $a < b$ ni $a > b$. Premier cas: $a < b$ donc $(a, b) = a + 1$. Or $(a, a) = a$ ou $a + 2$ et aucun de ces nombres n'est égal à $a + 1 = (a, b)$. Reste le cas $a > b$ donc $(a, b) = b + 1 \leq a$. Si $b + 1 < a$, alors $b + 1$ n'est ni a ni $a + 2$ donc $(a, b) \neq (a, a)$; si $b + 1 = a$, alors $(a, a) = a + 2$ et de nouveau $(a, b) \neq (a, a)$.

O^3. Nécessité: si $a \subseteq F'$ et si $\alpha < (a, a)$ alors il y a un point $a_\alpha \subseteq F \setminus \{a\}$ tel que $\alpha < (a, a_\alpha) < (a, a)$. Tout d'abord, si $a \subseteq F'$ on a $(a, a) = a \subseteq \mathrm{II}$. Si $\alpha < a$, soit a_α un ordinal de F situé entre α et a; alors $(a_\alpha, a) = \alpha + 1$ est situé entre α et a.

Suffisance: Si pour tout $\alpha < (a, a)$ l'ensemble F contient un point $a_\alpha \neq a$ vérifiant (2) $\alpha < (a, a_\alpha) < (a, a)$ alors $a \subseteq F'$. Tout d'abord, on voit que $(a, a) \subseteq \mathrm{II}$ et donc $a \subseteq \mathrm{II}$: d'autre part, les relations (2) impliquent que $\alpha < a_\alpha < a$ et cela veut dire exactement que $a \subseteq F'$.

$O^{1'}$: Si $a \subseteq \bar{F} \Rightarrow (a, a) \subseteq \overline{(F, F)}$. Il Suffit de considérer le cas où $a \subseteq F'$. Donc $a \subseteq \mathrm{II}$ et $(a, a) = a$. Si alors pour tout $\alpha < a$ l'on désigne par a_α un point de F tel que $\alpha < a_\alpha < a$; on aura $(a_\alpha, a_\alpha) \subseteq \subseteq \{a_\alpha, a_\alpha + 2\}$ donc en tous les cas $\alpha < (a_\alpha, a_\alpha) < (a, a)$ ce qui veut dire précisément que $(a, a) \subseteq (F, F)'$.

Le reste du théorème 6.1 se prouve comme la partie correspondante dans L. 2.3.1., 2.3.2., 4.1, T. 5.1.

Corollaire 6.1. $I(\omega_1) \leqq E[I(\omega_1)] \cap O^{1'}$.

Ce corollaire se trouve dans la Note [8] mais la construction de l'écart y est mal faite.

Corollaire 6.2. $I(\omega_2) \leqq E[I(\omega_1)] \cap O^{1'} \cap (\Delta^*)$.
En particulier, la proximité définie ci-dessus vérifie la condition (J^*). Cela constitue la réponse à une question posée dans notre Note [3] p. 1051: il suffit de poser $\varphi_a(n) = n = \psi_a(n)$.

Remarque 6.1. *Chaque espace bien ordonné est un* eT-*espace.*

Problème 6.1. *A-t-on* I $(\omega_1) \leqq$ E $[R_n]$ *pour un entier* n?

Répondant à un problème de Kurepa, Papić a prouvé que $I(\omega_1) \leqq' E[R_n] \cap O^{1'}$. R_n *y* désigne l'espace cartésien à n dimensions.

Lemme 6.1. *Soit β un nombre ordinal. Si $\beta < \omega_1$, l'espace* I (β) *est métrique admettant un écart à un seul zéro vérifiant la condition* (Δ) *(donc aussi* (J) *et* (Δ_2)). *Et réciproquement.*

Que $I(\beta)$ soit métrique c'est bien connu. Il s'agit de voir de plus que la métrique puisse satisfaire Δ. Or, d'une part $I(\beta)$ est un R-espace de rang $\leq \omega$ (Papić [3] pp. 38—40, [4] Th. 9). D'autre part, $I(\beta)$ étant un R-espace, il admet un écart vérifiant Δ (cf. L. 4.1.1); en particulier, $I(\beta)$ étant définissable par un arbre T de rang $\leq \omega$, l'écart a un seul zéro: il suffit de poser $i(x, x) = \omega, i(x, y) = i(T(x), T(y))$ si $x \neq y$.

La réciproque résulte de ce que si $\beta \geq \omega_1$, l'espace $I(\beta)$ n'est pas distanciable.

7. *L'écart abstrait et les espaces uniformes*

7.1. Espaces uniformes. Soit E un espace uniforme (cf. Bourbaki [1], A. Appert-Ky Fan [1]) c'est-à-dire un espace (V) tel que pour chaque $a \leqq E$ la famille des voisinages de a coïncide avec la famille des ensembles

$$V(a) = \{b \mid b \leqq E, (a, b) \leqq V\} ,$$

V parcourant une structure uniforme U relativement à $E \times E$; cela veut dire que U est un filtre dans $E \times E$ ayant ces 3 propriétés:

1. $\Delta \subseteq V (V \leqq U)$; là $\Delta = \{(a, a) \mid a \leqq E\}$;

2. $V \leqq U \Longrightarrow V^{-1} \leqq U$;

3. Si $V \leqq U$, il y a un $W \leqq U$ vérifiant $W W \subseteq V$.

De plus, nous supposerons que l'espace soit *séparé* c'est-à-dire que

$$\Delta = \bigcap V (V \leqq U) .$$

D'après un résultat de Z. Mamuzić si l'espace n'est pas séparé, on peut prouver que l'espace ne vérifie pas la condition $O^{1'}$. Comme on sait, nous pouvons supposer que $V = V^{-1}$ pour chaque $V \leqq U$ (cf. Bourbaki [1] ch. 2.).

Théorème 7.1.1. *Tout espace uniforme separé E est définissable moyennant un écart abstrait admettant un seul zéro; de plus, l'écart vérifie la condition de régularité O^4 ci-après.*

En effet, introduisons d'abord la famille $U/2$ comme la famille consistant des ensembles

$$V/2 = \{(a, b) \cup (b, a) \mid (a, b) \in V\}.$$

Par conséquent, si $x \in V/2$, x est de la forme $(a, b) \cup (b, a)$ où $a, b \in E$ et en particulier $(a, b) \in V$. On voit que $\Delta \subseteq V/2$ et que

$$\Delta = \bigcap_V V/2 \quad (V \in U).$$

Ceci étant, définissons l'écart u de la façon suivante:

$$u(a,a) = \Delta \quad (a \in E),$$

$$u(a, b) = (a, b) \cup (b, a) \quad \text{pour chaque} \quad \{a, b\}_{\neq} \subseteq E.$$

En définissant l'ensemble M comme celui dont les éléments sont de la forme

$$\Delta \quad \text{ou} \quad (a, b) \cup (b, a)$$

l'écart u représente bien une application univoque de $E \times E$ sur M; les ensembles $V/2\,(V \in U)$ seront considérés comme voisinages du »zéro« $t_0 = \Delta$.

Prouvons que les axiomes O^1—O^3 sont vérifiés. Ceci est évident pour les axiomes O^1 et O^2, reste l'axiome O^3.

Nécessité. Soient $(a), X \subseteq E$ et $a \in \overline{X}$ dans l'espace uniforme E. Cela veut dire que pour tout $V \in U$, il y a un point $(a, b) \in V$ avec $b \in X$ donc $b \in V(a)$. Par conséquent $u(a, b) = (a, b) \cup (b, a) \in V/2$; autrement dit, quel que soit le »voisinage« $V/2$ de Δ dans M, il y a un point $b \in X$ tel que $u(a, b) \in V/2$ donc $u(a, a) \in u(a, X)$ et ceci, par définition, veut dire que a est contigu à X (relativement à l'écart u).

Suffisance. Réciproquement, supposons que, quel que soit $V/2$ il y a un point $b \in X$ tel que $u(a, b) \in V/2$ donc $(a, b) \cup (b, a) \in V/2$; or, cela veut dire que $(a, b), (b, a) \in V$ donc $(a, b) \in V$ et $b \in V(a)$; c'est-à-dire a est contigu à X dans la topologie uniforme aussi.

