Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Vedran Čačić

Normalne forme i svojstvo konačnih modela za logiku interpretabilnosti

Doktorska disertacija

Zagreb, lipanj 2011.

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Vedran Čačić

Normalne forme i svojstvo konačnih modela za logiku interpretabilnosti

Doktorska disertacija

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mladen Vuković

Zagreb, lipanj 2011.

Sadržaj

Dio 1

Uvod

1. Zašto logika interpretabilnosti?

Rezultati K. Gödela bez sumnje su imali velikog utjecaja na razvoj matematičke logike. Mnoge interpretacije teorema nepotpunosti pojavile su se u raznim granama ljudske djelatnosti, od pesimističnih najava propasti Hilbertovog programa, pa do optimističnih ekstrapolacija o tome kako će za matematičare uvijek biti posla, jer ih umjetna inteligencija nikada neće uspješno zamijeniti.

Na matematičkom planu, jedan od smjerova daljeg istraživanja bio je prirodna generalizacija prvog Gödelovog teorema nepotpunosti, u smislu: Gödelova rečenica je, usprkos svojoj ingenioznosti, rezultat očito vrlo grubog i nesofisticiranog postupka za dolazak do rečenice koja bi bila istinita ali nedokaziva u PA. Kasnije su pronađene i „aritmetičkije” tvrdnje s istim svojstvom [**18**]. Pokušaj generaliziranja prirodno je vodio do proučavanja svojstava predikata dokazivosti Pr, i shvaćanja da se sva ona (koja su zajednička predikatima dokazivosti u svim dovoljno snažnim teorijama) mogu dobiti iz nekoliko jednostavnih aksioma. Precizno, ukoliko prijeđemo na modalni zapis — što je prirodno, jer modalni operatori djeluju upravo na formulama, za razliku od predikata koji mogu djelovati tek na kodovima — i pišemo „φ je dokaziva” kao $\Box\varphi$, logika dokazivosti se može dobiti dodavanjem jedne sheme aksioma

$$\Box(\Box A \to A) \to \Box A \tag{Löb}$$

na standardni sustav K4 koji modelira tranzitivne okvire. Tako dobiveni sustav zove se GL (Gödel-Löb), i predstavlja logiku dokazivosti mnogih logičkih teorija.

Definicija 1. *GL* je modalna logika s jednim unarnim modalnim operatorom $\Box$, zadana sljedećim shemama aksioma:

PT: sve propozicionalne tautologije
K: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
4: $\Box A \to \Box\Box A$
Löb: $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

te pravilima izvoda: modus ponens i nužnost.

$$\text{MP: } \frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad\qquad \text{Gen: } \frac{A}{\Box A}$$

Formalni dokaz da GL doista odgovara logici dokazivosti Peanove aritmetike dao je tek Solovay u [**19**]. Precizno, ako definiramo aritmetičku realizaciju kao preslikavanje * s GL formula u PA formule, koje $\bot$ preslikava u formulu $0 = 1$, propozicionalne varijable u neke aritmetičke formule, komutira s Booleovim veznicima, te $\Box\phi$ preslikava u $Pr(\ulcorner \phi^* \urcorner)$, tada vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2 (Solovay). *Za svaku formulu φ u jeziku GL, vrijedi $GL \vdash \varphi$ ako i samo ako za sve aritmetičke realizacije * vrijedi $PA \vdash \varphi^*$.*

Općenito, za aritmetičku teoriju T i modalnu logiku L, kažemo da je L *logika dokazivosti* za T ako L dokazuje upravo one tvrdnje čije se sve aritmetičke interpretacije mogu dokazati u T. Dakle, Solovayev teorem tvrdi da je GL logika dokazivosti za PA.

Shema aksioma (Löb) je zapis Löbovog teorema, koji je osnovno oruđe za rad s općom dokazivošću, koja je ista u mnogim logičkim teorijama. No što ako se želimo, umjesto na sličnosti, usredotočiti na meta-matematičke *razlike* među teorijama? Svakako, jedan od osnovnih kriterija bio bi uspoređivanje teorija po snazi: intuitivno, teorija T_1 je snažnija od teorije T_2 ako dokazuje sve teoreme od T_2. Međutim, ponekad bismo htjeli uspoređivati i teorije nad različitim jezicima. Tada, naravno, moramo precizirati način na koji se jezik teorije T_2 prevodi na jezik teorije T_1, tako da se tamo mogu dokazati prijevodi svih teorema iz T_2. Prirodno je postaviti zahtjev da taj prijevod čuva pravila zaključivanja, tako da je dovoljno zahtijevati da T_1 dokazuje prijevode svih *aksioma* od T_2. Koristit ćemo definiciju iz [**21**].

Definicija 3. Neka su T_1 i T_2 dvije teorije, i neka T_1 od nelogičkih posjeduje samo relacijske simbole (funkcijski i konstantski simboli se mogu emulirati pomoću relacijskih, dodavanjem novih aksioma, na dobro poznat način). *Relativna interpretacija* teorije T_1 u teoriji T_2 je uređen par $k := (\delta, F)$, gdje je δ formula teorije T_2 s točno jednom slobodnom varijablom x_1, a F preslikavanje koje svakom relacijskom simbolu R^n od T_1 (uključujući simbol za jednakost) pridružuje formulu $F(R^n)$ od T_2, s točno n slobodnih varijabli $x_1, \ldots, x_n$, gdje je n mjesnost od R.

Koristeći δ i F, možemo definirati interpretaciju svih formula od T_1, indukcijom:

- $\big(R^n(x_1, \ldots, x_n)\big)^k := \big(F(R^n)\big)(x_1, \ldots, x_k)$
- k komutira s logičkim veznicima
  (na primjer, $(\varphi \land \psi)^k := \varphi^k \land \psi^k$)
- $\big(\forall x \varphi\big)^k := \forall x\big(\delta(x) \to \varphi^k\big)$, $\big(\exists x \varphi\big)^k := \exists x\big(\delta(x) \land \varphi^k\big)$

Tada još zahtijevamo da vrijedi $T_2 \vdash \varphi^k$ za sve aksiome φ od T_1, što se odnosi i na novododane aksiome koji služe za vjerno emuliranje funkcijskih i konstantskih simbola u T_1. Također s obzirom na uobičajenu logičku konvenciju o nepraznosti modela, zahtijevamo netrivijalnost interpretacije, odnosno $T_2 \vdash \exists x \delta(x)$.

Ako postoji relativna interpretacija T_1 u T_2, kažemo da je T_1 *interpretabilna* u T_2, i pišemo $T_2 \rhd T_1$. Često ćemo sve gledati kao proširenja neke osnovne teorije T, te za formule φ i ψ, s $\varphi \rhd_T \psi$ označavamo $(T + \varphi) \rhd (T + \psi)$. Indeks T često ne pišemo ako je jasno iz konteksta na koju teoriju se misli (obično će to biti neke osnovne aritmetičke teorije).

Primijetimo da je $\rhd$ na teorijama prirodna formalizacija intuicije da je jedna teorija snažnija od druge. Također primijetimo da nam prelazak s općih teorija na formule dodane nekoj osnovnoj teoriji omogućuje da nastavimo modalni tretman pitanja vezanih uz interpretabilnost. Naime, kao što smo rekli, modalni operatori prirodno djeluju na formulama, ne na teorijama. Kao što možemo putem kodiranja reprezentirati formule prirodnim brojevima, tako možemo i opće teorije reprezentirati formulama, ali puno teže. Jednostavnije je promatrati formule kao proširenja neke teorije T, i tada $\rhd_T$ prirodno postaje *binarni* modalni operator, vezan uz *logiku interpretabilnosti* teorije T — baš kao što $\Box_T$, modalna reprezentacija predikata dokazivosti u teoriji T postaje unarni modalni operator vezan uz logiku dokazivosti teorije T.

Generalizirajući po T, dobivamo *principe interpretabilnosti*, koji vrijede za interpretabilnost unutar svih dovoljno snažnih teorija T. Logika IL, uvedena u [**20**] je, analogno s GL, logika u kojoj su aksiomatski nabrojani neki elementarni principi interpretabilnosti što vrijede za sve „razumne" teorije:

J1: $\Box(A \to B) \to (A \rhd B)$
J2: $\big((A \rhd B) \wedge (B \rhd C)\big) \to (A \rhd C)$
J3: $\big((A \rhd C) \wedge (B \rhd C)\big) \to \big((A \vee B) \rhd C\big)$
J4: $(A \rhd B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$
J5: $\Diamond A \rhd A$

S obzirom na to da je interpetabilnost definirana pomoću dokazivosti, ne iznenađuje da se modalni operator $\Box$ može izraziti pomoću $\rhd$, te IL u sebi sadrži GL.

Važno je napomenuti da IL ne sadrži *sve* principe interpretabilnosti, mnogi od kojih se dobiju ako osnažimo osnovnu teoriju. Postoje razna proširenja od IL, nastala dodavanjem različitih principa intepretabilnosti, koji iako ne vrijede uvijek, vrijede za dovoljno široku klasu teorija da ih se isplati proučavati posebno.

Neki važni principi interpretabilnosti kojima se proširuje IL su:

M: $(A \rhd B) \to \big((A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C)\big)$ (Montagna)

$$\begin{array}{rl}
M_0\colon & (A \rhd B) \to \big((\Diamond A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C)\big) \\
P\colon & (A \rhd B) \to \Box(A \rhd B) \quad \text{(perzistentnost)} \\
P_0\colon & (A \rhd \Diamond B) \to \Box(A \rhd B) \\
F\colon & (A \rhd \Diamond A) \to \Box\neg A \quad \text{(Feferman)} \\
W\colon & (A \rhd B) \to \big(A \rhd (B \wedge \Box\neg A)\big) \\
W^*\colon & (A \rhd B) \to \big((B \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C \wedge \Box\neg A)\big)
\end{array}$$

Za svaki takav princip X, oznakom ILX označavamo odgovarajuće proširenje. Detaljna analiza tih i mnogih drugih principa može se naći u literaturi [**21, 12, 3, 15, 11**]. O odnosima između pojedinih principa može se naći u [**26, 24, 27, 25**].

Prirodno je postaviti pitanje koji je analogon teorema 2 za logiku interpretabilnosti. Striktno govoreći, to je Berarduccijev rezultat [**2**], da je logika interpretabilnosti za PA upravo ILM. No GL je logika dokazivosti i mnogih drugih teorija (ZF, NBG,...), dok je IL puno osjetljivija na promjene osnovne teorije — na primjer, Visser [**20**] je dokazao da je ILP logika interpretabilnosti za NBG. Dakle, šire gledano, postavlja se pitanje koja je to logika interpretabilnosti zajednička svim „razumnim" teorijama. Zasad ne znamo odgovor. Neko vrijeme se mislilo da je to ILW^*, no Joosten [**16**] je pokazao da je tražena logika jača od toga, kao i od ILP_0. S druge strane, iz gornjeg se vidi da ta logika mora biti slabija od ILM i ILP.

2. Jezik, sintaksa i aksiomatika za IL

Krećemo od skupa propozicionalnih varijabli, kojeg označavamo s *Prop*. O njemu općenito ne pretpostavljamo ništa; u nekim dijelovima ovog rada bit će konačan, u nekima prebrojiv, u nekima prazan. Njegove elemente obično označavamo s p, q, i sličnim slovima.

Od simbola tu su još logička konstanta $\bot$, binarni logički veznik $\to$, te binarni modalni operator $\rhd$. Formula je ili $\bot$, ili p za neki $p \in \mathit{Prop}$, ili je oblika $F \to G$ ili $F \rhd G$, gdje su F i G formule. Formalno gramatički,

$$F ::= \bot \mid p \mid q \mid \cdots \mid (F_1 \to F_2) \mid (F_1 \rhd F_2)\ .$$

Kao što vidimo, cilj nam je minimizirati osnovnu sintaksu, jer tako smanjujemo broj slučajeva koje treba gledati u induktivnim dokazima. Svi ostali uobičajeni logički veznici i modalni operatori mogu se prikazati pomoću tri osnovna simbola $\bot$, $\to$ i $\rhd$:

$$\begin{array}{rcl}
\neg(F \to \bot) & :\Longleftrightarrow & F \\
\neg G & :\Longleftrightarrow & G \to \bot, \text{ ako } G \text{ nije oblika } F \to \bot \\
\top & :\Longleftrightarrow & \neg\bot \\
F \vee G & :\Longleftrightarrow & \neg F \to G \\
F \wedge G & :\Longleftrightarrow & \neg(F \to \neg G) \\
F \leftrightarrow G & :\Longleftrightarrow & (F \to G) \wedge (G \to F) \\
\Box F & :\Longleftrightarrow & \neg F \rhd \bot \\
\Diamond F & :\Longleftrightarrow & \neg(F \rhd \bot)
\end{array}$$

Vidimo da je negacija definirana po slučajevima, drugačijim pravilom za formule oblika $F \to \bot$. Lako se vidi da je takva definicija također u skladu s intuitivnim poimanjem negacije, a ima svojstvo da za mnoge formule F vrijedi $\neg\neg F = F$, što će biti korisno kasnije. Da bismo to precizirali, trebamo pojam *negirane* formule.

Definicija 4. Za IL formulu G kažemo da je *negirana*, ako je $G = (F \to \bot)$ za neku formulu F.

