Zadatci s natjecanja II

Zadatak 1: [1982., 7.razred] S koliko nula završava umnožak svih prirodnih brojeva od 1 do 49?

Rješenje: Neka su α i β eksponenti s kojima se prosti brojevi 2 i 5 pojavljuju u rastavu na proste faktore broja 49!. Trebamo naći minimum brojeva α i β, jer će nam to dati najveću potenciju broja 10 koja dijeli 49!. Očito je $\beta \leq \alpha$, pa je dovoljno naći β:

$$\beta = \left\lfloor \frac{49}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{49}{25} \right\rfloor = 9 + 1 = 10.$$

Dakle, broj 49! završava s 10 nula. $\diamondsuit$

Zadatak 2: [1972., 4.razred] Dokazati da jednadžba $x! + y! = 10z + 9$ nema rješenja s skupu prirodnih brojeva.

Rješenje: Desna strana jednadžbe je neparna, pa jedan od brojeva $x!$, $y!$ mora biti neparan, a to znači da je $x = 1$ ili $y = 1$. Uzmimo da je $x = 1$. Tada je $y! = 10z + 8$. Desna strana ove jednadžbe nije djeljiva s 5, pa je $y \leq 4$. No, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ i niti jedan od ovih brojeva ne završava sa znamenkom 8. Stoga zadana jednadžba nema rješenja. $\diamondsuit$

Zadatak 3: [1983., 1.razred] Dokazati da za svaki prirodan broj k jednadžba $x^2 + y^2 = z^k$ ima rješenja $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

Rješenje: Za svaki $k \in \mathbb{N}$ jednadžba $x^2 + y^2 = 5^k$ ima rješenja. To slijedi iz karakterizacije prirodnih brojeva koji se mogu prikazati u obliku sume dva kvadrata (umjesto $z = 5$ mogli smo uzeti bilo koji prirodan broj z kojem su svi prosti faktori oblika $4k + 1$).

Tvrdnju možemo dokazati i indukcijom po k. Za $k = 1$ imamo: $5^1 = 1^2 + 2^2$. Pretpostavimo da je $5^k = x^2 + y^2$, za $x, y \in \mathbb{N}$, $x > y$. Tada je

$$5^{k+1} = 5^k \cdot 5 = (x^2 + y^2)(1^2 + 2^2) = (x + 2y)^2 + (2x - y)^2.$$

Brojevi $x + 2y$ i $2x - y$ su očito prirodni, čime je tvrdnja dokazana. $\diamondsuit$

Zadatak 4: [1981., 2.razred] Prirodni broj n zovemo *Pitagorin broj* ako postoje prirodni brojevi a, b takvi da je $n = a^2 + b^2$. Dokažite da ako su m i n Pitagorini brojevi, a $m \cdot n$ nije Pitagorin, onda je $m \cdot n$ kvadrat nekog parnog broja.

Rješenje: Neka je $m = a^2 + b^2$, $n = c^2 + d^2$, $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Tada je

$$mn = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Ako mn nije Pitagorin broj, onda je $ad - bc = 0$ i $ac - bd = 0$, tj. $ad = bc$ i $ac = bd$. Odavde slijedi $a^2cd = b^2cd$, pa je $a = b$ i $c = d$, što povlači da je

$$mn = 2a^2 \cdot 2c^2 = (2ac)^2.$$

$\diamondsuit$

Zadatak 5: [1988., 4.razred] Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi da je

$$S_n = (3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n$$

cijeli broj koji nije djeljiv s 5.

Rješenje: Neka je $\alpha = 3 + 2\sqrt{2}$, $\beta = 3 - 2\sqrt{2}$, tako da je $S_n = \alpha^n + \beta^n$. Želimo naći rekurziju koju zadovoljavaju članovi niza S_n. Imamo:

$$S_{n+1} = \alpha^{n+1} + \beta^{n+1} = (\alpha + \beta)(\alpha^n + \beta^n) - \alpha\beta(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) = 6S_n - S_{n-1}.$$

Iz $S_0 = 2$, $S_1 = 6$ i $S_{n+1} = 6S_n - S_{n-1}$ slijedi da je $S_n \in \mathbb{Z}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pogledajmo ostatke pri dijeljenju s 5 brojeva $S_1, S_2, S_3, \ldots$:

$$1, 4, 3, 4, 1, 2, 1, 4, \ldots.$$

Nakon što se par $1, 4$ ponovio, a svaki član niza je određen s dva prethodna, zaključujemo da se grupa ostataka $1, 4, 3, 4, 1, 2$ ponavlja u nedogled. Zato se ostatak 0 nikad neće pojaviti, što znači da niti jedan član niza nije djeljiv s 5. $\diamondsuit$

Zadatak 6: [1980., 4.razred] Neka je dana funkcija $D : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvima

(i) $D(1) = 0$, $D(p) = 1$, za svaki prost broj p;

(ii) $D(uv) = uD(v) + vD(u)$, za sve prirodne brojeve $u, v \in \mathbb{N}$.

Za koje je vrijednosti od n, $D(n) = n$?

Rješenje: Promotrimo funkciju $F(n) = \frac{D(n)}{n}$. Tada je $F(1) = 0$, $F(p) = \frac{1}{p}$, za svaki prost broj p, te $F(uv) = F(u) + F(v)$. Treba naći sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je $F(n) = 1$.

Ako je $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$, onda je

$$F(n) = F(p_1^{\alpha_1}) + \cdots + F(p_k^{\alpha_k}) = \alpha_1 F(p_1) + \cdots \alpha_k F(p_k) = \frac{\alpha_1}{p_1} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}.$$

Iz

$$\frac{\alpha_1}{p_1} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1$$

slijedi $1 \leq \alpha_i \leq p_i$. Pomnožimo li dobivenu jednakost sa $p_2 \cdots p_k$, dobivamo da je $\frac{\alpha_1}{p_1} p_2 \cdots p_k$ prirodan broj (jer su svi ostali pribrojnici u novodobivenoj jednakosti očito prirodni). Stoga $p_1 | \alpha_1$, što zajedno s $\alpha_1 \leq p_1$ povlači da je $\alpha_1 = p_1$. No, to povlači da je u sumi $\frac{\alpha_1}{p_1} + \cdots + \frac{\alpha_k}{p_k}$ imamo samo prvi pribrojnik, tj. da je $k = 1$. Dakle, traženi brojevi su brojevi oblika $n = p^p$ za neki prosti broj p. $\diamondsuit$

Zadatak 7: [1988., 8.razred] Za gradnju vodovoda duljine 70 metara mogu se rabiti cijeli duljine 3 metra i 5 metara. Na koje sve načine možemo odabrati ove cijeli za izgradnju vodovoda, uz uvjet da se cijevi ne režu?

Rješenje: Neka je x broj cijevi duljine 3 metra, a y broj cijevi duljine 5 metara. Tada vrijedi

$$3x + 5y = 70.$$

Budući da je $\text{nzd}(3, 5) = 1$, ova linearna diofanstska jednadžba ima rješenja u cijelim brojevima. Jedno rješenje je očito $x = 0$, $y = \frac{70}{5} = 14$, pa su sva rješenja u cijelim brojevima dana sa

$$x = 0 + 5t, \quad y = 14 - 3t.$$

Nas zanimaju samo rješenja u kojima je $x \geq 0$ i $y \geq 0$, tj. $0 \leq t \leq 4$. To su rješenja: $(x, y) = (0, 14), (5, 11), (10, 8), (15, 5), (20, 2)$. $\diamondsuit$