7.2. Écart abstrait régulier. Axiome O^4. Dès le commencement, M. Fréchet [1], [2] considérait des écarts réguliers numériques; par définition, un écart numérique est régulier s'il existe une fonction réelle f de variable réelle telle que $f(x) \geq 0$ $(0 \leq x < \infty)$ et que $f(x) \to 0$ si $x \to 0$. Plusieurs auteurs se sont occupés d'écarts réguliers (cf. Apert-Ky Fan [1] ch. IV).

La régularité de l'écart abstrait dans le cas où l'ensemble des zéros est monoponctuel, s'énonce par l'axiome O^4 que voici:

Axiome O^4. *Quel que soit le voisinage* X *de »zero«* ζ, *il y a un voisinage* Y *de* ζ *tel que, quel que soit* a $\in$ E *les relations* u (a, b), u (b, c) $\in$ Y *entraînent* u (a, c) $\in$ X.

L'équivalence de la condition O^4 et de l'axiome U_3 sur les structures est manifeste.

Tout d'abord $O^4 \Longrightarrow U_3$. En effet, $u(a, b) \leqslant Y$, $u(b, c) \leqslant Y$ impliquent en particulier $(a, b) \leqslant W$, $(b, c) \leqslant W$ où $Y = W/2$; d'autre part, $u(a, c) \leqslant X$ implique $(a, c) \leqslant V$ où $V/2 = X$. Ainsi donc (a, b), $(b, c) \leqslant W \Longrightarrow (a, c) \leqslant V$.

Réciproquement, $U_3 \Longrightarrow O^4$. Tout d'abord, $(a, b) \leqslant W$ implique $u(a, b) \leqslant W/2$; de même $(b, c) \leqslant W \Longrightarrow u(b, c) \leqslant W/2$; $(a, c) \leqslant V \Longrightarrow$ $\Longrightarrow u(a, c) \leqslant V/2$; donc l'implication $(a, b), (b, c) \leqslant W \Longrightarrow (a, c) \leqslant V$ entraîne l'implication $u(a, b), u(b, c) \leqslant Y/2 \Longrightarrow u(a, c) \leqslant V/2$. Q. E. D.

Ainsi le théorème 7.1.1 est complètement démontré.

8. *Espaces pseudo-distanciés*

8.1. Conditions (*R*) et (*I'*). (Voir Kurepa [1], [4], [5], Fréchet [2], [3], [4], [5], Appert-Ky-Fan [1], Papić [1]—[5]). Soit ω_α un ordinal initial régulier; la classe (D_α) des espaces fut définie par Kurepa comme celle admettant un écart dual symétrique bien ordonné $\leq \omega_\alpha$ vérifiant la condition de régularité que voici:

Condition (R). *Il y a une fonction φ faisant correspondre à tout ordinal* n $< \omega_\alpha$ *un ordinal* φ(n) $< \omega_\alpha$ *de manière que*

$$(a, b), (a, c) > \varphi(n) \Longrightarrow (b, c) > n$$

pour chaque triple de points de l'espace.

Remarque 8.1. *La régularité globale* précédente est équivalente à la *régularité locale* que voici: *à chaque point* a *de l'espace et à chaque ordinal* n $< \omega_\alpha$ *correspond un ordinal* φ_a(n) $< \omega_\alpha$ *tel que*

$$(a, b), (a, c) > \varphi_a(n) \Longrightarrow (b, c) > n,$$

quels que soient les points b, c *de l'espace.*

Ce fait est dû à Niemytski [1] pour $\alpha = 0$ (cf. Appert-Ky Fan [1] p. 78) et à Doss [3] pour $\alpha > 0$.

Exemple 8.1.1. Soit ω_α un nombre ordinal initial non cofinal à ω_0 Considérons un *R*-espace *S* défini par un tableau *T* d'ensembles de rang ω_α; supposons que *S* ait au moins un point de caractère $\aleph_\alpha$. Désignons par S_0 l'espace qu'on déduit de *S* en y déclarant comme isolé chaque point x de *S*, tel que la famille des $Y \leqslant T$ vérifiant $\{x\} \subseteq Y$ soit cofinale à 1 ou à ω_β, avec $\beta < \alpha$. Alors S_0 est un D_α-espace.

En effet, soit $i(x, x) = \omega_\alpha$; soit, pour $x \neq y$, $i(x, y)$ le type d'ordre de l'intersection $T(x) \cap T(y)$. On voit bien que i est une pseudodistance dans l'espace S_0. Ainsi par exemple, la condition (R) de régularité est une conséquence immédiate de ce que pour chaque triple $a, b, c \leqslant S$ l'ensemble

$$\{i(a, b),\ i(b, c),\ i(c, a)\}$$

possède au plus deux points; il en résulte que la fonction φ dans l'énoncé (R) peut être supposée être l'identité.

C o n d i t i o n s (I') (I'_m). Soit m un nombre cardinal > 1. Nous dirons qu'un espace E vérifie la condition (I'_m) relativement à une base B définissant l'espace E si la conclusion que voici subsiste:

$(\mathrm{I'_m})$. *Si pour un ensemble* $\mathrm{X} \subseteq \mathrm{E}$ *tel que* $\mathrm{kX} < \mathrm{m}$ *la base* B *contient une famille monotone d'ensembles* $\supset$ X *dont l'intersection est égale à* X, *alors l'ensemble* X *n'est pas isolé.*

Nous dirons qu'un espace vérifie (I'_m) s'il existe une base de l'espace pour laquelle la condition (I'_m) est vérifiée.

Pour abréger nous écrirons (I') au lieu de $(I'_{\aleph_0})$.

Nous dirons qu'un espace E vérifie (I') au point p de l'espace relativement à la famille F de voisinages définissant l'espace au point p, si l'on peut conclure que $p \in E'$ du moment que la famille F contient une famille (monotone) de voisinages de p distincts de $\{p\}$ et ayant $\{p\}$ pour l'intersection.

Si relativement à une base B de voisinages, l'espace vérifie (I'_m) pour chaque point d'un ensemble X, on dira que relativement à B l'espace vérifie (I'_m) dans l'ensemble X.

On dira qu'un tableau ramifié d'ensembles T vérifie (I'_m) si pour chaque ensemble X de puissance $< m$ la relation éventuelle

$$(8.1.1) \qquad \bigcap (-X)_T = X$$

implique

$$(8.1.2) \qquad X \cap E' \neq v.$$

Il va sans dire que

$$(8.1.3) \qquad (-X)_T = \{Y \mid Y \in T,\ Y \supset X\}.$$

et que X peut ne pas appartenir à T.

L e m m e 8.1.1. *Pour qu'un tableau ramifié d'ensembles,* T, *vérifiant les conditions* (T_1) *et* (C) *vérifie la condition* (I'), *il faut et il suffit que la condition* (n_2) *que voici ait lieu:*

(n_2) *Chaque élément de seconde espèce de* T *est infini.*

N é c e s s i t é. Soit X un élément de seconde espèce; d'après la condition (C) on aura $X = \bigcap (-, X)_T$. Si alors X n'était pas infini, la condition (I') impliquerait que X n'est pas isolé. Or, X étant un ensemble ambigu, cela voudrait dire que $X' \neq v$; cependant, T vérifiant (T_1), le dérivé de l'ensemble fini X est nécessairement vide. Par conséquent, X est infini.

S u f f i s a n c e: (n_2) implique (I'). Soit donc X un ensemble fini $\subseteq E$ vérifiant (8.1.1). On a donc $kX < \aleph_0$; si de plus $kX > 1$, la condition (6) entraînerait $X \in T$. Or, la famille (8.1.3) n'ayant pas un terme minimal, on en déduirait que l'ordinal ξ vérifiant $X \in R_\xi T$ serait de seconde espèce. A cause de (n_2) cela voudrait dire que $kX > \aleph_0$ — absurdité. On a donc nécessairement $kX = 1$; à cause de (n_2) on a $X \in' T$; si $X = \{x\}$, la relation (8.1.1) implique $x \in E'$! Ainsi le lemme 8.1.1. est démontré.