Dakle, negacija negirane formule G je potformula od G. Za formule F koje nisu negirane (dakle, one oblika $F_1 \rhd F_2$, $F_1 \to (F_2 \to F_3)$, $F_1 \to (F_2 \rhd F_3)$, te $\bot$), negacija od F je negirana formula $F \to \bot$, koja sadrži F kao potformulu.

Lema 5. *Ako F nije oblika $(G \to \bot) \to \bot$, tada je $\neg\neg F = F$.*

Dokaz. Ako F nije negirana, tada je $\neg F = (F \to \bot)$ po definiciji, pa je $\neg\neg F = \neg(F \to \bot) = F$.

Ako pak F jest negirana, recimo $F = (H \to \bot)$ za neku formulu H, tada po pretpostavci leme H nije negirana, pa vrijedi

$$\neg\neg F = \neg\neg(H \to \bot) = \neg H = (H \to \bot) = F\ .$$

$\Box$

Tako definirani logički veznici i modalni operatori omogućuju nam da koncizno iskažemo aksiome. Aksiomima od IL smatramo sve propozicionalne tautologije, sve instance sheme (Löb), te sve instance sljedećih shema:

J1: $\Box(A \to B) \to (A \rhd B)$
J2: $\big((A \rhd B) \wedge (B \rhd C)\big) \to (A \rhd C)$
J3: $\big((A \rhd C) \wedge (B \rhd C)\big) \to \big((A \vee B) \rhd C\big)$
J4: $(A \rhd B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$
J5: $\Diamond A \rhd A$

Propozicionalnom tautologijom zovemo formulu koja je dobivena iz neke tautologije logike sudova, simultanom zamjenom propozicionalnih varijabli proizvoljnim IL formulama, tako da se ista propozicionalna varijabla svugdje zamijeni istom formulom. Korištenje propozicionalnih tautologija u izvodima ćemo označavati s (PT).

IL ima ista pravila izvoda kao i GL, dakle modus ponens i nužnost:

$$\text{MP:} \quad \frac{A \qquad A \to B}{B} \qquad\qquad\qquad \text{Gen:} \quad \frac{A}{\Box A}$$

3. Jednostavne posljedice aksioma za IL

Prvo dokažimo da se zamjenom bilo koje potformule ekvivalentnom potformulom ponovo dobiva ekvivalentna formula. Osim što je taj princip vrlo koristan u logikama koje ga imaju, pokazat će i koliko je jednostavnije provoditi indukciju po formulama kad imamo minimalnu osnovnu sintaksu. Konkretno, nama će trebati za shvaćanje šireg konteksta rezultata o normalnim formama, jer nalaženjem normalnih formi za nekoliko osnovnih „građevnih blokova", moći ćemo ih kasnije slagati u normalne forme složenijih formula.

Prvo će nam trebati nekoliko tehničkih lema. Ubuduće, pod znakom $\vdash$ podrazumijevamo $\vdash_{\mathrm{IL}}$, dakle postojanje izvoda u IL. Napominjemo da se ne radi o izvodu u najstrožem smislu (koristit ćemo pretpostavke i već dokazane leme kao aksiome radi kraćeg zapisa), ali svi takvi „generalizirani izvodi" mogu se dobro poznatim postupcima razviti u izvode u strogom smislu.

LEMA 6. *Ako* $\vdash \varphi \to \psi$*, tada* $\vdash \varphi \rhd \psi$*.*

DOKAZ. Pod pretpostavkom postojanja izvoda za $\varphi \to \psi$, izvod za $\varphi \rhd \psi$ glasi:

(1) $\vdash \varphi \to \psi$ (pretpostavka)
(2) $\vdash \Box(\varphi \to \psi)$ (Gen: 1)
(3) $\vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\varphi \rhd \psi)$ (J1)
(4) $\vdash \varphi \rhd \psi$ (MP: 2,3)

Primijetimo upotrebu aksioma (J1), te pravila nužnosti. $\Box$

KOROLAR 7. *Ako* $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$*, tada (a)* $\vdash \varphi \rhd \psi$ *i (b)* $\vdash \psi \rhd \varphi$*.*

DOKAZ. Napisat ćemo izvod za $\varphi \rhd \psi$, izvod za $\psi \rhd \varphi$ je analogan.

(1) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ (pretpostavka)
(2) $\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi)$ (PT)

(3) $\vdash \varphi \to \psi$ (MP: 1,2)
(4) $\vdash \varphi \rhd \psi$ (lema 6: 3) □

LEMA 8. *Ako su φ, ψ i ξ IL formule, te $\vdash \varphi \rhd \psi$, tada (a) $\vdash (\psi \rhd \xi) \to (\varphi \rhd \xi)$ i (b) $\vdash (\xi \rhd \varphi) \to (\xi \rhd \psi)$.*

DOKAZ. Opet, dovoljno je napisati izvod za prvu tvrdnju, druga se izvodi analogno.

(1) $\vdash \varphi \rhd \psi$ (pretpostavka)
(2) $\vdash \big((\varphi \rhd \psi) \wedge (\psi \rhd \xi)\big) \to (\varphi \rhd \xi)$ (J2)
(3) $\vdash \Big(\big((\varphi \rhd \psi) \wedge (\psi \rhd \xi)\big) \to (\varphi \rhd \xi)\Big) \to \Big((\varphi \rhd \psi) \to \big((\psi \rhd \xi) \to (\varphi \rhd \xi)\big)\Big)$ (PT)
(4) $\vdash (\varphi \rhd \psi) \to \big((\psi \rhd \xi) \to (\varphi \rhd \xi)\big)$ (MP: 2,3)
(5) $\vdash (\psi \rhd \xi) \to (\varphi \rhd \xi)$ (MP: 1,4)

Primijetimo da se ovdje koristi aksiom (J2). □

KOROLAR 9. *Ako su φ, ψ i ξ formule takve da vrijedi $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, tada vrijedi (a) $\vdash (\varphi \rhd \xi) \leftrightarrow (\psi \rhd \xi)$ i (b) $\vdash (\xi \rhd \varphi) \leftrightarrow (\xi \rhd \psi)$.*

DOKAZ. Izvode je lako napisati koristeći korolar 7 i lemu 8. Pišemo samo prvi od njih, drugi je analogan.

(1) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ (pretpostavka)
(2) $\vdash \varphi \rhd \psi$ (korolar 7a: 1)
(3) $\vdash \psi \rhd \varphi$ (korolar 7b: 1)
(4) $\vdash (\varphi \rhd \xi) \to (\psi \rhd \xi)$ (lema 8a: 2)
(5) $\vdash (\psi \rhd \xi) \to (\varphi \rhd \xi)$ (lema 8a: 3)
(6) $\vdash \big((\psi \rhd \xi) \to (\varphi \rhd \xi)\big) \to \Big(\big((\varphi \rhd \xi) \to (\psi \rhd \xi)\big) \to \big((\varphi \rhd \xi) \leftrightarrow (\psi \rhd \xi)\big)\Big)$ (PT)
(7) $\vdash \big((\varphi \rhd \xi) \to (\psi \rhd \xi)\big) \to \big((\varphi \rhd \xi) \leftrightarrow (\psi \rhd \xi)\big)$ (MP: 4,6)
(8) $\vdash (\varphi \rhd \xi) \leftrightarrow (\psi \rhd \xi)$ (MP: 5,7) □

TEOREM 10. (Teorem o supstituciji) *Ako su φ, ψ i ξ IL formule te $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, tada $\vdash \xi \leftrightarrow \xi'$, za sve formule ξ' dobivene od ξ zamjenom nekih (ili svih) potformula koje su jednake φ, formulom ψ.*

DOKAZ. Označujući sva mjesta na kojima obavljamo zamjenu novom propozicionalnom varijablom p, lako se vidi da je tvrdnja teorema ekvivalentna sljedećoj tvrdnji:

> „Neka je $\xi(p)$ IL formula u kojoj se može pojavljivati propozicionalna varijabla p. Ako $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, tada $\vdash \xi(\varphi) \leftrightarrow \xi(\psi)$.",

koja se lako dokaže indukcijom po formuli $\xi(p)$.

$\xi(p) = \bot$: Tada je $\xi(\varphi) = \xi(\psi) = \bot$, a očito vrijedi $\vdash \bot \leftrightarrow \bot$ (PT).

$\xi(p) = p$: Tada je $\xi(\varphi) = \varphi$, i $\xi(\psi) = \psi$, a po pretpostavci leme imamo $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$.

$\xi(p) = q \in Prop \setminus \{p\}$: Tada je $\xi(\varphi) = \xi(\psi) = q$, a vrijedi $\vdash q \leftrightarrow q$ (PT).

$\xi(p) = \big(\mu(p) \to \nu(p)\big)$: Tada je $\xi(\varphi) = \big(\mu(\varphi) \to \nu(\varphi)\big)$, i $\xi(\psi) = \big(\mu(\psi) \to \nu(\psi)\big)$, te možemo primijeniti pretpostavku indukcije na formule $\mu(p)$ i $\nu(p)$. Tada traženi izvod glasi:

(1) $\vdash \mu(\varphi) \leftrightarrow \mu(\psi)$ (pretpostavka indukcije)
(2) $\vdash \nu(\varphi) \leftrightarrow \nu(\psi)$ (pretpostavka indukcije)
(3) $\vdash (\mu(\varphi) \leftrightarrow \mu(\psi)) \to \Big(\big(\nu(\varphi) \leftrightarrow \nu(\psi)\big) \to \big(\xi(\varphi) \leftrightarrow \xi(\psi)\big)\Big)$ (PT)
(4) $\vdash (\nu(\varphi) \leftrightarrow \nu(\psi)) \to \big(\xi(\varphi) \leftrightarrow \xi(\psi)\big)$ (MP: 1,3)
(5) $\vdash \xi(\varphi) \leftrightarrow \xi(\psi)$ (MP: 2,4)

$\xi(p) = \big(\mu(p) \rhd \nu(p)\big)$: Tada je $\xi(\varphi) = \big(\mu(\varphi) \rhd \nu(\varphi)\big)$, i $\xi(\psi) = \big(\mu(\psi) \rhd \nu(\psi)\big)$, te kao i gore možemo primijeniti pretpostavku indukcije na $\mu(p)$ i $\nu(p)$. Traženi izvod je tada:

(1) $\vdash \mu(\varphi) \leftrightarrow \mu(\psi)$ (pretpostavka indukcije)
(2) $\vdash \nu(\varphi) \leftrightarrow \nu(\psi)$ (pretpostavka indukcije)
(3) $\vdash \underbrace{\big(\mu(\varphi) \rhd \nu(\varphi)\big)}_{=\xi(\varphi)} \leftrightarrow \big(\mu(\psi) \rhd \nu(\varphi)\big)$ (korolar 9a: 1)
(4) $\vdash \big(\mu(\psi) \rhd \nu(\varphi)\big) \leftrightarrow \overbrace{\big(\mu(\psi) \rhd \nu(\psi)\big)}^{=\xi(\psi)}$ (korolar 9b: 2)
(5) $\vdash \big(\xi(\varphi) \leftrightarrow (\mu(\psi) \rhd \nu(\varphi))\big) \to$
$\to \Big(\big((\mu(\psi) \rhd \nu(\varphi)) \leftrightarrow \xi(\psi)\big) \to (\xi(\varphi) \leftrightarrow \xi(\psi))\Big)$ (PT)
(6) $\vdash \big((\mu(\psi) \rhd \nu(\varphi)) \leftrightarrow \xi(\psi)\big) \to (\xi(\varphi) \leftrightarrow \xi(\psi))$ (MP: 3,5)
(7) $\vdash \xi(\varphi) \leftrightarrow \xi(\psi)$ (MP: 4,6) $\square$

Nakon što smo dokazali teorem o supstituciji, možemo biti manje pažljivi što se tiče oblika formula s kojima radimo, dok god potformule ostaju dokazivo ekvivalentne: preciznije, možemo u bilo kojem trenutku neku liniju izvoda, ili neki njen dio, zapisati u dokazivo ekvivalentnom obliku. Najčešće će ta ekvivalencija biti propozicionalna tautologija, dakle aksiom od IL, pa ga nećemo ni pisati posebno. To također znači da ćemo s negacijom ubuduće moći raditi na uobičajen način, (na primjer, ponašati se kao da je $\neg F$ uvijek pokrata za $F \to \bot$), osim u nekim vrlo specifičnim slučajevima kad će nam oblik od F biti bitan.

Sada možemo dokazati da IL sadrži GL: njena pravila izvoda i Löbov aksiom sadrži po definiciji, još preostaje vidjeti da sadrži aksiome od K4 — naravno, shvaćajući $\Box$ kao pokratu.

LEMA 11. *Ako su φ i ψ proizvoljne IL formule,* $\vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$.