Voici un procédé bien simple de fabriquer un espace qui ne vérifie pas la condition (I'_2) relativement à une base: Soient S et X un V-espace et un sousensemble du dérivé E' respectivement; soit F une famille de voisinages définissant l'espace S. Ceci étant, considérons un ensemble non vide $X \subseteq S'$; soit F_1 la famille qu'on obtient de F en y adjoignant les ensembles (a) $(a \in Y)$ donc

$$F_1 = F \cup \bigcup_a ((a)) \quad (a \in X).$$

Soit $S(X)$ le V-espace défini par la famille F_1. L'espace $S(X)$ ne vérifie pas la condition (I') relativement à la famille F_1 dans aucun point $a \in X$. C'est que manifestement

$$(a) = \bigcap_{V(a)} V(a) \quad (V(a) \in F,\ (a) \subset V(a)).$$

donc $a \in S'$; d'autre part, le point a est isolé dans l'espace $S(X)$. l'ensemble uniponctuel (a) y étant un voisinage de a.

En particulier, B_0 étant l'espace de Baire, à zéro dimension, X étant un sous-ensemble de $B_0 = B_0'$ tel que $B_0 \setminus X$ soit $> \aleph_0$ et partout dense, l'espace $B_0(X)$ est bien défini. L'espace $B_0(X)$ est un R-espace de rang minimal $\omega_0 + 1$ sans être définissable par un tableau ramifié de rang ω_0. Remarquons que $B_0(X) \in' (D_0)$. Un fait analogue subsiste en y remplaçant l'indice 0 par un ordinal α.

8.2. Énoncé du Théorème.

Théorème 8.2.1. *Soit* E *un espace pseudo-distancié donc d'une classe* (D_α). *Supposons que l'espace* E *vérifie l'une et donc les deux conditions que voici:*

1) *Condition* (I').

2) *Condition* (n_2): *chaque élément de seconde espèce d'une base* T *de l'espace est infini.*

Alors l'espace est métrique (cas $\alpha = 0$*) ou totalement ordonnable ou les deux.*

Problème 8.2.1. Existe-t-il pour chaque ordinal α un espace pseudo-distancié $E_\alpha \in (D_\alpha)$ non distanciable qui ne soit pas totalement ordonnable?

Tout d'abord, la classe (D_0) coïncide avec la classe des espaces métriques de Fréchet (pour la démonstration v. Kurepa [4], [5]). Quant aux classes (D_α) pour $\alpha > 0$, R. Doss [3] a prouvé que la condition de régularité (R) est équivalente à la condition disant que la fonction φ soit l'identité. R. Doss en a déduit que l'espace considéré est définissable par un tableau ramifié de voisinages c'est-à-dire que chaque classe (D_α) pour $\alpha > 0$ est un R-espace. En particulier, en définissant le sphéroide $S(a, > \xi)$ comme l'ensemble des points dont le degré de proximité à partir de a soit $> \xi$ $(a, \xi$ parcourant respectivement l'espace donné et l'ensemble des ordinaux $\leq \omega_\alpha)$, le système de ces sphéroides est un tableau ramifié d'ensembles, définissant l'espace donné E: l'espace E est un R-espace où $\gamma T = \omega_\alpha$.

8.3. Quelques propriétés concernant les R-espaces

Nous allons indiquer quelques propriétés des R-espaces.

Soient donc E un R-espace et T un tableau ramifié d'ensembles définissant l'espace E. Pour chaque $a \leqslant E$ on a la famille $T(a)$ des $X \leqslant T$ vérifiant $a \leqslant X$ et on supposera que: $\{a\} = \bigcap X$ $(X \leqslant T(a))$.

$T(a)$ est une suite strictement décroissante d'ensembles qu'on désignera $T_0(a) \supset T_1(a) \supset \ldots \supset T_\xi(a) \ldots$ $(\xi < \gamma T(a))$. Donc

$$\{a\} = \bigcap_\xi T_\xi(a)\ ; \quad (\xi < \gamma T(a)).$$

Evidemment, l'union des éléments de T est égale à l'ensemble E.

Lemme 8.3.1. *Chaque portion droite,* P, *de* T *telle que* $\bigcup x = E\,(x \leqslant P)$ *est une base de l'espace* E[5].

Il s'agit de prouver: si $x \leqslant E$, chaque $V(x) \leqslant T(x)$ contient un élément de $P(x)$. Or, l'union des éléments de P étant E, il y a un $A(x) \leqslant P$ tel que $x \leqslant A(x)$. Puisque aussi $x \leqslant V(x)$ donc $x \leqslant V(x) \cap A(x)$ les ensembles $V(x), A(x)$ sont comparables (T est un tableau ramifié): on a soit $A(x) \subseteq V(x)$ soit $A(x) \supset V(x)$. Dans le premier cas, tout est déjà prouvé; dans le second cas aussi puisque $V(x) \leqslant P$ étant donné que $A(x) \leqslant P$ et que P est une portion droite de T.

Voici une propriété élémentaire de l'espace E:

Lemme 8.3.2. *Chaque* X $\leqslant$ T *est un ensemble ambigu:* X *est à la fois ouvert et fermé.*

Que X soit ouvert c'est bien évident; prouvons que X est fermé; dans le cas contraire, on aurait un point $a \leqslant X' \setminus X$; on aurait en particulier $a \leqslant V(a) \setminus X$ et $V(a) \cap X \neq v$ et dès lors, T étant ramifié, $V(a) \supseteq X$ pour chaque $V(a) \leqslant T(a)$, contrairement à la supposition (T_1). D'une façon analogue on prouve le

Lemme 8.3.3. *Si* X, Y $\leqslant$ T, *l'ensemble* X $\setminus$ Y *est ambigu.*

Lemme 8.3.4. *Soit* F *une chaîne extraite de* T; *si l'intersection* I *des éléments de* F *contient un élément de* T, *l'ensemble* I *est ambigu.*

L'ensemble I est fermé en tant que l'intersection des fermés appartenant à F. D'autre part, considérons la famille $I^+ = R_0(I, -)$. Celle-ci est une décomposition disjonctive de I, chacun des éléments de I^+ étant ouvert; I^+ est également ouvert, étant donné que I est la réunion des éléments de I^+.

Remarque 8.3.1. Dans ce qui suit nous supposerons, sauf mention expresse du contraire que les deux conditions (T_1) et (C) soient satisfaites: (cf. 5).

8.4. Condition (δN_2) et (N_2).

---

[5]) Chaque sous-famille F de T telle que pour chaque $X \leqslant F$ on a $(x, -) \subseteq F$ s'appelle portion droite de T; bien entendu $[x, -]_T = \{y \mid y \leqslant T, x \supseteq y\}$.

Soit T un tableau ramifié définissant un espace pseudo-métrique E vérifiant I' ou (n_2). Prouvons le

Lemme 8.4.1. *La base* T *vérifie*

la condition (δN_2): *Chaque élément* X *de seconde espèce est l'union d'une famille infinie* δX *d'espaces ambigus deux à deux disjoints.*

Tout d'abord, d'après la remarque 8.3.1 on peut supposer que pour chaque $X \leqslant T$ de seconde espèce l'intersection des $Y \leqslant T$ vérifiant $Y \supset X$ soit égal à X. Ceci étant, considérons un élément quelconque X de seconde espèce de T; à la suite de la condition (I') ou (n_2) l'ensemble X est infini. Si de plus $X' = v$, on aura $(p) \leqslant T$ pour chaque $p \leqslant X$ et on désignera par δX la famille des (p) $(p \leqslant X)$. Si par contre $X' \neq v$, posons $X_1 = [X, -)_T$; on aura $\gamma X_1 > \omega_0$. Soient $Y \leqslant R_{\omega_0} \psi X_1$ et $Y_n \leqslant R_n X_1$ vérifiant $Y_n \supset Y$.

On a évidement

$$(1) \quad Y_0 = X = \bigcup_n (Y_n \setminus Y_{n+1}) \cup \bigcap_n Y_n \quad (n < \omega_0)$$

$$(2) \quad Y = \bigcap Y_n \; (n < \omega_0), \; Y = \bigcup R_0 (Y, -)_T, \; Y_n = (Y_n \setminus Y_{n+1}) \cup Y_{n+1}$$

$$(3) \quad Y_n \setminus Y_{n+1} = \bigcup Z_n \quad (Z_n \leqslant R_0 (Y_n, -)_T, \; Z \neq Y_{n+1}) .$$

Cela montre que la décomposition de X provenant de (1), (2) et (3) est une partition demandée δX de l'espace X.