DOKAZ. Pišemo izvod za tu formulu. Izvod se prirodno sastoji od tri dijela:

(1) $\vdash \neg\psi \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (PT)
(2) $\vdash \neg\psi \rhd (\neg\varphi \vee \neg\psi)$ (lema 6: 1)
(3) $\vdash \big((\neg\varphi \vee \neg\psi) \rhd \bot\big) \to (\neg\psi \rhd \bot)$ (lema 8a: 2)
(4) $\vdash \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \rhd \bot\big) \to (\neg\psi \rhd \bot)$ (teorem 10: 3)
(5) $\vdash \Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi$ (pokrata $\Box$: 4)

(6) $\vdash \big(((\varphi\wedge\neg\psi)\rhd\bot)\wedge(\neg\varphi\rhd\bot)\big) \to \big(((\varphi\wedge\neg\psi)\vee\neg\varphi)\rhd\bot\big)$ (J3)
(7) $\vdash \big((\neg(\varphi \to \psi) \rhd \bot) \wedge (\neg\varphi \rhd \bot)\big) \to \big(\neg(\varphi \wedge \psi) \rhd \bot\big)$ (teorem 10: 6)
(8) $\vdash \big(\Box(\varphi \to \psi) \wedge \Box\varphi\big) \to \Box(\varphi \wedge \psi)$ (pokrata $\Box$: 7)

(9) $\vdash \big((\Box(\varphi \to \psi) \wedge \Box\varphi) \to \Box(\varphi \wedge \psi)\big) \to$
$\to \big((\Box(\varphi\wedge\psi) \to \Box\psi) \to \big((\Box(\varphi \to \psi)\wedge\Box\varphi) \to \Box\psi\big)\big)$ (PT)
(10) $\vdash \big(\Box(\varphi \wedge \psi) \to \Box\psi\big) \to \big((\Box(\varphi \to \psi) \wedge \Box\varphi) \to \Box\psi\big)$ (MP: 8,9)
(11) $\vdash (\Box(\varphi \to \psi) \wedge \Box\varphi) \to \Box\psi$ (MP: 5,10)
(12) $\vdash \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ (teorem 10: 11)

Primijetimo korištenje aksioma (J3) u drugom dijelu izvoda. $\Box$

LEMA 12. *Ako je φ proizvoljna IL formula,* $\vdash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$.

DOKAZ. Ovo je popriličnо jednostavnije od prethodne leme. Prvo primijetimo da formule oblika $F \rhd \bot$ sigurno nisu negirane, te primjenom leme 5 imamo

$$\neg\Diamond\neg\varphi = \neg\neg(\neg\psi \rhd \bot) = \neg\psi \rhd \bot = \Box\psi\ , \quad \text{i}$$
$$\neg\Diamond\Diamond\neg\varphi = \neg\neg(\Diamond\neg\varphi \rhd \bot) = \Diamond\neg\varphi \rhd \bot =$$
$$= \neg(\neg\varphi \rhd \bot) \rhd \bot = \neg\Box\varphi \rhd \bot = \Box\Box\varphi\ .$$

Tada je izvod:

(1) $\vdash (\Diamond\neg\varphi \rhd \neg\varphi) \to (\Diamond\Diamond\neg\varphi \to \Diamond\neg\varphi)$ (J4)
(2) $\vdash \Diamond\neg\varphi \rhd \neg\varphi$ (J5)
(3) $\vdash \Diamond\Diamond\neg\varphi \to \Diamond\neg\varphi$ (MP: 2,1)
(4) $\vdash (\Diamond\Diamond\neg\varphi \to \Diamond\neg\varphi) \to (\underbrace{\neg\Diamond\neg\varphi}_{=\Box\varphi} \to \underbrace{\neg\Diamond\Diamond\neg\varphi}_{=\Box\Box\varphi})$ (PT)
(5) $\vdash \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$ (MP: 3,4)

Primijetimo korištenje preostalih aksioma, (J4) i (J5). $\Box$

Dio 2

Normalne forme

POGLAVLJE 1

Motivacija

Logički jezik, usprkos želji za konciznim zapisom mišljenja i zaključivanja, i dalje pruža veliku slobodu pri odabiru oblika formule kojom će se nešto izraziti. Dio redundancije svakako dolazi od želje da što vjernije opišemo razne veze među tvrdnjama u svakodnevnom jeziku, te imamo brojne logičke veznike i druge konstrukte koji se mogu svesti jedni na druge. Vjerojatno je najpoznatiji primjer materijalna implikacija u logici sudova, gdje želja za izricanjem teorema u obliku „pretpostavke teorema povlače tvrdnju teorema" dovodi prirodno do uvođenja veznika $\to$, koji se, što se istinitosno-vrijednosne semantike logike sudova tiče, može jednako precizno izraziti pomoću negacije i disjunkcije. Također, drugi čisto sintaktički detalji — na primjer, komutativnost konjunkcije — mogu bitno povećati broj formula koje znače isto.

No važno je napomenuti da to nije jedini izvor redundancije u izražavanju. Može se pokazati da je $\{\bot, \to, \rhd\}$ minimalan skup simbola za zasnivanje logike interpretabilnosti, pa ipak i u osnovnom jeziku IL ima mnogo načina za izreći istu tvrdnju. Semantika uvijek predstavlja neku vrstu homomorfizma iz prostora formula u prostor njihovih značenja, i rijetko je injektivna. Na primjer, u logici sudova, $P_1 \to P_1$ znači isto što i $P_2 \vee \neg P_2$, iako su te dvije formule sintaktički potpuno disjunktne — čak nemaju zajedničkih propozicionalnih varijabli.

To nije isključivo logički fenomen. U elementarnoj aritmetici, izrazi poput '$2 \cdot 4$' i '$3 + 5$' također znače isto, usprkos bitno različitoj sintaksi. U takvim slučajevima navikli smo *izračunati* te izraze, odnosno zapisati i jedan i drugi u kanonskoj formi '8'. Izračunavanjem svodimo proizvoljnu formu na kanonsku, a uspoređivanje kanonskih formi se svodi na jednostavno „grafičko" uspoređivanje simbola.

Često je prezahtjevno, ili uključuje proizvoljne odabire koje je teško opravdati, dovesti sve u kanonsku formu. *Normalne forme* su svojevrstan kompromis: iz njih se često vide mnoga bitna svojstva početnog izraza, i uspoređivanje normalnih formi, iako nije grafičko, uglavnom se može izvesti isključivo sintaktički. Na primjer, kanonska forma razlomka ($\frac{a}{b}$ gdje su a i b relativno prosti) uključuje primjenu Euklidovog algoritma, dok je normalna forma $\frac{a}{b}$ dovoljno dobra za mnoge potrebe, a svođenje aritmetičkih izraza na nju zahtijeva samo osnovne računske operacije.

U logici za uspoređivanje formula ulogu jednakosti preuzima ekvivalentnost. Dakle, želimo da svaka formula bude ekvivalentna nekoj formuli specijalnog oblika (svojoj normalnoj formi), da svođenje na tu normalnu formu bude efektivno izvedivo, te da se uspoređivanje normalnih formi može obavljati jednostavnim sintaktičkim manipulacijama. Primjer takve normalne forme za logiku sudova je konjunktivna normalna forma, sa sintaktičkim manipulacijama poput promjene redoslijeda elementarnih disjunkcija, ili literala unutar pojedine elementarne disjunkcije. Primjer za logiku prvog reda je preneksna normalna forma, sa sintaktičkim manipulacijama kao što su zamjena susjednih istovrsnih kvantifikatora, ili preimenovanje vezanih varijabli.

Kod kompliciranijih logika pojavljuju se dodatni fenomeni. Tako kod modalnih logika imamo dva prirodna pojma ekvivalencije — lokalnu i globalnu, no globalna se više čini u duhu „jednake semantike" normalnih formi. Također, uz neke razumne zahtjeve, pokazuje se da normalna forma već za GL, u slučaju nepraznog skupa *Prop*, ne postoji. Ipak postoji normalna forma za *zatvoreni fragment* od GL, koji se sastoji od formula bez propozicionalnih varijabli. Proći ćemo kroz taj dokaz, koji se osniva na pojmovima dubine svijeta i traga formule, a onda vidjeti što se od toga može prenijeti u IL.

POGLAVLJE 2

Pregled — normalne forme u logici GL

1. GL i njene strukture

Ponovimo, GL je modalna logika s jednim unarnim modalnim operatorom $\Box$, zadana shemama aksioma (PT), (K), (4) i (Löb), te pravilima izvoda: modus ponens i nužnost. Ovdje promatramo zatvoreni fragment, dakle $Prop = \emptyset$. Kako nemamo propozicionalnih varijabli, u svrhu „početne točke” za izgradnju formula uvodimo simbol $\bot$, a tada se svi logički veznici mogu izraziti uvođenjem veznika $\to$, kao što smo već naveli za IL. Također se $\Diamond F$ može izraziti kao $\neg\Box\neg F$. Formule su dakle zadane gramatičkim pravilom

$$F ::= \bot \mid (F_1 \to F_2) \mid \Box F_1 \ .$$

Definicija 13. *GL okvir* je uređen par $\mathfrak{N} := (W, R)$, gdje je W neprazan skup čije elemente zovemo *svjetovi*, a R tranzitivna binarna relacija na W, takva da je R^{-1} dobro utemeljena relacija (dakle, ne postoji lanac $w_1 \ R \ w_2 \ R \ w_3 \ R \ \cdots$). *GL struktura* je uređena trojka $(W, R, \Vdash)$, gdje je (W, R) GL okvir, a $\Vdash \subseteq W \times Prop$ relacija *forsiranja* između svjetova i propozicionalnih varijabli.

Primijetimo da je u našem slučaju bez propozicionalnih varijabli osnovna relacija forsiranja uvijek prazna, te je zadati strukturu isto što i zadati okvir. No relacija forsiranja se može proširiti na relaciju između svjetova i GL formula, induktivno — za sve svjetove $w \in W$ definiramo:

- $w \nVdash \bot$
- $w \Vdash F \to G$ ako i samo ako $w \nVdash F$ ili $w \Vdash G$
- $w \Vdash \Box F$ ako i samo ako za sve $v \in W$ takve da je $w \ R \ v$ vrijedi $v \Vdash F$

Često pišemo $\mathfrak{N}, w \Vdash \varphi$ da bismo naglasili o kojem se okviru ili strukturi radi. Ako vrijedi $\mathfrak{N}, w \Vdash \varphi$ za sve svjetove $w \in W$, pišemo samo $\mathfrak{N} \Vdash \varphi$. Ako pak to vrijedi za sve GL strukture (odnosno okvire) $\mathfrak{N}$, pišemo $\Vdash \varphi$ i kažemo: φ je *GL valjana* formula.

Prisjetimo se shema aksioma za GL:

PT: sve propozicionalne tautologije
K: $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
4: $\Box A \to \Box\Box A$
Löb: $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$

Navedeni aksiomi predstavljaju adekvatan i potpun sustav za GL strukture. Štoviše, vrijedi *svojstvo konačnosti modela*, odnosno formula koja nije teorem od GL sigurno ne vrijedi već na nekoj konačnoj GL strukturi. Precizno, vrijedi sljedeći teorem, dokaz kojeg se može naći u [**7**]. ($\vdash_{\mathrm{GL}}$ nam označava postojanje izvoda u GL.)

TEOREM 14. *Neka je φ GL formula.*

(1) *Ako vrijedi $\vdash_{\mathrm{GL}} \varphi$, tada vrijedi i $\Vdash \varphi$.*
(2) *Ako vrijedi $\nvdash_{\mathrm{GL}} \varphi$, tada postoji* konačna *GL struktura* $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$ *i svijet $w \in W$, takvi da $\mathfrak{N}, w \nVdash \varphi$.*

DOKAZ. Proći ćemo kroz dokaz prve tvrdnje (adekvatnosti), da steknemo uvid u to kako se pojedini aksiomi i pravila izvoda odražavaju na GL strukture.

Neka je dakle φ formula, i $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ njen izvod u GL. Dakle, $\varphi_n = \varphi$, i svaka formula u tom izvodu je ili aksiom od GL, ili je dobivena od ranijih formula nekim pravilom izvoda. Fiksirajmo neku GL strukturu $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$. Totalnom indukcijom po k dokazat ćemo da je $\mathfrak{N}, w \Vdash \varphi_k$ za sve $w \in W$. Pretpostavimo da to vrijedi za sve $i < k$, i pogledajmo kako je formula φ_k mogla doći u izvod.

PT: Ako je φ_k propozicionalna tautologija, recimo da je $\varphi_k = F(\psi_1, \ldots, \psi_m)$, gdje je $F(P_1, \ldots, P_m)$ tautologija logike sudova u kojoj se pojavljuje samo prvih m propozicionalnih varijabli. Ako sada definiramo parcijalnu interpretaciju I_w kao $I_w(P_j) := \begin{cases} 1, & w \Vdash \psi_j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$, očito vrijedi $w \Vdash \varphi$ ako i samo ako je $I_w(F) = 1$. No to je sigurno istina, jer je F tautologija.

K: Pretpostavimo suprotno, $w \nVdash \Box(\psi \to \xi) \to (\Box\psi \to \Box\xi)$. Po definiciji relacije forsiranja, to znači $w \Vdash \Box(\psi \to \xi)$ i $w \Vdash \Box\psi$, ali $w \nVdash \Box\xi$. Ovo posljednje znači da postoji $v \in W$ takav da je $w \; R \; v$ i $v \nVdash \xi$. Kako je $W \; R \; v$, prve dvije relacije povlače $v \Vdash \psi \to \xi$ i $v \Vdash \psi$, dakle $v \Vdash \xi$, što je kontradikcija.

4: Pretpostavka suprotnog ovdje bi značila $w \nVdash \Box\psi \to \Box\Box\psi$, odnosno $w \Vdash \Box\psi$, te postoji v takav da je $w \; R \; v$ i $v \nVdash \Box\psi$. To posljednje znači da postoji u takav da je $v \; R \; u$ i $u \nVdash \psi$. No tada po tranzitivnosti $w \; R \; v \; R \; u$ povlači $w \; R \; u$, te je $u \nVdash \psi$ u kontradikciji s $w \Vdash \Box\psi$.