Ceci étant, définissons inductivement la base T' de la manière suivante. Posons $T'_n = R_n T$ pour $n \leq \omega$. Soit ν un ordinal tel que les sous-ensembles T_ν de T soient définis. Définissons T'_ν . Pour cela, considérons l'ensemble

$$(4) \quad T \setminus \bigcup_x (-, X]_T \quad (X \leqslant \bigcup_{(\nu_0 < \nu)} T'_{\nu_0}) .$$

Si l'ensemble (4) est vide, on posera

$$(5) \quad T' = \bigcup_{\nu_0} T'_{\nu_0} \quad (\nu_0 < \nu)$$

et le procès sera terminé. Si l'ensemble (4) est $\neq v$, considérons la rangée initiale R_0 (4) de (4). Si $\nu \leqslant'$ II, on posera

$$(6) \quad T'_\nu = R_0 (4) .$$

Si $\nu \leqslant$ II, on posera

$$(7) \quad T'_\nu = \bigcup_x \left(\{X\} \cup \delta X\right), \; \left(X \leqslant R_0 (4)\right),$$

δX ayant la signification de tout à l'heure.

En désignant par ν le premier ordinal tel que l'ensemble (4) soit vide, la famille T' est parfaitement définie par (5).

On prouve aisément que T' est une sous-famille de T équivalente à T; en particulier, quel que soit le point p et $p \leqslant V(p) \leqslant T$, il y a un $W(p) \leqslant T'$ tel que $p \leqslant W(p) \subseteq V(p)$. En effet, soit ξ le premier ordinal tel que la famille T'_ξ ne contienne aucun $X \supset V(p)$. Par conséquent, pour chaque $\xi_0 < \xi$ on a un $A_{\xi_0} \in T'_{\xi_0}$ tel que $A_{\xi_0} \supset \supset V(p)$; on aura

$$\bigcap_{\xi_0 < \xi} A_{\xi_0} \supseteq V(p)$$

et forcément c'est le signe $=$ qu'il faut y prendre; pour l'élément $Y \in T'_{\xi+1}$ tel que $p \in Y$, on aura $Y \subset V(p)$.

De plus, on se rend compte que la base T' vérifie la condition (C) disant que, pour tout $X \in T'$ de seconde espèce on a $\bigcap(—, X) = X$.

On voit que la base T' vérifie la condition (N_2) que voici:

Condition (N_2). *Chaque élément de seconde espèce possède une infinité de successeurs immédiats:*

(8) $X \in T', \ \gamma X \in (\mathrm{II}) \Longrightarrow k R_0 (X, —)_{T'} \geq \aleph_0$.

8.5. Démonstration du théorème 8.2.1.

Prouvons d'abord le

Lemme 8.5.1. *Chaque espace isolé* E *est totalement ordonnable. Si* E *est infini, on peut à notre gré disposer du comportement de* E *aux extrémités: l'espace ordonné peut être limité, illimité ou limité d'un seul coté, gauche ou droite.*

Le cas $kE < \aleph_0$ étant trivial, supposons $kE = \aleph_\alpha$. Pour avoir un espace illimité, de type $\langle\!—\!\rangle$, on considère le type d'ordre $t_\alpha = (\omega_0^* + \omega_0)\,\omega_\alpha$; alors chaque application biunivoque de ce type d'ordre sur E est une homéomorphie. Pour réaliser les trois autres cas, on considère les ordres:

$$\omega_0 + t_\alpha$$
$$t_\alpha + \omega_0^*$$
$$\omega_0 + t_\alpha + \omega_0^*.$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème 8.2.1.

8.5.1. Ordination naturelle. (cf. Kurepa [2] p. 127)

On peut supposer que le tableau T vérifie les conditions C (cf. L. 8.5.1) (N_2) de (8.4.8) et que $E \in T$; donc $R_0 T = \{E\}$.

On va ordonner totalement la famille des $T(p)$ $(p \in E)$; l'ordination sera une généralisation naturelle de l'ordination alphabétique et sera induite par les ordinations totales des $X \in \psi T$ de première espèce.

L'ordre total demandé $(E; <)$ sera résultat d'ordinations successives $(E; <_\alpha)$ de plus en plus extensives. Chaque élément $X \in \psi T$ sera une portion ambigue X_c de la chaîne $(E, <)$.

La caractéristique de l'ordination alphabétique de E *consiste justement dans le fait que chaque* X $\in$ T *devient une portion* X_c *de la chaîne.* L'un des caractères $\langle\!—\!\rangle$, $\leftarrow\!|$, $|\!\rightarrow$, $|\!—\!|$ de la portion X_c dans la chaîne $(E; <)$ sera déterminé dès qu'on arrivera à considérer l'élément $X \in \psi T$. C'est ainsi que par exemple chaque $X \in \psi T$ de première espèce sera de type $|\!—\!|$, c'est-à-dire deux points notés mX, MX seront assignés à X et seront le point initial et le point terminal de la portion X_c dans la chaîne $(E; \lessdot)$. Autrement dit chaque élément $X \in \psi T$ de première espèce sera limité. Il va sans dire que

$$(1) \quad Y \subset X, \ mX \in Y \Rightarrow mX = mY$$

$$(2) \quad Y \subset X, \ MX \in Y \Rightarrow MX = MY.$$

Le comportement aux extrémités de X_c pour un $X \in \psi T$ de seconde espèce est induit par le comportement des éléments de $(—, X)_T$, au moins *si l'on tient à l'ordination alphabétique*. C'est pour cela qu'il faut considérer des T permettant à disposer du comportement aux extrémités des $X \in T$ de seconde espèce. Or, pour pouvoir disposer aux extrémités de X d'une façon arbitraire, il suffit que X soit décomposable en une infinité d'éléments de T, c'est-à-dire que T vérifie (N_2) (cf. L. 8.4.1, 8.5.1). Cette condition est assurée par la condition (I') on (n_2) dans le cas des espaces pseudo-distanciés (v. L. 8.4.1).

En particulier, si X est dans T de seconde espèce, on arrangera le comportement de X_c aux extrémités de telle manière à empêcher que l'extrémité eventuelle de la chaîne X_c soit point d'accumulation de l'ensemble $E \setminus X$.

8.5.2. Procédé (P). Soit D une famille non vide d'ensembles deux à deux disjoints. Le procédé (P) appliqué à D consistera des 3 opérations que voici:

1. Ordonner totalement le système D par une relation $\lessdot(D)$ pour obtenir une chaîne isolée

$$C^0 D = (D; \lessdot(D)).$$

2. Pour chaque $X \in \psi D$ déterminer les points mX, MX de X de la façon indiquée ci-dessus; donc X_c sera d'un type $1 + .. + 1$.

3. Ordonner l'ensemble $S = \cup D$ par la relation $(\lessdot D)$ définie à partir de $\lessdot(D)$ comme il suit:

3.1. Pour chaque $X \in D$, les points mX et MX sont le point initial et le point terminal de X dans $(S; (\lessdot D))$;

3.2. Si $X, Y \in D$, alors

$$(1) \quad X \leq (D)\, Y \text{ dans } C^0 D \Leftrightarrow X \cdot ((\leq D) \cdot Y \text{ dans } (S; (\leq D)) \text{ où}$$

$$(2) \quad X \cdot (\leq D) \cdot Y \Leftrightarrow x (\leq D)\, y \quad (x \in X, \ y \in Y).$$

Pour chaque $X \in \psi T$ on appliquera le procédé (P) à l'espace X et à sa base $(X, —)_T$. Cela veut dire en particulier que la famille

$$(3) \quad R_0 (X, —)_T$$

sera totalement ordonnée par une relation d'ordre propre, soit $\leq (N)$ et que la chaîne (3) sera d'un type d'ordre $1 + .. + 1$ pour chaque $X \in \psi T$ de première espèce.