Löb: Opet, pretpostavimo suprotno: $w \nVdash \Box(\Box\psi \to \psi) \to \Box\psi$. To znači da postoji v_1 takav da je $w\ R\ v_1$ i $v_1 \nVdash \psi$, te vrijedi $w \Vdash \Box(\Box\psi \to \psi)$, dakle $v_1 \Vdash \Box\psi \to \psi$. Kako znamo $v_1 \nVdash \psi$, iz toga slijedi $v_1 \nVdash \Box\psi$, pa postoji v_2 takav da je $v_1\ R\ v_2 \nVdash \psi$. Po tranzitivnosti je $w\ R\ v_2$, pa istim argumentom kao i za v_1 dobijemo da postoji v_3 na kojem ne vrijedi ψ,.... Ukupno dobijemo $w\ R\ v_1\ R\ v_2\ R\ \ldots$, što je kontradikcija s dobrom utemeljenošću od R^{-1}.

MP: To znači da postoje $1 \leq i, j < k$ takvi da je $\varphi_j = (\varphi_i \to \varphi_k)$. Po pretpostavci indukcije $w \Vdash \varphi_i \to \varphi_k$, dakle $w \nVdash \varphi_i$ ili $w \Vdash \varphi_k$. No također po pretpostavci indukcije imamo $w \Vdash \varphi_i$, dakle mora biti $w \Vdash \varphi_k$.

Gen: To znači da postoji $1 \leq i < k$ takav da je $\varphi_k = \Box\varphi_i$. Po pretpostavci indukcije imamo $v \Vdash \varphi_i$ za sve $v \in W$, pa specijalno i za sve v takve da je $w\ R\ v$, a to po definiciji znači $w \Vdash \varphi_k$.

Specijalno to vrijedi i za $k = n$, pa $\mathfrak{N} \Vdash \varphi_n = \varphi$, što smo i trebali. $\Box$

2. Dubina svijeta i trag formule

Dobra utemeljenost relacije R^{-1} omogućava nam induktivne definicije po njoj — ako smo nešto definirali na svim sljedbenicima nekog svijeta w, tada to možemo definirati i na w. Primjer takve induktivne definicije bi mogla biti semantika operatora $\Box$, kad ne bi postojao lakši način, indukcijom po strukturi formule. No važan primjer pojma koji je prirodno induktivan po R^{-1} je dubina.

Definicija 15. Neka je $\mathfrak{N} := (W, R)$ neki GL okvir (ili GL struktura, ali relacija forsiranja je irelevantna za definiciju). *Dubina* je funkcija $\rho : W \to \mathbf{On}$ (vrijednosti su joj ordinali), definirana induktivno pomoću

$$\rho(w) := \sup_{wRv} \rho(v)^+.$$

Dakle, „terminalni” svjetovi koji nemaju sljedbenika su dubine 0, svjetovi koji imaju samo terminalne sljedbenike (bar jednog) su dubine 1, i tako dalje. Primijetimo da u konačnim okvirima svi svjetovi imaju konačno mnogo sljedbenika, pa je svaki supremum u definiciji dubine zapravo maksimum, i svaka dubina je konačna. Štoviše, slika funkcije ρ je uvijek ordinal, što pokazuje sljedeća lema.

Lema 16. *Ako je $\rho(w) > \alpha$, tada postoji v takav da je $w\ R\ v$ i $\rho(v) = \alpha$.*

Dokaz. Po teoremu o oduzimanju ordinala (vidjeti na primjer [**14**]) postoji $\beta \geq 1$ takav da je $\rho(w) = \alpha + \beta$. Dokazat ćemo tvrdnju, za sve α i w, transfinitnom indukcijom po β.

$\beta = 1$: Tada je $\sup_{wRv} \rho(v)^+ = \alpha + 1 = \alpha^+$, pa za svaki sljedbenik v od w vrijedi $\rho(v)^+ \leq \alpha^+$, dakle $\rho(v) \leq \alpha$. Mi trebamo jedan od njih na kojem se postiže jednakost. Pretpostavka suprotnog bi bila $\rho(v) < \alpha$ za sve takve v, odnosno $\rho(v)^+ \leq \alpha$ — dakle, α je jedna gornja međa promatranog skupa ordinala. No tada je $\rho(w) \leq \alpha$ kao najmanja gornja međa tog skupa, što je kontradikcija.

$\beta = \gamma^+$: Neka je $\rho(w) = \alpha + \gamma^+ = (\alpha + \gamma)^+$. Po upravo dokazanom postoji u takav da je $w\ R\ u$ i $\rho(u) = \alpha + \gamma$, a tada po pretpostavci indukcije postoji v takav da je $u\ R\ v$ i $\rho(v) = \alpha$. Po tranzitivnosti imamo $w\ R\ v$.

$\beta > 0$ granični: Neka je $\rho(w) = \alpha + \beta > \alpha$. Kada bi svi sljedbenici u od w imali dubinu strogo manju od α, α bi bila gornja međa za skup svih $\rho(u)^+$, što je u kontradikciji s činjenicom da je supremum tog skupa strogo veći od α. Dakle postoji u takav da je $w\ R\ u$ i $\rho(u) \geq \alpha$. Ako vrijedi jednakost, u je traženi svijet. Inače po teoremu o oduzimanju postoji $\gamma > 0$ takav da je

$$\alpha + \gamma = \rho(u) < \rho(u)^+ \leq \sup_{wRu} \rho(u)^+ = \rho(w) = \alpha + \beta\ ,$$

odnosno $\gamma < \beta$. To znači da na u možemo primijeniti pretpostavku indukcije, pa postoji v takav da je $w\ R\ u\ R\ v$ i $\rho(v) = \alpha$. $\square$

Dakle, slika od ρ je zatvorena nadolje, odnosno tranzitivna, a kako je (kao i svaki skup ordinala) totalno uređena, ona mora biti ordinal, ne veće kardinalnosti nego što je W. Taj ordinal se onda zove *dubina GL strukture* odnosno okvira i označava s $\rho(\mathfrak{N})$.

Jednom kad imamo taj pojam, dubinom svjetova na kojima formula ne vrijedi možemo mjeriti odstupanje formule od teorema sustava GL. Pri tome je dovoljno gledati konačne dubine, jer GL ima svojstvo konačnosti modela. Preciziranje toga vodilo je na pojam *traga* formule, što je skup mogućih dubina svih svjetova na kojima ta formula ne vrijedi. Ipak, to semantičko svojstvo je jednostavnije dokazati kao karakterizaciju, a trag definirati sintaktički.

U dokazivanju teorema o normalnim formama za GL slijedimo [**1**]. Proći ćemo kroz čitav dokaz, iako nije nov, da bismo lakše generalizirali na IL, uočili mjesta koja su svojstvena GL i ne mogu se generalizirati, a i zato da lakše dobijemo jedan rezultat o složenosti, odnosno duljini, normalnih formi (teorem 27).

DEFINICIJA 17. *Zatvorenim* formulama zovemo formule bez propozicionalnih varijabli.

Trag je preslikavanje, označeno s tr, koje zatvorenim GL formulama pridružuje podskupove od $\mathbb{N}$, definirano induktivno:

- $\operatorname{tr}(\bot) := \mathbb{N}$
- $\operatorname{tr}(\varphi \to \psi) := \operatorname{tr}(\psi) \setminus \operatorname{tr}(\varphi)$
- $\operatorname{tr}(\Box\varphi) := \big\{n \in \mathbb{N} : \big(\exists i \in \operatorname{tr}(\varphi)\big)(i < n)\big\}$

Lako se može vidjeti da je posljednja točka u definiciji ekvivalentna s

$$\operatorname{tr}(\Box\varphi) = \begin{cases} \emptyset, & \operatorname{tr}(\varphi) = \emptyset \\ \{n \in \mathbb{N} : n > \min \operatorname{tr}(\varphi)\}, & \operatorname{tr}(\varphi) \neq \emptyset \end{cases} \tag{tr $\Box$}$$

Direktno iz definicije računamo:

- $\operatorname{tr}(\neg\varphi) = \operatorname{tr}(\varphi \to \bot) = \operatorname{tr}(\bot) \setminus \operatorname{tr}(\varphi) = \mathbb{N} \setminus \operatorname{tr}(\varphi) = \operatorname{tr}(\varphi)^{\mathsf{c}}$
- $\operatorname{tr}(\varphi \lor \psi) = \operatorname{tr}(\neg\varphi \to \psi) = \operatorname{tr}(\psi) \setminus \operatorname{tr}(\varphi)^{\mathsf{c}} = \operatorname{tr}(\varphi) \cap \operatorname{tr}(\psi)$
- $\operatorname{tr}(\varphi \land \psi) = \operatorname{tr}(\varphi \to \neg\psi)^{\mathsf{c}} = \big(\operatorname{tr}(\psi)^{\mathsf{c}} \setminus \operatorname{tr}(\varphi)\big)^{\mathsf{c}} = \operatorname{tr}(\varphi) \cup \operatorname{tr}(\psi)$
- $\operatorname{tr}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \operatorname{tr}(\varphi \to \psi) \cup \operatorname{tr}(\psi \to \varphi) = \operatorname{tr}(\varphi) \triangle \operatorname{tr}(\psi)$, gdje je simbolom $\triangle$ označena simetrična razlika skupova

Sada možemo dokazati svojstvo traga koje nam je poslužilo kao motivacija.

LEMA 18. *Neka je $\mathfrak{N} = (W, R)$ konačni GL okvir, $w \in W$ svijet, te φ zatvorena GL formula. Tada vrijedi $\mathfrak{N}, w \nVdash \varphi$ ako i samo ako je $\rho(w) \in \operatorname{tr}(\varphi)$.*

DOKAZ. Indukcijom po φ.

$\varphi = \bot$: Po definiciji $w \nVdash \bot$, a kako je okvir konačan, $\rho(w) \in \mathbb{N} = \operatorname{tr}(\bot)$.

$\varphi = (\psi \to \xi)$: Imamo: $w \nVdash \psi \to \xi$ ako i samo ako $w \Vdash \psi$ i $w \nVdash \xi$, što je po pretpostavci indukcije ako i samo ako $\rho(w) \notin \operatorname{tr}(\psi)$ i $\rho(w) \in \operatorname{tr}(\xi)$, što upravo znači $\rho(w) \in \operatorname{tr}(\xi) \setminus \rho(\psi) = \operatorname{tr}(\psi \to \xi)$.

$\varphi = \Box\psi$: Ako $w \nVdash \Box\psi$, to znači da postoji svijet v takav da je $w \; R \; v$ i $v \nVdash \psi$. Po pretpostavci indukcije imamo $\rho(v) \in \operatorname{tr}(\psi)$, a također je $\rho(v) < \rho(v)^+ \leq \sup_{wRv} \rho(v)^+ = \rho(w)$, što po definiciji znači $\rho(w) \in \operatorname{tr}(\Box\psi)$.

U drugom smjeru, ako je $\rho(w) \in \operatorname{tr}(\Box\psi)$, tada postoji $i \in \operatorname{tr}(\psi)$ manji od $\rho(w)$, pa po lemi 16 postoji v takav da je $w \; R \; v$ i $\rho(v) = i \in \operatorname{tr}(\psi)$. Pretpostavka indukcije nam sad daje $v \nVdash \psi$, što zajedno s $w \; R \; v$ daje $w \nVdash \Box\psi$. $\Box$

TEOREM 19 (Teorem o tragu). *Među zatvorenim GL formulama, teoremi od GL su upravo formule s praznim tragom.*

DOKAZ. Jedan smjer je upravo svojstvo konačnosti modela iz teorema 14: ako $\nvdash_{\mathrm{GL}} \varphi$, tada postoji konačna GL struktura $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$ i svijet $w \in W$ takvi da je $\mathfrak{N}, w \nVdash \varphi$. Po lemi 18 je tada $\rho(w) \in \mathrm{tr}(\varphi)$, pa je $\mathrm{tr}(\varphi) \neq \emptyset$.

Za drugi smjer, neka je $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ proizvoljni izvod u GL. Dokazat ćemo da sve formule φ_k (pa onda i posljednja) imaju prazan trag, indukcijom po i. Imamo nekoliko slučajeva, ovisno o tome na koji je način φ_k došla u izvod. Primijetimo na početku da je $\mathrm{tr}(\varphi \to \psi) = \mathrm{tr}(\psi) \setminus \mathrm{tr}(\varphi) = \emptyset$ ako i samo ako je $\mathrm{tr}(\psi) \subseteq \mathrm{tr}(\varphi)$.

PT: Neka je $\varphi_k = F(\psi_1, \ldots, \psi_m)$, gdje je F tautologija logike sudova u kojoj se pojavljuju samo propozicionalne varijable $P_1, \ldots, P_m$. Ako definiramo niz parcijalnih interpretacija sa:
$$\text{za svaki } j \in \mathbb{N}, \quad I_j(P_i) := 1 - \chi_{\mathrm{tr}(\psi_i)}(j) = \begin{cases} 1, & j \notin \mathrm{tr}(\psi_i) \\ 0, & j \in \mathrm{tr}(\psi_i) \end{cases},$$
lako je vidjeti (indukcijom po izgradnji F, koristeći svojstva navedena odmah nakon definicije traga) da je također $I_j\big(F\big) = 1 - \chi_{\mathrm{tr}(\varphi_k)}(j)$. No svi su ti brojevi jednaki 1 jer je F tautologija, pa je $\chi_{\mathrm{tr}(\varphi_k)}$ nulfunkcija, odnosno $\mathrm{tr}(\varphi_k) = \emptyset$.