Soient alors x, y deux points distincts de l'espace. Considérons la chaîne $T(x) = \{T_\xi (x)\}_\xi$ des voisinages de x et la chaîne $T(y) = \{T_\eta (y)\}_\eta$ des voisinages de y appartenant à la base T. Soit

$$(4) \quad i = i(x, y)$$

le premier indice n tel que $T_n(x) \neq T_n(y)$ et donc $T_n(x) \cap T_n(y) = v$. Forcémement, à la suite de la condition C, le nombre $i(x, y)$ est de première espèce. Par conséquent, l'élément $X = T_{i-1}(x) = T_{i-1}(y)$ est bien déterminé aussi bien que la chaîne correspondante (3). Alors on définira

$$(5) \quad x \leq y \Leftrightarrow T_{i-1}(x) < (X)\, T_{i-1}(y) .$$

On prouve facilement que l'ensemble ordonné $(E; <)$ ainsi obtenu est une chaîne. Au fond, il s'agit d'une généralisation naturelle de l'ordination alphabétique des complexes $T(p)$, $(p \in E)$.

8.5.3. Difficultés concernant les noeuds de seconde espèce. Dans le cas général, l'espace donné E n'est pas homéomorphe de l'espace ordonné $(E; <)$ ainsi obtenu. C'est que chaque $X \in T$ est un sous-espace ambigu de l'espace E, alors que dans la chaîne $(E; <)$ cette propriété subsiste nécessairement seulement si $\gamma X \in' (\mathrm{II})$. Dans le cas général, la chaîne X_c, si $\gamma X \in (\mathrm{II})$, n'est pas uoverte dans la chaîne $(E; <)$. C'est pour cette raison que si $\gamma X \in (\mathrm{II})$, le procédé (P) sera appliqué à X avec la précaution supplémentaire à assurer l'ambiguité de la chaîne X_c. Procédons par récurrence.

Pour faciliter le langage posons

$$(1) \quad X_0 = R_0(X, -)_T, \ (X \in \psi T) .$$

Ceci étant, appliquons le procédé (P) au système $R_0 T$. On obtient ainsi l'ensemble ordonné

$$(2) \quad (E; < (R_0 T) \text{ désigné aussi par } (E; <_0) .$$

Pour chaque $X \in \psi R_1 T$ appliquons le procédé (P) au système X_0; soit

$$(3) \quad (E; <_1)$$

l'ordination ainsi induite dans E; par conséquent, l'ordination (3) est la réunion des relations d'ordre

$$(4) \quad \leq_0, \ \leq (X_0), \ (X \in \psi R_1 T) .$$

D'une façon analogue on définit dans E la relation $\leq_2$ comme la réunion des relations

$$\leq_0, \ \leq_1, \ \leq (X_0) \ \ (X \in \psi R_2 T) .$$

Supposons que $\alpha < \gamma T$ et que les ordinations

$$(5) \quad (E; \leq_\xi) \ \ (\xi < \alpha)$$

de plus en plus extensives soient définies; définissons alors

$$(6) \quad (E; \leq_\alpha) .$$

Si $\alpha \in \mathrm{I}$, la relation $\leq_\alpha$ sera la réunion des relations

$$(7) \quad \leq_\xi \ \ (\xi < \alpha)$$

$$(8) \quad \leq (X_0) \ \ (X \in R_\alpha \psi T) .$$

Autrement dit, $\leq_\alpha$ et l'extension de la relation $\leq_{\alpha-1}$, par des relations (8). Si $\alpha \in$ II, on considérera d'abord la relation

$$(9) \quad \leq^\alpha = \bigcup \leq_\xi \quad (\xi < \alpha) .$$

Pour chaque $X \in R_\alpha \, \psi \, T$ on appliquera le procédé (P) à X_0 avec la precaution que voici.

Si

$$(10) \quad (-, X)_{(E; \leq^\alpha)}$$

n'a pas un dernier point, X_0 n'aura pas un premier point; et dualement: si:

$$(11) \quad (X, -)_{(E, \leq^\alpha)}$$

n'a pas un point initial, la chaîne X_0 n'aura pas un point terminal. L'ensemble X_0 étant infini, on peut toujours satisfaire à ces deux conditions (cf. L. 8.5.1).

Bref, on a ainsi une suite d'ordinations

$$(12) \quad (E; <_\alpha) \quad (\alpha < \gamma T)$$

de plus en plus amplifiées.

8.5.4. Homéomorphie démandée. Soit

$$(1) \quad (E; \leq)$$

la réunion des ordres (8.3.12). C'est la chaîne démandée.

On se rend facilement compte que l'ordre $(E; \leq)$ est celui qu'on obtient dans E en y transplantant par la transformation $T(a) \to a$ l'ordre total de l'ensemble OT des chaînes maximales $\subseteq T$, l'ordre dans OT étant alphabétique.

L'espace donné E *est homéomorphe de l'espace totalement ordonné* (E; $\leq$). *La transformation identique en est une homéomorphie.*

Ce fait résultera des deux propositions que voici:

Lemme 8.5.4.1. *Si* x $\in$ V(x) $\in$ T, *il y a un intervalle ouvert* I (x) *de la chaîne* (1) *tel que*

$$(2) \quad x \in I(x) \subseteq V(x) .$$

Lemme 8.5.4.2. *Si* x $\in$ E *et si* I (x) *est un intervalle ouvert de la chaîne* (1) *tel que* x $\in$ I (x), *alors il y a un* V (x) $\in$ T *vérifiant*

$$(3) \quad x \in V(x) \subseteq I(x) .$$

Prouvons le lemme 8.5.4.1. Pour un $x \in E$ désignons, s'il existe, par x^- le point qui dans la chaîne (1) précède immédiatement le point x. Dualement, soit x^+ le point de (1) qui succède immédiatement au point x.

Lemme 8.5.4.3. *Si* x = m V, V $\in$ T, *alors* x$^-$ *existe, sauf si* x = mE. *Et dualemet: si* x = MV, V $\in$ T, *alors* x$^+$ *existe, sauf si* $x = ME$.

En effet, soit $x = mV$, $V \in T$. Soit $A \in T$ tel que $x = mA$, $\gamma A \in'$ (II) et que γA soit minimal. Soit $A \in X_0$. Si $m X = x$, alors $\gamma X \in$ (II) et en vertu de la condition (N_2), le point x^- existe. Si l'on n'a pas $mX = x$, alors dans la chaîne X_0 l'élément A de celle-ci a un prédécesseur immédiat, soit A^-; alors $MA^- = x^-$.

On prouve le dual d'une façon analogue.

Ceci étant, prouvons le lemme 8.5.4.1. Il s'agit de déterminer les extrémités de l'intervalle $I(x)$ en question.

Si $x = mA$, $A \leqslant T$, on prendra le point x^- pour l'extrémité gauche de $I(x)$. Si x n'est pas de la forme mA, $A \leqslant T$, le point[6] $mV(x)$ servira comme l'extrémité gauche de $I(x)$.

Il nous reste encore à prouver le lemme 8.5.4.2. Soient donc $x \leqslant E$ et $I(x)$ un intervalle ouvert de (1) contenant x. Si $\{a\} \leqslant T$, on peut prendre $\{a\} = V(a)$.

Supposons que

$$(4) \quad I(x) = (x', x'').$$

Puisque $x \leqslant (x', x'')$, on voit que

$$(5) \quad i(x', x'') = \inf \{i(x', x), i(x, x'')\}.$$

Soit alors

$$(6) \quad \beta = \sup \{i(x', x), i(x, x'')\}.$$

On aura

$$(7) \quad T_\beta(x) \subseteq I(x).$$

En effet, pour chaque $p \leqslant T_\beta(x)$, on aura $p \leqslant (x', x'')$ — conséquence des égalités $i(x', p) = i(x', x)$, $i(p, x'') = i(x, x'')$.

Ainsi le théorème 8.2.1. est prouvé.

9. *Quelques cas d'ordinabilité totale d'espaces*

La démonstration précédente du théorème 8.2.1 s'applique pour démontrer le

Théorème 9.1. *Chaque* R-*espace vérifiant la condition* (N_2) (*resp.* (δN_2)) *est totalement ordonnable.*

Ce théorème est à rapprocher du théorème de P. Papić provenant du théorème 9.1 en y remplaçant la condition (N_2) (resp. (δN_2)) par la condition β disant ceci:

Condition β. *Aucun élément* $X \leqslant T$ *de seconde espèce n'est compact.*

En particulier on a le

Théorème 9.2. *Chaque* R-*espace vérifiant* T_1 *défini par un tableau* T *de rang* $\leq \omega_0$ *est totalement ordonable.*[7]

---

[6]) Bien entendu, dans le lemme 8.5.4.1 on peut toujours supposer que $\gamma V(x) \leqslant I$ étant donné que, d'après supposition, la base T vérifie la condition (C).

[7]) C'est un des premiers résultats que P. Papić et Kurepa ont trouvé indépendamment l'un de l'autre en 1953 lorsque Kurepa avait cru avoir démontré l'ordinabilité totale de chaque espace pseudodistancié nondistanciable et lui, indépendammant, un mois après celle des R-espaces vérifiant T_1.

Théorème 9.3. *Chaque* R-*espace* E *admettant une base* $\leq \aleph_0$ *est totalemet ordonnable.*

Tout d'abord E est métrique, E étant un R-espace vérifiant T_1 et ayant une base $\leq \aleph_0$ (v. Kurepa [5] Th. 5). Ensuite, chaque R-espace métrique est totalement ordonnable (Papić [3] Th. 10).

Théorème 9.4. *Chaque* R-*espace compact* E *vérifiant* T_1 *est une chaîne ordonnée limitée.*

Tout d'abord, l'espace E est définissable par un tableau T de voisinages tel que $\gamma T \leq \omega_0$ et $k R_n T < \aleph_0$ pour chaque $n < \gamma T$ (v. Papić [1] L. 5.6). En vertu du théorème 9.2 ou théorème 9.3, l'espace E est totalement ordonnable. Chaque ordination naturelle de la famille OT des chaînes maximales $\subseteq T$ fournit une chaîne C dont l'espace est homéomorphe de l'espace E. Il en résulte en particulier que C est limité. En effet, d'après le procédé P du 8.5.2 on peut supposer que $E \in T$ et alors les points mE, ME sont le point initial et le point terminal de la chaîne C.

Ensuite, C ne présente aucune lacune. En effet, soit I une portion initiale de C; désignons pour chaque $n < \gamma T$ par V_n l'élément de $R_n T$ tel que ou bien V coupe I et $C \setminus I$ ou bien que V_n soit cofinal à I. Alors le point $\cap V_n$ est ou bien le point terminal de I ou bien le point initial de $C \setminus I$.

Théorème 9.5. *Soit* E *un* R-*espace vérifiant la condition* (I') *ou* (n_2) *relativement à un arbre* T *de voisinages; soit* $\mathrm{T_k} = \cup [\mathrm{X}, -]_T$, X *parcourant la famille des* $\mathrm{X} \in \mathrm{T}$ *compacts [de seconde espèce] vérifiant* $\mathrm{k X'} \geq 1$. *Si alors l'ensemble* $\mathrm{E_k} = \mathrm{U X}\ (\mathrm{X} \in \mathrm{T_k})$ *est fermé, l'espace* E *est une chaîne ordonnée.*

Le théorème 9.5. se déduit d'une façon simple du théorème 9.6 que voici.

Théorème 9.6. *Soient* E *un* R-*espace,* T *un arbre de voisinages définissant* E *et*

$$(1) \quad T_c = \cup [X, -)_T$$

X *parcourant la famille des éléments compacts de seconde espèce de* T. *Si l'ensemble*

$$(2) \quad E_c = \cup X \quad (X \in T_c)$$

est fermé, l'espace E *est totalement ordonnable.*

Tout d'abord, l'ensemble E_c est ouvert, étant donné que E est l'union d'ensembles ouverts $X \in T$. Par conséquent, si E_c est encore fermé l'ensemble E_c est ambigu. Cet ensemble est un sous-espace ambigu défini par la base T_c. Or, chaque $X \in T_c$ étant compact, l'espace ambigu X admet une base $B(X)$ de rang $\leq \omega_0$ (v. Papić [1], L. 5). En particulier, il en résulte que la famille

$$(3) \quad \cup B(X) \quad (X \in R_0 T_c)$$

est une base de l'espace E_c et que le rang de (3) soit $\leq \omega_0$. En vertu du Th. 9.2 il existe une chaîne L_1 telle que l'espace E_c soit homéomorphe de l'espace totalement ordonné L_1. D'autre part, considérons le complémentaire

(4) $E \setminus E_c = C E_c$

de l'ensemble E_c. C'est un ensemble ambigu, comme complémentaire de l'ambigu E_c. Or, l'ensemble (4) engendre un espace défini par la famille

(5) $T \setminus T_c$.

Cette famille vérifie la condition β de Papić et d'après le dit théorème de Papić il existe une chaîne L_2 telle que l'espace (4) soit homéomorphe de l'espace L_2.

Maintenant, il s'agit encore de la question si l'on peut disposer des ordinations des espaces L_1, L_2 de manière que chacun d'eux soit ambigu dans la somme ordonnée $L_1 + L_2$. Il en est bien ainsi.

En effet, l'espace E est ou bien compact ou non compact. Si E est compact, la chaîne ordonnée L_1 est nécessairement d'un type $\vdash\!\!\dashv$ donc $1 + \ldots + 1$. Si E_c n'est pas compact, on peut disposer librement de son comportement aux extrémités. Le même raisonnement s'applique à L_2. On en déduit facilement qu'on peut supposer les ordres L_1, L_2 de manière que chacun des espaces L_1, L_2 soit ambigu dans l'espace ordonné correspondant à la chaîne

$$L_1 + L_2 .$$

Bien entendu, l'ordre y est défini de manière que L_1 y précède L_2, Q. E. D.

Théorème 9.7. *Si l'espace* E $\leqslant$ (R) *possède un seul point d'accumulation, soit* a, E *est homéomorphe d'un espace totalement ordonné* L; *de plus, si* E *possède une partie infinie* D *isolée fermée (ce qui se présentera par exemple dans ces deux cas:*

$$1)\ \ kE > \aleph_0 ; \qquad 2)\ \ kE = \aleph_0$$

et E *non compact), on peut exiger que la chaîne* L *soit limitée ou illimitée ou d'avoir une seule extrémité, initiale ou terminale.*

En effet, $\{a\} = \cap\, T_\xi(a)\ (\xi < \omega_\alpha)$ et on aura

$$T_0(a) = \{a\} \cup \bigcup_\xi \left(T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a)\right) .$$

L'ensemble $E \setminus T_0(a)$ étant ambigu, on peut le considérer vide et alors

$$E = \{a\} \cup \bigcup_\xi \left(T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a)\right) .$$

L'ensemble $T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a)$ est isolé et on peut l'ordonner à devenir une chaîne L_ξ du type $k(T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a))$ ou $(\omega^* + \omega)\,\omega_{\nu_\xi}$, suivant que $k(T_\xi(a) \setminus T_{\xi+1}(a))$ est fini ou $= k\,\omega_{\nu_\xi}$; alors la chaîne $L = (\sum_\xi L_\xi) + \{a\}, (\xi < \omega_\alpha)$ par transformation identique, est homéomorphe de l'espace E.