K: Ako je $\varphi_k = \Box(\psi \to \xi) \to (\Box\psi \to \Box\xi)$, tada je
$$\mathrm{tr}(\varphi_k) = \big(\,\mathrm{tr}(\Box\xi) \setminus \mathrm{tr}(\Box\psi)\big) \setminus \mathrm{tr}\,\big(\Box(\psi \to \xi)\big)\ ,$$
pa zapravo treba dokazati da je $\mathrm{tr}(\Box\xi) \subseteq \mathrm{tr}(\Box\psi) \cup \mathrm{tr}\,\big(\Box(\psi \to \xi)\big)$. Neka je $n \in \mathrm{tr}(\Box\xi)$ proizvoljan. To znači da postoji $i \in \mathrm{tr}(\xi)$ takav da je $i < n$. Ako je $i \in \mathrm{tr}(\psi)$, tada je $n \in \mathrm{tr}(\Box\psi)$ po definiciji. Ako pak $i \notin \mathrm{tr}(\psi)$, tada je $i \in \mathrm{tr}(\xi) \setminus \mathrm{tr}(\psi) = \mathrm{tr}(\psi \to \xi)$, pa je $n \in \mathrm{tr}\,\big(\Box(\psi \to \xi)\big)$.

4: Trebamo dokazati $\mathrm{tr}(\Box\psi \to \Box\Box\psi) = \emptyset$, odnosno $\mathrm{tr}(\Box\Box\psi) \subseteq \mathrm{tr}(\Box\psi)$. Neka je $n \in \Box\Box\psi$ proizvoljan. Tada postoji $j \in \mathrm{tr}(\Box\psi)$ takav da je $j < n$. Sada $j \in \mathrm{tr}(\Box\psi)$ povlači da postoji $i \in \mathrm{tr}(\psi)$ takav da je $i < j$. Po tranzitivnosti je $i < n$, pa je također $n \in \mathrm{tr}(\Box\psi)$.

Löb: Trebamo dokazati $\mathrm{tr}(\Box\psi) \subseteq \mathrm{tr}\,\big(\Box(\Box\psi \to \psi)\big)$: neka je $n \in \mathrm{tr}(\Box\psi)$ proizvoljan. To znači da postoji $i \in \mathrm{tr}(\psi)$ takav da je $i < n$. To specijalno znači da ψ nema prazan trag, pa ako označimo $j := \min \mathrm{tr}(\psi)$, svakako je $j \leq i < n$. Minimalnost znači da ne postoji $k < j$ u $\mathrm{tr}(\psi)$, što točno znači $j \notin \mathrm{tr}(\Box\psi)$. To zajedno s $j \in \mathrm{tr}(\psi)$ daje $j \in \mathrm{tr}(\Box\psi \to \psi)$, a iz toga imamo $n \in \mathrm{tr}\,\big(\Box(\Box\psi \to \psi)\big)$.

MP: Ovo znači da postoje $i, j < k$ takvi da je $\varphi_j = (\varphi_i \to \varphi_k)$. Po pretpostavci indukcije $\varphi_i \to \varphi_k$ ima prazan trag, pa je $\mathrm{tr}(\varphi_k) \subseteq \mathrm{tr}(\varphi_i) = \emptyset$, opet po pretpostavci indukcije. Dakle $\mathrm{tr}(\varphi_k) = \emptyset$.

Gen: Ovo je trivijalno: ako je (po pretpostavci indukcije) $\mathrm{tr}(\psi) = \emptyset$, tada je i $\mathrm{tr}(\Box\psi) = \emptyset$ po definiciji. $\Box$

KOROLAR 20. *Dvije zatvorene GL formule su dokazivo ekvivalentne u GL ako i samo ako imaju isti trag.*

DOKAZ. Po teoremu o tragu imamo $\vdash_{\mathrm{GL}} \varphi \leftrightarrow \psi$ ako i samo ako je $\emptyset = \mathrm{tr}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \mathrm{tr}(\varphi) \triangle \mathrm{tr}(\psi)$, što vrijedi ako i samo ako je $\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(\psi)$. $\Box$

3. Normalne forme za GL

Svakako, GL formula ima prebrojivo mnogo, a podskupova od $\mathbb{N}$ neprebrojivo, pa je jasno da tr ne može biti surjekcija. Prirodno se postavlja pitanje koja je slika funkcije tr, odnosno koji je najmanji podskup od $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ koji sadrži $\mathbb{N}$, i zatvoren je na skupovnu razliku i operaciju opisanu u definiciji $\mathrm{tr}(\Box\varphi)$? Gornju ogradu daje sljedeća lema, a odmah nakon toga dokazat ćemo da se ta gornja ograda i postiže.

LEMA 21. *Svaka vrijednost koju funkcija* tr *može poprimiti je ili konačan ili kofinitan (komplement konačnog) podskup od* $\mathbb{N}$.

DOKAZ. Indukcijom po formuli čiji trag računamo.

$\varphi = \bot$: $\mathrm{tr}(\bot) = \mathbb{N} = \emptyset^{\mathsf{c}}$, što je kofinitan skup.

$\varphi = (\psi \to \xi)$: Pretpostavka je da su $\mathrm{tr}(\psi)$ i $\mathrm{tr}(\xi)$ konačni ili kofinitni (ukupno 4 mogućnosti). Tada je $\mathrm{tr}(\psi \to \xi) = \mathrm{tr}(\xi) \setminus \mathrm{tr}(\psi) = \mathrm{tr}(\xi) \cap \mathrm{tr}(\psi)^{\mathsf{c}}$, što je konačno ako je $\mathrm{tr}(\xi)$ ili $\mathrm{tr}(\psi)^{\mathsf{c}}$ konačan. U preostalom slučaju je $\mathrm{tr}(\psi)$ konačan a $\mathrm{tr}(\xi)$ kofinitan, pa je $\mathrm{tr}(\psi \to \xi)^{\mathsf{c}} = \big(\mathrm{tr}(\xi) \setminus \mathrm{tr}(\psi)\big)^{\mathsf{c}} = \mathrm{tr}(\xi)^{\mathsf{c}} \cup \mathrm{tr}(\psi)$, što je konačno kao unija dva konačna skupa.

$\varphi = \Box\psi$: Ako je $\mathrm{tr}(\psi) = \emptyset$, jasno je da je i $\mathrm{tr}(\Box\psi) = \emptyset$, što je konačno. U suprotnom, uzmimo neki element $i \in \mathrm{tr}(\psi)$. Iz definicije je očito da se tada svi brojevi veći od i nalaze u $\mathrm{tr}(\Box\psi)$, pa je taj skup kofinitan. $\Box$

Ako dakle dokažemo da se svaki jednočlan skup postiže kao trag, pomoću disjunkcije možemo postići svaki konačan skup kao uniju jednočlanih, a onda pomoću negacije svaki kofinitan kao komplement konačnog. To je upravo cilj sljedeće leme. Oznakom $\Box^n\bot$ označavamo $\Box\Box\cdots\Box\bot$ (s n znakova $\Box$).

LEMA 22. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot) = \{n\}$.*

DOKAZ. Prvo dokažimo indukcijom po n da je $\mathrm{tr}(\Box^n\bot) = \{m : m \geq n\}$. Za $n = 0$ imamo $\mathrm{tr}(\Box^0\bot) = \mathrm{tr}(\bot) = \mathbb{N} = \{m : m \geq 0\}$ po definiciji. Pretpostavimo da je $\mathrm{tr}(\Box^k\bot) = \{m : m \geq k\}$. Tada je

$$\mathrm{tr}(\Box^{k+1}\bot) = \big\{m : \big(\exists i \in \mathrm{tr}(\Box^k\bot)\big)(i < m)\big\} = [\text{pretpostavka}]$$

$$= \{m : \exists i(m > i \geq k)\} = \{m : m > k\} = \{m : m \geq k+1\}\,.$$

Sada je $\mathrm{tr}(\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot) = \{m : m \geq n\} \setminus \{m : m \geq n+1\} = \{n\}$. □

TEOREM 23 (Teorem o normalnoj formi za GL). *Svaka zatvorena GL formula je dokazivo ekvivalentna konjunkciji GL formula oblika $\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot$, ili negaciji takve konjunkcije.*

DOKAZ. Neka je φ proizvoljna zatvorena GL formula. Po lemi 21, njen trag je konačan ili kofinitan podskup od $\mathbb{N}$.

- Ako je $\mathrm{tr}(\varphi)$ konačan, promotrimo formulu
$$\varphi' := \bigwedge_{n\in\mathrm{tr}(\varphi)} (\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot)\,,$$
čiji trag je prema lemi 22 jednak $\mathrm{tr}(\varphi') = \bigcup_{n\in\mathrm{tr}(\varphi)}\{n\} = \mathrm{tr}(\varphi)$, te je po korolaru 20 $\vdash_{\mathrm{GL}} \varphi \leftrightarrow \varphi'$.
- Ako je pak $\mathrm{tr}(\varphi)$ kofinitan, tada je $\mathrm{tr}(\neg\varphi) = \mathrm{tr}(\varphi)^{\mathsf{c}}$ konačan skup, pa prema prethodnom slučaju $\neg\varphi$ ima normalnu formu ψ'. No tada vrijedi $\vdash_{\mathrm{GL}} \neg\varphi \leftrightarrow \psi'$, pa je i $\vdash_{\mathrm{GL}} \varphi \leftrightarrow \neg\psi'$ (jer je $(\neg\varphi \leftrightarrow \psi') \to (\varphi \leftrightarrow \neg\psi')$ propozicionalna tautologija). □

4. Kratke normalne forme

U proučavanju logičkih normalnih formi poznat je fenomen „kombinatorne eksplozije”, odnosno nalaženje normalne forme može biti vrlo teško, pa i sama njena duljina može biti bitno veća nego kod formule od koje smo krenuli. U logici sudova primjerice imamo formulu $P_n \leftrightarrow \big(P_{n-1} \leftrightarrow (\ldots(P_1 \leftrightarrow P_0)\ldots)\big)$ duljine manje od $4n$, čija disjunktivna normalna forma ima 2^n elementarnih konjunkcija (dok konjunktivna ima 2^n elementarnih disjunkcija). Dakle, ne samo da je normalna forma dulja od polazne formule, već za formule jednakog oblika raste eksponencijalno s linearnim rastom duljine polazne formule.

Pokazat ćemo jedno pomalo paradoksalno svojstvo vezano uz duljinu normalnih formi za GL, no prvo trebamo malo drugačije pogledati normalne forme. U teoremu o normalnoj formi spominju se negacija i konjunkcija, koje ne postoje u osnovnom GL jeziku, već su pokrate. Ako proučavamo duljinu formule, moramo se držati osnovnog jezika. Mogli bismo raspisati $\bigwedge$ i $\neg$ pomoću $\rightarrow$ i $\bot$, ali također možemo zanemariti sve osim najvažnijeg svojstva normalnih formi za GL, činjenice da su to booleovske kombinacije formula oblika $\Box^n\bot$. Uz supstituciju P_n za $\Box^n\bot$, to su zapravo formule logike sudova, i manipulacije kojima utvrđujemo jednakost (ekvivalenciju) su predmet logike sudova, kojom se ovdje ne bavimo. To je i više u skladu s pristupom aksiomatici GL, gdje smo uvođenjem oznake (PT) deklarirali da nas ne zanimaju dijelovi GL izvodâ koji se mogu replicirati u logici sudova, već ćemo ih smatrati elementarnima i provedivima u jednom koraku.

Dakle, u ovoj točki, normalna forma za GL formulu je njoj ekvivalentna formula koja je booleovska kombinacija (preciznije, $\rightarrow$-kombinacija, jer imamo samo osnovni jezik) formulâ oblika $\Box^n\bot$, za $n \in \mathbb{N}$.

Trebat će nam još i pojam *modalne dubine* formule. To je jednostavno maksimalni broj ugniježđenih modalnih operatora u formuli, i definira se induktivno. Za GL definicija glasi

- $\delta(\bot) := 0$
- $\delta(\varphi \rightarrow \psi) := \max\{\delta(\varphi), \delta(\psi)\}$
- $\delta(\Box\varphi) := 1 + \delta(\varphi)$

Oznakom $|\varphi|$ označavamo duljinu formule φ. Primijetimo da za sve GL formule φ vrijedi $\delta(\varphi) < |\varphi|$, što se lako dokaže indukcijom — ili jednostavno primijetimo da $\delta(\varphi)$ sigurno nije veće od broja svih pojavljivanja simbola '$\Box$' u φ, što mora biti strogo manje od $|\varphi|$ jer se formula ne može sastojati samo od simbola '$\Box$'.

Preciznije, $\delta(\varphi) \leq |\varphi| - 1$, a jednakost vrijedi samo za formule u kojima su svi simboli osim jednog jednaki $\Box$. Lako se vidi da svaka zatvorena GL formula mora imati bar jedan simbol $\bot$, te vidimo da $\delta(\varphi) = |\varphi| - 1$ vrijedi samo za formule oblika $\Box^n\bot$.

Primijetimo da zbog leme 21 karakteristična funkcija $\chi_{\mathrm{tr}(\varphi)}$ od nekog broja mora biti konstanta. Najmanji takav prirodni broj označimo s $k(\varphi)$. Za njega vrijede sljedeće ograde.