Pour achever la démonstration, enlevons à la chaîne L un ensemble dénombrable isolé fermé D dont on y parle; soit τ le type d'ordre du reste de la chaîne L. Disons qu'un type d'ordre est de forme 00, 01, 10 ou 11, suivant qu'il n'a aucune extrémité ou seulement l'extrémité droite ou seulement l'extrémité gauche ou les deux. Si τ_0 est le type demandé à l'espace E, on le déduira de τ de façon indiqué dans le tableau que voici:

a) Le type τ est de la forme 01:

type demandé τ_0 doit être un		Représentation de τ_0	
0 0	$\langle\!-\!\!-\rangle$	$\tau + \omega$	(on ordonne D à devenir ω et on le met après τ)
0 1	$\leftarrow\!\mid$	$\omega^* + \tau$	
1 0	$\mid\!\rightarrow$	$\omega^* + \tau + \omega$	
1 1	$\mid\!\!-\!\!\mid$	$\omega + \tau$	

b) τ est un 11

0 0	$\omega^* + \tau + \omega$
0 1	$\omega^* + \tau$
1 0	$\tau + \omega$
1 1	$\omega + \omega^* + \tau$

Remarquons que dans le cas $kE = \aleph_0$ l'un des ensembles $T_n(a) \setminus \setminus T_{n+1}(a)$ est infini et on peut le prendre pour D. Si $kE > \aleph_0$, on peut prendre

$$D \subseteq \cup_n (T_n(a) \setminus T_{n+1}(a)) \quad (n < \omega_0).$$

Théorème 9.8. *Si le dérivé* E′ *d'un* R-*espace* E *défini par un tableau* T *est séparable simultanément c'est-à-dire s'il existe une famille disjonctive* F $\subseteq$ T *telle que*

$$k(X \cap E') = 1 \quad (X \in F),$$

l'espace E *est totalement ordonnable.*

Soit $Y = C \cup X, (X \in F)$; Y est un ensemble isolé; considérons alors le système $H = F \cup \bigcup_y \{\{y\}\}, (y \in Y)$. Ordonnons H à devenir une chaîne isolée L; nous en déduisons une chaîne E_c en remplaçant dans L chaque élément $X \in F \cap L = F$ par un ordonnement total X_c de l'ensemble X de manière que X_c soit limité et que $X'_c = = X' = X \cap E'$. La transformation identique de E en E_c est une homéomorphie entre E et l'espace ordonné E_c.

Théorème 9.9 *(L'ordinabilité totale des* eT-*espaces). Chaque* eT-*espace est totalement ordonnable si et seulement si l'espace vérifie l'axiome* T_1 *de Fréchet ou si chaque noeud de seconde espèce de l'arbre correspondant est monoponctuel.*

Il suffit d'ordonner chaque noeud N de première espèce de T à devenir une chaîne isolée limitée, soit $(N; <(N))$ et d'y appliquer l'ordination naturelle. C'est-à-dire, a, b étant deux points distincts, considérons les éléments a_i, b_i ou $i = i(a, b) = t(-, a] \cap (-, b]$;

nécessairement, les points a_i, b_i appartiennent à un même noeud N de T; on pose alors $a < b$ si et seulement si $a_i < (N) b_i$ dans le noeud N. Soit C la chaîne ainsi obtenue. Prouvons que l'espace eT est homéomorphe de l'espace ordonné C.

Soit $x \in T$. Si $x' < x'' < x$, alors $(x'', x]_c \subseteq S(x', x|$.

Réciproquement, soit $I = (a, b)_c$ un intervalle de la chaîne C contenant x tel que $a < (C) x < (C) b$; ici $\leqq (C)$ désigne la relation d'ordre de la chaîne C. Alors, I contient un sphéroïde $S(x; \xi)$. La chose étant évidente si $\gamma x \in' \mathrm{II}$, supposons que $\gamma x \in \mathrm{II}$. Soit $\xi = \sup (i(a, x), i(x, b))$; on a $\xi \geq i(a, b)$ et on voit bien que $S(x; > > \xi) \subseteq I$.

10. *Problèmes*

Dans ce qui précède nous avons considéré parmi d'autres ces espaces:

1) Espaces totalement ordonnables,
2) Espaces pseudo-métriques non métriques,
3) R-espaces,
4) eT-espaces,
5) T-espaces.

Le problème se pose de pousser plus à fond l'étude des interconnexions entre ces espaces.

La liste précédente pourrait s'augmenter des espaces ramifiés et des espaces ordonnés. Voici par exemple la définition des espaces ramifiés (cf. Kurepa [6] p. 72):

Soit S un ensemble ramifié c'est-à-dire un ensemble ordonné jouissant de la propriété que pour tout $a \in S$ l'ensemble $(—, a)_s$ est une chaîne. A chaque $a \in S$ on va attacher les ensembles de la forme $(x, Y)_s = \{a\} \cup \bigcup_{y \varepsilon Y} (x, y)$ comme voisinages de a; ici $x \in o\, a$; Y dénote une antichaîne maximale quelconque de 1 a.

Voir aussi les problèmes 4.1, 6.1, 8.2.1. Sur cela nous reviendrons dans un autre papier.

INDEX

Dénotations

kX = le cardinal de X;
$\leqq'$ = non $\leqq$;
$\psi F = \{X \mid X \leqq F, kX > 1\}$;
$\varphi F = \{X \mid X \leqq F, kX = 1\}$;
RT 4;
T 4.5;
$T(a)$ 8.1;
γT 4;
$oa = (—, a) = \{x \mid x < a\}$;
$1a = (a, —) = \{x \mid x > a\}$;
$a \leqq$ (II) veut dire que a est de seconde espèce;
$i(a, b)$ 3.
$n\_$ désigne l'élément variable $< n$.
R étant le symbole pour une relation binaire, on désigne par R_1; R_2 respectivement le premier et le second terme de la relation R.

BIBLIOGRAPHIE:

Appert A.—Ky-Fan [1] Espaces topologiques intermédiaires, Paris, Hermann, 1951, 160 pp.

Bernstein F. [1] Untersuchungen aus der Mengenlehre, Halle 1901 und Math. Ann., **61** (1905), 117—155.

Bourbaki N. [1] Topologie générale III, Paris, Hermann, 1940.

Colmez J. [1] Espaces à écart généralisé régulier, C. R., **224** (1947), p. 372.
[2] Sur les espaces à écart, C. R., **228** (1949), p. 156.
[3] Sur divers problèmes concernant les espaces topologiques. Les espaces à écarts-problème de Wiener sur les transformations continues, Portugaliae Math., **6** (1947), 119—244. (Math. Rev., **10** (1949), 557)

Doss R. [1] Sur la condition de régularité pour l'écart abstrait. Écart abstrait symétrique et régulier, C. R., **223** (1946), 14—16, 1087—1088.
[2] Sur la théorie de l'écart abstrait de M. Fréchet, Bull. Sci. Math., (2) **71** (1947), 110—122; Math. Rev., **9** (1948), 605.

Fréchet M. [1] La notion d'écart et le calcul fonctionnel, C. R., **140** (1905), 772—774.
[2] Sur quelques points du calcul fonctionnel. Thèse Paris, 1906; Rendiconti Circolo Mat. Palermo, **22** (1906), 1—74.
[3] Espaces abstraits, Paris 1927, 12 + 296 pp.

[4] La notion d'uniformité et les écarts abstraits, C. R., **221** (1945), 337—339.
[5] De l'écart numérique à l'écart abstrait, Portugaliae Math., **5** (1946), 121—131.
[6] Sur les espaces à l'écart régulier et symétrique, Bol. Soc. Portug. Math., **1** (1947), 25—28.

Hausdorff F. [1] Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, 6+476 pp.

Kalisch G. K. [1] On uniform spaces and topological algebra, Bull. Ann. Math. Soc. **52** (1946), 936—939.

Kurepa G. [1] Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudodistanciés, C. R., **198** (1934), 1563—1565.
[2] Ensembles ordonnés et ramifiés, Thèse Paris, 1935, p. 1—138; Publ. Math. Beograd, **4** (1935), 1—138.
[3] Le problème de Suslin et les espaces abstraits, C. R., **203** (1936), p. 1049—1052.
[4] Un critère de distanciabilité, Mathematica, Cluj, **13** (1937), p. 59—65.
[5] Sur les classes (*E*) et (*D*), Publ. Math. Belgrade, **5** (1936), 124—132.
[6] Teorija skupova, Zagreb, 1951, 22+444 pp.

Menger K. [1] Untersuchungen über allgemeine Metrik, Math. Ann., **100** (1928), 75—163.

Niemytski M. [1] On the third axiom of metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **29** (1927), 507—513.

Papić P. [1] O prostorima sa razvrstano uređenom bazom okolina, Glasnik mat.-fiz. i astr., **8** (1953), 30—43.
[2] Sur une classe d'espaces abstraits, C. R., **236** (1953), 1843—1845.
[3] Pseudodistancijalni prostori, Zagreb, Thèse 1953, 79 pp.
[4] Sur une classe d'espaces abstraits, Glasnik mat.-fiz. i astr., **9** (1954), 197—216.
[5] Sur les espaces pseudo-distanciés (Ibidem, 217—228).

Price B. [1] A generalization of a metric space with applications to spaces whose elements are sets, Amer. J. Math., **63** (1941), 46—56.

O APSTRAKTNOM RAZMAKU

Đuro Kurepa, Zagreb

Sadržaj

Fréchet ([1], [2]) je 1905 uveo razdaljinu i polurazdaljinu odnosno *razdaljinske (metričke) i polurazdaljinske prostore* (v. Kurepa [6] § 25). Kurepa ([1], [4], [5]) je promatrao *pseudometrične prostore*, a 1936 je u [3] uveo *apstraktne polurazdaljine*.

U 1. se preslikavanjem e ili i kvadrata P^2 na neki prostor ili strukturu M definira apstraktna polurazdaljina time, što vrijede aksiomi O^1, O^2, O^3. Tako se još govori o *M-prostoru* P, o *M-razmaku*

u P ili simbolički $P \in \mathcal{E}[M]$. Tu se pojavljuje i uslov $O^{1'}$ (*aksiom neprekidnosti*). U slučaju E_α-*prostora* uzima se za M skup rednih brojeva $\leq \omega_\alpha$ te se stavlja $i(x\,x) = \omega_\alpha$ za svako $x \in P$. Tu slovo E označuje početno slovo riječi écart (razmak). Zadovoljava li E_α-prostor i *uslovu regularnosti* (R) *iz* 8.1, govori se tada o D_α-*prostoru* (D je početno slovo riječi *distancija*). Svaki prostor za koji postoji redni broj α, tako da taj prostor bude jedan D_α-prostor, zove se *pseudodistancijalan prostor* (slučaj $\alpha = 0$ daje razdaljinske prostore; v. Kurepa [4], [5]). *Alfabetsko uređenje* kompleksa je u vezi sa jednom *dobro uređenom razdaljinom:* ako se radi o ω_α-*kompleksima* x, y dovoljno je staviti: $i(x, x) = \omega_\alpha$, $i(x, y) =$ prvi indeks na kojem se nizovi x, y razlikuju.

3. *Uslovi jednakokračnosti.* Ti su uslovi (Δ) i (Δ^*), a imaju za posljedicu uslove (I) i (I^*) kao i uslov (Δ_2). Ako je definirana potpuno uređena razdaljina u prostoru E, tad se promatraju skupovi (3.1), (3.2, (3.3).

Lema 3.1. valja ako valja (Δ).

Teorem 3.1. *Ako prostor zadovoljava* (Δ), *tad su skupovi* (3.1) *ili isti ili disjunktni; skupovi oblika* (3.2) *su granasti i vrijedi* (3.4) *kao i* (3.5)

4. *eT* i *T-prostori.* Neka je T kakvo *stablo* t. j. uređen skup sa svojstvom, da iz $a \in T$ slijedi, da je skup oa svih $y \in T$ za koje je $y < x$ dobro uređen. Promatrajmo skupove $V(a)$ oblika $1z - 1a$ sa $z < a$, $z \in T$; tu $1a$ označuje skup svih $x \in T$ za koje je $a < x$. Ako je oa prazno, stavlja se $V(a) = (a)$. Shvaćajući svako $V(a)$ kao okolinu točke a, time se definira *prostore eT;* to je *eT-prostor.* Pretpostavimo li, da važi uslov (N), onda je takav eT-prostor moguće definirati dobro uređenom polurazdaljinom (Lema 4.1).

4.2 *T*-prostori. Definicija *T-prostora* dobiva se iz definicije *eT-prostora* tako da se okolina svake točke x dobije iz odgovarajuće okoline V u eT-prostoru isključujući sve točke $p \in V$ za koje je $\gamma p > \gamma x$.

5. *R-prostori.* Neka je T *stablo skupova* t. j. *granasta* obitelj skupova[1] sa svojstvom, da za svako $X \in T$ skup svih $Y \in T$ za koje je $Y \supseteq X$ čine jedan dobro uređen skup s obzirom na relaciju $\supset$. Uzimajući svako $X \in T$ za okolinu svakog $a \in X$, postaje unija svih $X \in T$ određenim prostorom; to su *R-prostori* (isp. Kurepa [3] p. 1050, [5] p. 128; Papić [1]—[3]; naziv R-prostor potječe od Papića).

Teorem 5.1. *Svaki* R-*prostor za koji važi Fréchetov aksiom separacije može se definirati dobro uređenim razmakom za koji vrijedi* (Δ).

Teorem 6.1. *Svaki dobro uređeni prostor* I (ω_α) *dopušta polurazdaljinu s aksiomom* $O^{1'}$ *i svojstvom* (Δ).

---

[1]) Obitelj F skupova je granasta, ako ne sadrži nedisjunktnih neuporedljivih članova; t. j. iz $X, Y \in F$ slijedi $X \subseteq Y$, $Y \subseteq X$ ili $X \cap Y = v$.

Teorem 7.1. *Svaki separirani uniformni prostor može se definirati polurazdaljinom s jednom nulom i to tako, da je zadovoljeno i* O^4.

8. *Pseudodistancijalni prostori* (Kurepa [1], [4], [5], Fréchet [2]—[5], Appert-Ky Fan [1], Papić [1]—[5]).

Za dani regularni redni broj ω_α definiraju se D_α-prostori kao oni za koje postoji polurazdaljina $\leq \omega_\alpha$ i za koje važi ovaj

Uslov regularnosti (R): postoji preslikavanje φ koje svakom rednom broju $\mu < \omega_\alpha$ pridružuje redni broj $\varphi(\mu) < \omega_\alpha$ tako, da iz $\varrho(a, b)$, $\varrho(a, c) > \varphi(\mu)$ slijedi $\varrho(a, c) > \mu$.

Teorem 8.2.1. *Svaki pseudodistancijalni prostor* $E \leqslant D_\alpha$, *koji se može definirati stablom skupova u kojem je svaki element druge vrste beskonačan, jest ili distancijalan (slučaj* $\alpha = 0$*) ili potpuno uređen (*$\alpha > 0$*) ili oboje.*

9. *O potpunoj uređenosti prostora.*

Teorem 9.2. *Svaki* R-*prostor, koji zadovoljava aksiom* T_1, *a može se definirati stablom skupova ranga* $\leq \omega$, *jest homeomorfan potpuno uređenom prostoru*[2].

Teorem 9.4. *Svaki kompaktan prostor, koji zadovoljava* (T_1), *jest jedan uređen omeđen lanac.*

Teorem 9.6. *Neka je* E *određen* R-*prostor definiran stablom skupova* T. *Ako je skup* E_c *iz francuskog teksta teorema* 9.6 *zatvoren, tad se prostor* E *može potpuno urediti.*

Teorem 9.9. *Svaki* eT-*prostor homeomorfan je potpuno uređenom prostoru.*

10. *Problemi.* U prvom redu radi se o tome, da se nađu veze između ovih vrsta prostora: 1) Potpuno uređeni prostori, 2) Pseudodistancijalni nedistancijalni prostori, 3) R-prostori, 4) eT-prostori, 5) T-prostori.

Problem 4.1. Naći nuždan i dovoljan uslov, pa da T-prostor zadovoljava $O^{1'}$.*

Problem 6.1. Da li $I(\omega_1) \leqslant E[R_n]$ za koji prirodan broj n; R_n je kartezijev prostor od n dimenzija.

Problem 8.2.1. Postoji li za svako α pseudodistancijalan nedistancijalan prostor iz D_α, koji ne bi bio potpuno uređen prostor?

(Primljeno 21. XI. 1955.)

---

[2]) To je jedan od prvih rezultata do kojeg su P. Papić i Đ. Kurepa došli, kad je Đ. Kurepa 1953. mislio, da zaključak o uređenosti vrijedi za svaki pseudodistancijalni prostor, a Papić, oko mjesec dana kasnije ne znajući za taj rezultat, da zaključak vrijedi za svaki R-prostor, koji zadovoljava (T_1).

* U međuvremenu Z. Mamuzić je riješio taj problem (isp Glasnik mat.-fiz. i astr., **11** (1956).