Lema 24. *Ako formula φ nije GL teorem, tada je*

$$\min \mathrm{tr}(\varphi) \leq k(\varphi)\,.$$

DOKAZ. Ako je $m := \min \operatorname{tr}(\varphi) = 0$, nemamo što dokazivati. Ako je pak $m > 0$, po definiciji je $\chi_{\operatorname{tr}(\varphi)}(m) = 1 \neq 0 = \chi_{\operatorname{tr}(\varphi)}(m-1)$, pa niti jedan broj manji od m nema svojstvo da je od njega nadalje $\chi_{\operatorname{tr}(\varphi)}$ konstanta, dakle $k(\varphi) \geq m$. $\square$

LEMA 25. *Za sve GL formule φ je $k(\varphi) \leq \delta(\varphi)$.*

DOKAZ. Indukcijom po izgradnji formule φ.

$\varphi = \bot$ Očito je $k(\bot) = \delta(\bot) = 0$.

$\varphi = (\psi \to \xi)$ Tada je $\chi_{\operatorname{tr}(\varphi)} = \chi_{\operatorname{tr}(\xi)\setminus\operatorname{tr}(\psi)} = \chi_{\operatorname{tr}(\xi)} \cdot (1 - \chi_{\operatorname{tr}(\psi)})$, pa ako su $\chi_{\operatorname{tr}(\xi)} = a$ i $\chi_{\operatorname{tr}(\psi)} = b$ konstante, tada to mora biti i $\chi_{\operatorname{tr}(\xi)} = a \cdot (1 - b)$. To znači da je $k(\varphi) \leq \max\{k(\psi), k(\xi)\}$, što je po pretpostavci indukcije manje ili jednako $\max\{\delta(\psi), \delta(\xi)\} = \delta(\varphi)$.

$\varphi = \Box\psi, \vdash_{\mathrm{GL}} \psi$ Tada je i $\vdash_{\mathrm{GL}} \Box\psi$ po pravilu (Gen), te je po teoremu o tragu $\operatorname{tr}(\Box\psi) = \emptyset$, odnosno $k(\Box\psi) = 0 \leq \delta(\Box\psi)$.

$\varphi = \Box\psi, \nvdash_{\mathrm{GL}} \psi$ Redom prema (tr $\Box$), lemi 24, pretpostavci indukcije i definiciji δ imamo $k(\Box\psi) = 1 + \min \operatorname{tr}(\psi) \leq 1 + k(\psi) \leq 1 + \delta(\psi) = \delta(\varphi)$. $\square$

Sada možemo definirati preslikavanje koje svakoj formuli pridružuje kratku normalnu formu: booleovsku kombinaciju formulâ oblika $\Box^n\bot$, ekvivalentnu početnoj formuli, i kraću od nje (osim u slučaju da je već početna formula u normalnoj formi).

DEFINICIJA 26. *Kratka normalna forma* je preslikavanje *NF* na GL formulama, definirano induktivno:

- $NF(\bot) := \bot$
- $NF(\varphi \to \psi) := \big(NF(\varphi) \to NF(\psi)\big)$
- $NF(\Box\varphi) := \begin{cases} (\bot \to \bot), & \vdash_{\mathrm{GL}} \varphi \\ \Box^{1+\min \operatorname{tr}(\varphi)}\bot, & \nvdash_{\mathrm{GL}} \varphi \end{cases}$

TEOREM 27. *Preslikavanje NF ima sljedeća svojstva: za sve GL formule φ,*

- *$NF(\varphi)$ je $\to$-kombinacija formula oblika $\Box^n\bot$ za $n \in \mathbb{N}$*
- $\vdash_{\mathrm{GL}} \varphi \leftrightarrow NF(\varphi)$
- $|NF(\varphi)| \leq |\varphi|$
- *$|NF(\varphi)| = |\varphi|$ samo ako je $\varphi = NF(\varphi)$.*

DOKAZ. Svi dokazi se provode indukcijom. Prvo svojstvo je očito: samo treba vidjeti da se nigdje u definiciji *NF* ne može pojaviti oblik $\Box(\psi \to \xi)$. Drugo svojstvo se lako dobije iz korolara 20, dokazivanjem $\operatorname{tr}\big(NF(\varphi)\big) = \operatorname{tr}(\varphi)$. Dokažimo treće i četvrto svojstvo zajedno.

$\varphi = \bot$ Očito je $NF(\bot) = \bot$, pa je i $|NF(\bot)| = |\bot| = 1$.

$\varphi = (\psi \to \xi)$ Po pretpostavci indukcije je $|NF(\psi)| \leq |\psi|$, jednakost vrijedi samo ako je $\psi = NF(\psi)$, i isto svojstvo za ξ. Tada je $|NF(\varphi)| = \big|\big(NF(\psi) \to NF(\xi)\big)\big| = 3 + |NF(\psi)| + |NF(\xi)| \leq 3 + |\psi| + |\xi| = |(\psi \to \xi)| = |\varphi|$, i jednakost vrijedi samo ako su ψ i ξ fiksne točke za NF, no tada je i $NF(\varphi) = (\psi \to \xi) = \varphi$.

$\varphi = \Box\psi$, $\vdash_{\mathrm{GL}} \psi$ Primijetimo da su jedine GL formule duljine do 4, računajući vanjske zagrade, $\bot$, $\Box\bot$, $\Box\Box\bot$ i $\Box\Box\Box\bot$, a nijedna od njih nije GL teorem jer nema prazan trag. Kako ψ jest teorem, po kontrapoziciji imamo $|\psi| \geq 5$, pa je $|\varphi| = |\Box\psi| = 1 + |\psi| \geq 6 > 5 = |(\bot \to \bot)| = |NF(\varphi)|$, i jednakost nikada ne vrijedi.

$\varphi = \Box\psi$, $\nvdash_{\mathrm{GL}} \psi$ Koristeći prethodne leme, imamo

$$|NF(\varphi)| = \big|\Box^{1+\min \mathrm{tr}(\psi)}\bot\big| = \big(1 + \min \mathrm{tr}(\psi)\big) + 1 = 2 + \min \mathrm{tr}(\psi) \leq$$

$$\leq 2 + k(\psi) \leq 2 + \delta(\psi) \overset{(*)}{\leq} 2 + \big(|\psi| - 1\big) = 1 + |\psi| = |\Box\psi| = |\varphi| \, ,$$

i jednakost vrijedi samo kada vrijedi jednakost na mjestu $(*)$, a vidjeli smo da je to samo za $\psi = \Box^n\bot$. No tada je $\varphi = \Box^{n+1}\bot$, pa je $\min \mathrm{tr}(\varphi) = n$, te je $NF(\varphi) = \varphi$. $\Box$

5. Nepostojanje normalnih formi u slučaju $Prop \neq \emptyset$

Glavni razlog zašto pristup preko traga daje normalne forme za zatvoreni fragment od GL, pored svojstva konačnosti modela, je što dubina svijeta karakterizira modalnu ekvivalenciju — na dva svijeta konačne dubine vrijede iste GL formule, ako i samo ako su oni iste dubine. To nije teško dokazati: jedan smjer proizlazi iz postojanja formula koje kazuju da je svijet na kojem vrijede, zadane dubine:

$$\chi_n := (\Box^{n+1}\bot \to \Box^n\bot) \to \bot \, , \quad \text{što je ekvivalentno s} \quad \Diamond^n\top \wedge \Box^{n+1}\bot \, ,$$

dok je drugi smjer posljedica leme 18: prema njoj, vrijedi li φ na svijetu w ovisi samo o tome je li $\rho(w) \in \mathrm{tr}(\varphi)$, dakle ni o kakvim drugim svojstvima svijeta w osim njegove dubine.

Dobar način za pokazivanje koliko je bitna karakterizacija modalne ekvivalencije dubinom svijeta, je dokaz da normalne forme, u obliku booleovske kombinacije jednoparametarske familije formula (ili konačno mnogo njih), ne postoje već u slučaju kad je skup $Prop$ jednočlan, kako je pokazao Solovay. Mi slijedimo Boolosov pristup [**5**], samo prilagođen jeziku u kojem su osnovni simboli $\bot$, $\to$ i $\Box$.

Do kraja ove točke, neka je $Prop := \{p\}$. Atomarne formule su dakle $\bot$ i p, a svaka njihova booleovska kombinacija (označimo skup svih njih s H_0) je ekvivalentna jednoj od formula $\bot$, $\top$, p ili $\neg p$. Ako sada s H_1 označimo skup svih formula ekvivalentnih booleovskim kombinacijama formula $\Box^n\varphi$, gdje je $n \in \mathbb{N}$ i $\varphi \in H_0$, Solovayev teorem kaže da H_1 nije skup svih GL formula — dok, u slučaju zatvorenog fragmenta, H_0 bi bile sve formule ekvivalentne $\bot$ ili $\top$, te bi H_1 bio skup formula ekvivalentnih booleovskim kombinacijama formula oblika $\Box^n\bot$ i $\Box^n\top(\Leftrightarrow \top)$, a po teoremu o normalnim formama, to bi bio skup svih GL formula. Štoviše, ako napravimo još jedan korak, i definiramo H_2 iz H_1 jednako kao što smo definirali H_1 iz H_0, niti H_2 neće sadržavati sve GL formule. Precizno, neka je

$$H_0 := \text{skup GL formula koje su ekvivalentne } \top,\ \bot,\ p \text{ ili } \neg p$$

$$H_{n+1} := \text{skup GL formula koje su ekvivalentne nekoj booleovskoj kombinaciji formula oblika } \Box^r\varphi, \text{ gdje je } r \in \mathbb{N} \text{ i } \varphi \in H_n$$

Tada, budući da dopuštamo i mogućnost $r = 0$, lako vidimo da je $H_n \subseteq H_{n+1}$ za sve prirodne brojeve n. Solovay je pokazao da su sve te inkluzije prave. (To znači da nijedan H_n nije skup svih GL formula s propozicionalnom varijablom p). Konkretno, definiramo formule

$$A_0 := \bot \qquad \text{i} \qquad A_{n+1} := \Box(p \to A_n)\ .$$

Očito, indukcijom možemo dobiti $A_n \in H_n$ za sve $\mathbb{N}$. Pokazat ćemo da $A_{n+1} \notin H_n$ ni za koji n. U tu svrhu promotrimo GL strukturu $\mathfrak{N} := (W, R, \Vdash)$, gdje je:

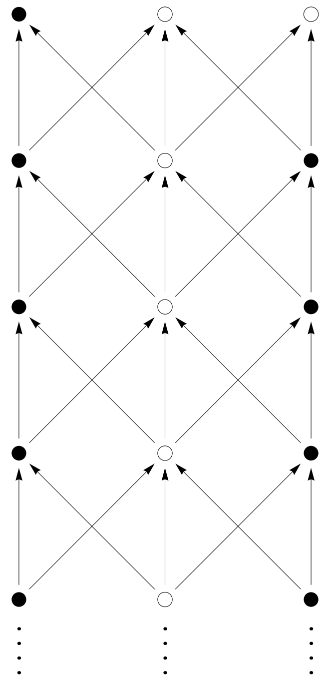
$$W := \{-1, 0, 1\} \times \mathbb{N}$$
$$R := \big\{\big((a, b), (c, d)\big) \,:\, b > d\big\} \setminus \big\{\big((\pm1, n+1), (\mp1, n)\big) \,:\, n \in \mathbb{N}\big\}$$
$$\Vdash := \big(\{-1, 1\} \times \mathbb{N} \setminus \{(1, 0)\}\big) \times \{p\}$$

Dakle, skup svjetova se sastoji od tri „stupca", lijevog, srednjeg i desnog. Možemo zamišljati da se stupci protežu prema dolje, dok R-strelice pokazuju prema gore (prema manjim indeksima). Preciznije, $u\ R\ v$ znači da je u ispod v, osim što svjetovi u lijevom stupcu nisu povezani sa svjetovima neposredno iznad, odnosno ispod, u desnom stupcu. Za varijablu p je propisano da ne vrijedi u srednjem i na početku desnog stupca, na svim ostalim svjetovima vrijedi.

Propozicija 28. *Gore definirani $\mathfrak{N}$ je doista GL struktura.*

Dokaz. Jedino treba provjeriti da je R^{-1} dobro utemeljena, te da je R tranzitivna. Prvo je direktna posljedica činjenice da u R-rastućem lancu druga koordinata strogo pada, a skup $\mathbb{N}$ je dobro uređen. Drugo se lako vidi na sljedeći način: $(a, b)\ R\ (c, d)\ R\ (e, f)$ povlači $b > d > f$, iz čega vidimo $b > f$, te b i f sigurno nisu susjedni, dakle $(a, b)\ R\ (e, f)$. $\Box$

Lema 29. *Za sve formule $\varphi \in H_n$ i sve $m > n$ vrijedi $(-1, m) \Vdash \varphi$ ako i samo ako $(1, m) \Vdash \varphi$.*



Slika 2.1. Grafički prikaz GL strukture $\mathfrak{N}$. Puni kružići predstavljaju svjetove na kojima vrijedi p, prazni kružići ostale svjetove.

Dokaz. Indukcijom po n. Za $\varphi \in H_0$ imamo četiri slučaja, dva od kojih ($\varphi \Leftrightarrow \top$ i $\varphi \Leftrightarrow \bot$) su očita, dok su preostala dva ($\varphi \Leftrightarrow p$ i $\varphi \Leftrightarrow \neg p$) posljedica toga da p vrijedi na $(-1, m)$ i na $(1, m)$ za sve $m > n = 0$.

Pretpostavimo da se za svaki $m > k$, svjetovi $(\pm 1, m)$ slažu na svim formulama iz H_k. Neka je sada $m > k + 1$ i $\varphi \in H_{k+1}$. Promotrimo prvo nekoliko jednostavnih slučajeva.

Ako je $\varphi \in H_k \subseteq H_{k+1}$, budući da je $m > k+1 > k$, po pretpostavci indukcije imamo da se $(\pm 1, m)$ slažu na φ.

Ako je $\varphi = \Box^r \psi$, gdje je $r \geq 2$, te $\psi \in H_k$, tvrdnja slijedi iz činjenice da $(-1, m)$ i $(1, m)$ imaju isti skup R^r-sljedbenika: naime, $\{-1, 0, 1\} \times \{0, 1, \ldots, m - r\}$, što se lako provjeri indukcijom po r.

Ako je $\varphi = \Box \psi$, gdje je $\psi \in H_k$, tada skupovi R-sljedbenika od $(-1, m)$ i $(1, m)$ nisu isti: zbog pravila o nepovezanosti svjetova na susjednim razinama u suprotnim stupcima, u prvom nedostaje svijet $(1, m - 1)$, a u drugom $(-1, m - 1)$. No to su jedini izuzeci: svi ostali svjetovi su sljedbenici od $(-1, m)$ ako i samo ako su sljedbenici od $(1, m)$, a ta dva izuzetka se ionako slažu na ψ po pretpostavci indukcije. Naime, $\psi \in H_k$, a $m > k + 1$ povlači $m - 1 > k$. Dakle, ako na primjer vrijedi $(-1, m) \Vdash \Box\psi$, te je w proizvoljan R-sljedbenik od $(1, m)$, tada je ili w ujedno i sljedbenik od $(-1, m)$, pa na njemu vrijedi ψ, ili je $w = (1, m-1)$, na kojem također vrijedi ψ po pretpostavci indukcije — iz toga zaključujemo $(1, m) \Vdash \Box\psi$.

Ako je (u općem slučaju) formula φ ekvivalentna booleovskoj kombinaciji formula koje su jednog od gornja tri oblika, preciznije $\varphi \Leftrightarrow F(\Box^{r_1}\psi_1, \Box^{r_2}\psi_2, \ldots, \Box^{r_s}\psi_s)$, gdje je $F(P_1, P_2, \ldots, P_s)$ formula logike sudova s točno s propozicionalnih varijabli, tada prema prethodno dokazanom imamo da se $(-1, m)$ i $(1, m)$ slažu na svim formulama $\Box^{r_i}\psi_i$. No tada se moraju slagati i na $F(\Box^{r_1}\psi_1, \Box^{r_2}\psi_2, \ldots, \Box^{r_s}\psi_s)$ čija istinitost na $(\pm 1, m)$ je booleovska funkcija istinitosti pojedinih $\Box^{r_i}\psi_i$ na tim svjetovima — a tada se slažu i na φ, koja je toj formuli ekvivalentna. $\Box$

Da bismo iskazali sljedeću lemu, uvedimo sljedeći pomoćni naziv: *p-svjetovima* zovimo one svjetove u $\mathfrak{N}$ na kojima vrijedi p (dakle, sve u lijevom stupcu, i sve osim najvišeg u desnom stupcu). Također, *p-sljedbenicima* danog svijeta zovemo one njegove sljedbenike koji su p-svjetovi. Primijetimo da tada $w \Vdash A_{n+1}$ možemo interpretirati kao: A_n vrijedi na svim p-sljedbenicima od w.

Lema 30. *Za sve n, formula A_n vrijedi na $(-1, m)$ i na $(1, m+1)$ za sve $m < n$. Na ostalim p-svjetovima A_n ne vrijedi.*

Dokaz. Indukcijom po n. Baza: $A_0 = \bot$ očito ne vrijedi ni na kojem p-svijetu. Pretpostavimo da A_k vrijedi na $(-1, m)$ i $(1, m+1)$ za sve $m < k$, te ni na kojem od ostalih p-svjetova.

Prvo, A_{k+1} očito ne vrijedi na $(-1, m)$ za $m \geq k+1$, jer svaki takav svijet ima p-sljedbenika $(-1, m-1)$ na kojem po pretpostavci indukcije ne vrijedi A_k zbog $m-1 \geq k$. Na p-svjetovima u desnom stupcu $(1, m)$, gdje je $m > k+1$, A_{k+1} ne vrijedi po lemi 29: naime $A_{k+1} \in H_{k+1}$, a svijet $(1, m)$ se u svim formulama iz H_{k+1} slaže sa svijetom $(-1, m)$, na kojem smo upravo pokazali da ne vrijedi A_{k+1}.

Pogledajmo sada proizvoljni svijet $(-1, m)$ za $m < k+1$. Po definiciji relacije R, svi njegovi p-sljedbenici su $(-1, l)$ za $l < m$, te $(1, l)$ za $1 \leq l \leq m-2$ (ako takvih ima, odnosno ako je $m \geq 3$). U oba slučaja imamo $l < m \leq k$, dakle $l < k$, pa po pretpostavci indukcije na svima njima vrijedi A_k — što znači da vrijedi $(-1, m) \Vdash \varphi$.

Još je preostalo provjeriti svjetove $(1, m)$ za $1 \leq m \leq k+1$. Svi p-sljedbenici takvog svijeta su $(-1, l)$ za $l \leq m-2$, te $(1, l)$ za $1 \leq l < m$. Za ove prve vrijedi $l \leq (k+1) - 2 = k-1$, dakle $l < k$, a za ove druge $l \leq m-1 \leq (k+1)-1 = k$, pa na svim njima po pretpostavci indukcije vrijedi A_k. To naravno znači $(1, m) \Vdash A_{k+1}$ i dokaz je gotov. $\Box$

KOROLAR 31. *Niz* $H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \cdots$ *je strogo rastući. Odnosno, za svaki* n*, postoji GL formula s varijablom* p *koja nije u* H_n *(a jest u* H_{n+1}*): jedna takva je* A_{n+1}.

DOKAZ. Direktno iz prethodne dvije leme. Vidimo da A_{n+1} ne vrijedi na $(-1, n+1)$, ali vrijedi na $(1, n+1)$. Kad bi bilo $A_{n+1} \in H_n$, ta dva svijeta bi se morali slagati na toj formuli. $\square$

POGLAVLJE 3

Prema normalnim formama za IL

1. Veltmanovi modeli i adekvatnost

Kako bismo dobili neke rezultate o normalnim formama za IL, pokušajmo analogni pristup kao kod GL. Za početak, ulogu GL okvira i struktura preuzimaju Veltmanovi okviri i modeli (definirani u [**8**]), u kojima svaki svijet w nema samo skup sljedbenika $W[w]$ (kvantifikacijom po kojem interpretiramo operator $\Box$ gledano iz w), već binarnu relaciju na njemu, S_w (kvantifikacijom po kojoj interpretiramo operator $\rhd$ gledano iz w).

DEFINICIJA 32. *Veltmanov okvir* je uređena trojka $\mathfrak{N} := (W, R, S)$, gdje je (W, R) GL okvir, a $S = (S_w)_{w \in W}$ je familija binarnih relacija indeksiranih svjetovima, koje imaju sljedeća svojstva:

- za svaki w, S_w je refleksivna i tranzitivna relacija na skupu $W[w] := \{v : w \; R \; v\}$
- za sve svjetove w, v, u, $w \; R \; v \; R \; u$ povlači $v \; S_w \; u$ (odnosno, S_w proširuje restrikciju relacije R na $W[w]$).

Veltmanov model je uređena četvorka $(W, R, S, \Vdash)$, gdje je (W, R, S) Veltmanov okvir, a $\Vdash \subseteq W \times Prop$ relacija *forsiranja* između svjetova i propozicionalnih varijabli.

Napomenimo da relaciju R zapravo ne treba navoditi, jer se može definirati preko relacija S_w:

$$w \; R \; v \quad \text{ako i samo ako} \quad v \; S_w \; v \; .$$

Jedan smjer je posljedica refleksivnosti, a drugi činjenice da je S_w relacija na sljedbenicima od w. To efektivno znači da se operator $\Box$ može izraziti pomoću operatora $\rhd$, što smo već znali. No obično se R navodi i u Veltmanovim okvirima i modelima, radi preglednosti i jasnijeg shvaćanja Veltmanovih okvira kao generalizacije GL okvira.

Kao i kod GL struktura, u slučaju praznog skupa $Prop$ zadavanje okvira je ekvivalentno zadavanju modela. Također, relacija $\Vdash$ se može proširiti na proizvoljne IL formule, induktivno:

- $w \nVdash \bot$
- $w \Vdash F \to G$ ako i samo ako $w \nVdash F$ ili $w \Vdash G$
- $w \Vdash F \rhd G$ ako i samo ako za svaki $v \in W[w]$ na kojem vrijedi F, postoji $u \in W$ na kojem vrijedi G, takav da je $v\ S_w\ u$.

Vrijedi i analogon teorema 14, čiji dokaz se također može naći u [**7**]:

Teorem 33. *Neka je φ IL formula.*

(1) *Ako vrijedi $\vdash \varphi$, tada vrijedi i $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$, za sve Veltmanove modele $\mathfrak{M}$.*
(2) *Ako vrijedi $\nvdash \varphi$, tada postoji* konačan *Veltmanov model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ i svijet $w \in W$, takvi da $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$.*

Dokaz. Kao i u teoremu 14, proći ćemo kroz prvi dio dokaza, da uočimo zašto nam točno trebaju sva svojstva iz definicije Veltmanovog modela.

Zapravo, koraci koji odgovaraju korištenju aksioma koji su instance sheme (PT), te pravila izvoda (MP), jednaki su kao i u dokazu za GL. Isto se može reći za shemu (Löb) i pravilo (Gen), samo treba vidjeti da je semantika operatora $\Box$ shvaćenog kao pokrata u IL jednaka kao i u GL.

Ako vrijedi $w \Vdash \neg\varphi \rhd \bot$ u Veltmanovom modelu $\mathfrak{M} = (W, R, S, \Vdash)$, i $v \in W[w]$ je proizvoljan, mora vrijediti $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$ — inače bi vrijedilo $\mathfrak{M}, v \Vdash \neg\varphi$, pa bi morao postojati u takav da je $v\ S_w\ u$ i $\mathfrak{M}, u \Vdash \bot$, što je nemoguće. U suprotnom smjeru, ako na svim sljedbenicima od w vrijedi φ, tada nema sljedbenika na kojem vrijedi $\neg\varphi$, pa je trivijalno ispunjeno $w \Vdash \neg\varphi \rhd \bot$.

Još je preostalo pogledati što je s instancama shema (J1) do (J5).

J1: Pretpostavimo da vrijedi $w \Vdash \Box(\varphi \to \psi)$. To znači da na svim sljedbenicima od w vrijedi $\varphi \to \psi$. Ako je dakle u proizvoljan sljedbenik od w na kojem vrijedi φ, na njemu mora vrijediti i ψ, a zbog refleksivnosti vrijedi $u\ S_w\ u$, pa imamo $w \Vdash (\varphi \rhd \psi)$.
J2: Neka je w svijet na kojem vrijedi $\varphi \rhd \psi$ i $\psi \rhd \xi$, te u njegov sljedbenik na kojem vrijedi φ. To znači da postoji u' takav da je $u\ S_w\ u'$ i $u' \Vdash \psi$. Iz $u\ S_w\ u'$ slijedi $w\ R\ u'$, pa postoji v takav da je $u'\ S_w\ v$ i $v \Vdash \xi$. Po tranzitivnosti relacije S_w imamo $u\ S_w\ v$, pa kako je u bio proizvoljan, vidimo da vrijedi $w \Vdash \varphi \rhd \xi$.
J3: Neka je w svijet na kojem vrijedi $\varphi \rhd \xi$ i $\psi \rhd \xi$, te neka je u njegov sljedbenik na kojem vrijedi $\varphi \vee \psi$. Imamo dva slučaja, $u \Vdash \varphi$ ili $u \Vdash \psi$, u svakom od kojih postoji v takav da je $u\ S_w\ v$ i $v \Vdash \xi$, te zaključujemo $w \Vdash (\varphi \vee \psi) \rhd \xi$.

J4: Neka je w svijet na kojem vrijedi $\varphi \rhd \psi$. Ako na w vrijedi i $\Diamond\varphi$, to znači da postoji $u \in W[w]$ takav da je $u \Vdash \varphi$. Tada postoji v takav da je $u\ S_w\ v$ i $v \Vdash \psi$. Zbog $u\ S_w\ v$ je v sljedbenik od w, pa vrijedi $w \Vdash \Diamond\psi$.

J5: Neka je u proizvoljan sljedbenik svijeta w na kojem vrijedi $\Diamond\varphi$. To znači da postoji v takav da je $u\ R\ v$ i $v \Vdash \varphi$. Sada iz $w\ R\ u\ R\ v$ dobivamo $u\ S_w\ v$, te zbog proizvoljnosti od u imamo $w \Vdash \Diamond\varphi \rhd \varphi$. □

2. Generalizacija traga za logiku interpretabilnosti

Također, kao u GL možemo definirati dubinu svijeta, i zbog svojstva konačnosti modela, dovoljno je promatrati konačne dubine. Napominjemo da definicija pojma dubine koristi samo relaciju R, a ne i relacije S_w. To znači da dubina više nije nešto što u potpunosti određuje formule koje vrijede na svijetu, te dubine svjetova više neće biti jasno razgraničene tragom na one na kojima formula sigurno vrijedi, i one na kojima formula sigurno ne vrijedi. Postojat će i treća skupina, dubine na kojima ne znamo vrijedi li formula.

Najjednostavniji način kako se može dogoditi da ne znamo vrijedi li formula F na dubini n je da postoje dva svijeta w i w' (nije nužno da budu u istom Veltmanovom modelu), takvi da je $\rho(w) = \rho(w') = n$, $w \Vdash F$, te $w' \nVdash F$. Još jedna mogućnost je da ne znamo formulu F u potpunosti, već samo njen oblik (poznato nam je stablo izgradnje od F samo do neke dubine) — to ćemo uskoro formalizirati. Na primjer, možemo znati da je F negirana formula, dakle $F = (G \to \bot)$, ali o G ne znamo ništa. To će biti korisno za kasniju sintaktičku analizu formula s obzirom na normalne forme.

Dakle, na neki način, imamo trovaljanu logiku (precizno, Kleenejev sustav) na izjavama „formula F vrijedi na dubini n". Ulogu traga dakle preuzima funkcija Tr koja IL formulama pridružuje $\{-1, 0, 1\}$-nizove, tako da $\mathrm{Tr}(F)_n = -1$ znači da F sigurno ne vrijedi ni na jednom svijetu dubine n, $\mathrm{Tr}(F)_n = 1$ znači da F sigurno vrijedi na svim svjetovima dubine n, a $\mathrm{Tr}(F)_n = 0$ znači da ne znamo, bilo zbog toga što nam F nije u potpunosti poznata, ili doista ima svjetova dubine n na kojima vrijedi i svjetova dubine n na kojima ne vrijedi.

Prvo precizirajmo „formule koje ne znamo u potpunosti". Kao i u GL, radit ćemo u zatvorenom fragmentu, dakle bez propozicionalnih varijabli.

Definicija 34. *IL sheme* su zadane sljedećim gramatičkim pravilom:

$$G ::= \bot \mid \star \mid G_1 \to G_2 \mid G_1 \rhd G_2$$

(dakle, kao zatvorene formule, samo s još jednim simbolom $\star$ kao atomarnim). *Instanca* IL sheme G je IL formula F dobivena zamjenom svakog simbola $\star$ nekom (ne nužno istom) IL formulom.

Tako je na primjer shema negiranih formula $\star \to \bot$. Također, po lemi 5, formule F za koje je $\neg\neg F \neq F$ su upravo instance sheme $(\star \to \bot) \to \bot$. Primijetimo da nisu sve instance sheme $\star \to \star$ tautologije, jer se simboli $\star$ mogu zamijeniti različitim formulama: ako prvi zamijenimo s $\bot \to \bot$, a drugi s $\bot$, nećemo dobiti tautologiju.

Definicija 35. Na skupu $\{-1, 0, 1\}$ definiramo refleksivni parcijalni uređaj $\succeq$, „biti precizniji", kao

$$\succeq := \{(-1,-1), (-1,0), (0,0), (1,0), (1,1)\}$$

(odnosno, $x \succeq y :\Leftrightarrow y \in \{0, x\}$). Lako se vidi da je to doista refleksivna, tranzitivna i antisimetrična relacija. Ona se prirodno proširuje na refleksivni parcijalni uređaj $\{-1, 0, 1\}$-nizova, sa

$$(a_n)_n \succeq (b_n)_n :\Longleftrightarrow \forall n(a_n \succeq b_n) \; .$$

Lako se vidi da u tom uređaju (na nizovima) postoji najmanji element, i to je nul-niz $(0, 0, \ldots)$. Maksimalne elemente zovemo *determinirani* nizovi — to su oni koji ne poprimaju vrijednost 0.

Kao i u GL, trag ćemo definirati sintaktički, a poslije ćemo semantički opravdati tu definiciju.

Definicija 36. Trag (u IL) je preslikavanje Tr koje IL shemama pridružuje $\{-1, 0, 1\}$-nizove, definirano induktivno:

- $\mathrm{Tr}(\bot) := (-1, -1, -1, \ldots)$
- $\mathrm{Tr}(\star) := (0, 0, 0, \ldots)$
- $\mathrm{Tr}(F \to G)_n := \max\{-\mathrm{Tr}(F)_n, \mathrm{Tr}(G)_n\}$
- $\mathrm{Tr}(F \rhd G)_n := \begin{cases} 1, m(F) \geq \min\{n, M(G)\} \\ -1, M(F) < n \leq m(G) \\ 0, \text{inače} \end{cases} ,$

  gdje smo koristili sljedeće oznake za F (i analogno za G):

$$m(F) := \min\{n : \mathrm{Tr}(F)_n \neq -1\} \qquad M(F) := \min\{n : \mathrm{Tr}(F)_n = 1\}$$

Lako se vidi da je za sve sheme F, $0 \leq m(F) \leq M(F) \leq \infty$, uz uobičajenu konvenciju $\min \emptyset = \infty$, te da se na shemama s determiniranim tragom funkcije m i M poklapaju. Također, ako F ima precizniji trag od G, tada je

$$0 \leq m(G) \leq m(F) \leq M(F) \leq M(G) \leq \infty \; . \qquad \text{(sendvič)}$$

LEMA 37. *Neka su F, G, F' i G' IL-sheme takve da je* $\mathrm{Tr}(F) \succeq \mathrm{Tr}(F')$ *i* $\mathrm{Tr}(G) \succeq \mathrm{Tr}(G')$. *Tada je* $\mathrm{Tr}(F \to G) \succeq \mathrm{Tr}(F' \to G')$ *i* $\mathrm{Tr}(F \rhd G) \succeq \mathrm{Tr}(F' \rhd G')$.

DOKAZ. Prvo pogledajmo slučaj kondicionala. Fiksirajmo proizvoljni n, i označimo

$$a := \mathrm{Tr}(F)_n\,, \qquad b := \mathrm{Tr}(F')_n\,, \qquad c := \mathrm{Tr}(G)_n\,, \qquad d := \mathrm{Tr}(G')_n\,.$$

Prema pretpostavkama, imamo $a \succeq b$ i $c \succeq d$, a trebamo dokazati $\max\{-a, c\} \succeq \max\{-b, d\}$. Prirodno imamo četiri slučaja:

(1) $b = a, d = c$: tada je očito $\max\{-a, c\} = \max\{-b, d\}$.
(2) $b = d = 0$: tada je $\max\{-a, c\} \succeq 0 = \max\{-b, d\}$.
(3) $b = a, d = 0$: tada je $\max\{-b, d\} = \max\{-b, 0\} \geq 0$. Kad to ne bi bilo 0, moralo bi biti 1, i to tako da je $b = -1$. No $-1 = b = a$ povlači $\max\{-a, c\} = \max\{1, c\} = 1 = \max\{-b, d\}$.
(4) $b = 0, d = c$: tada je $\max\{-b, d\} = \max\{0, c\} \geq 0$. Kao i u prošlom slučaju to je ili 0 (pa smo gotovi), ili 1, i to kada je $c = 1$. No $c = 1$ povlači $\max\{-a, c\} = 1 = \max\{-b, d\}$.

Sada pogledajmo slučaj operatora $\rhd$. Po nejednakosti (sendvič), imamo

$$m(F') \leq m(F) \leq M(F) \leq M(F') \quad \text{i}$$
$$m(G') \leq m(G) \leq M(G) \leq M(G')\,.$$

Fiksirajmo n. Želimo dokazati $\mathrm{Tr}(F \rhd G)_n \succeq \mathrm{Tr}(F' \rhd G')_n$. To se svodi na tri implikacije

$$\mathrm{Tr}(F \rhd G)_n = 0 \Longrightarrow \mathrm{Tr}(F' \rhd G')_n = 0$$
$$\mathrm{Tr}(F' \rhd G')_n = -1 \Longrightarrow \mathrm{Tr}(F \rhd G)_n = -1$$
$$\mathrm{Tr}(F' \rhd G')_n = 1 \Longrightarrow \mathrm{Tr}(F \rhd G)_n = 1$$

koje se sve dokažu direktnim korištenjem gornjih nejednakosti. Za primjer dokažimo prvu.

Ako je $\mathrm{Tr}(F \rhd G)_n = 0$, to znači da nisu ispunjeni uvjeti da taj broj bude 1, niti da bude -1. Njihove negacije daju nejednakosti

$$m(F) < n \wedge m(F) < M(G) \wedge (n \leq M(F) \vee n > m(G))\,.$$

Iz njih onda slijedi

$$n > m(F) \geq m(F'), \text{ dakle } m(F') < n$$
$$m(F') \leq M(F) < M(G) \leq M(G'), \text{ dakle } m(F) < M(G')$$
$$n \leq M(F) \leq M(F') \vee n > m(G) \geq m(G')$$

odnosno točno ono što nam treba da zaključimo $\mathrm{Tr}(F' \rhd G') = 0$. $\square$

KOROLAR 38. *Svaka instanca IL sheme ima precizniji trag nego sama shema.*

DOKAZ. Indukcijom po izgradnji IL sheme H, dokazat ćemo da za svaku njenu instancu ξ vrijedi $\mathrm{Tr}(\xi) \succeq \mathrm{Tr}(H)$.

$H = \bot$ Tada u H nema simbola $\star$, pa mora biti i $\xi = \bot$, te je $\mathrm{Tr}(\bot) \succeq \mathrm{Tr}(\bot)$ po refleksivnosti uređaja $\succeq$.

$H = \star$ Tada je ξ proizvoljna formula, no svakako vrijedi $\mathrm{Tr}(\xi) \succeq \mathrm{Tr}(\star)$ jer je $\mathrm{Tr}(\star) = (0, 0, 0, \dots)$ najmanji element u uređaju $\succeq$.

$H = (F \circ G)$ (gdje je $\circ \in \{\to, \rhd\}$) Tada je $\xi = (\varphi \circ \psi)$, gdje je φ instanca od F, a ψ instanca od G. Po pretpostavci indukcije je dakle $\mathrm{Tr}(\varphi) \succeq \mathrm{Tr}(F)$ i $\mathrm{Tr}(\psi) \succeq \mathrm{Tr}(G)$, te je prema lemi 37 $\mathrm{Tr}(\xi) = \mathrm{Tr}(\varphi \circ \psi) \succeq \mathrm{Tr}(F \circ G) = \mathrm{Tr}(H)$. □

Rezultat da je trag svake GL formule konačan ili kofinitan skup prirodnih brojeva za IL se može iskazati u sljedećem obliku:

LEMA 39. *Za svaku IL shemu G, niz $\mathrm{Tr}(G)$ je gotovo konstantan; odnosno, postoji indeks nakon kojeg je konstantan.*

DOKAZ. Indukcijom po izgradnji sheme. $\mathrm{Tr}(\bot)$ i $\mathrm{Tr}(\star)$ su konstantni od samog početka. Također, ako je $\mathrm{Tr}(F)$ konstantan počevši od indeksa n_1, a $\mathrm{Tr}(G)$ od indeksa n_2, tada je $\mathrm{Tr}(F \to G)$ konstantan od indeksa $\max\{n_1, n_2\}$ — to je direktna posljedica činjenice da je trag kondicionala definiran „po točkama”, odnosno $\mathrm{Tr}(F \to G)_n$ ovisi samo o $\mathrm{Tr}(F)_n$ i $\mathrm{Tr}(G)_n$.

Preostalo je vidjeti što je s operatorom $\rhd$. Neka je $\mathrm{Tr}(F)$ konstantan od indeksa n_1, a $\mathrm{Tr}(G)$ od indeksa n_2. Očito, $m(F)$ i $M(F)$, kao mjesta neke promjene u vrijednostima $\mathrm{Tr}(F)$, su ili ∞, ili su manji ili jednaki n_1. Jednako tako, $m(G)$ i $M(G)$ su ili ∞, ili pak manji ili jednaki n_2. To znači da svaka nejednakost koja služi za određivanje vrijednosti $\mathrm{Tr}(F \rhd G)_n$ ima istu istinitost za sve $n > \max\{n_1, n_2\}$, odnosno niz $\mathrm{Tr}(F \rhd G)$ je konstantan počevši najkasnije od $\max\{n_1, n_2\} + 1$. □

KOROLAR 40. *Skup svih indeksa na kojima $\mathrm{Tr}(G)$ ima neku unaprijed zadanu vrijednost, je konačan ili kofinitan podskup od $\mathbb{N}$.*

DOKAZ. Prema lemi 39, taj trag je nakon nekog indeksa n_0 konstantan — tu konstantu nazovimo a. Sada je jasno da za svaki $b \in \{-1, 0, 1\} \setminus \{a\}$ vrijedi $\{n \in \mathbb{N} : \mathrm{Tr}(G)_n = b\} \subset \{1, \dots, n_0\}$, dakle to su konačni skupovi. Tada je $\{n \in \mathbb{N} : \mathrm{Tr}(G)_n = a\}$ kofinitan kao komplement njihove unije. □

Sada napokon možemo semantički opravdati definiciju traga.

LEMA 41. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, S)$ *proizvoljan Veltmanov okvir,* $w \in W$ *svijet u njemu dubine* $\rho(w) = n \in \mathbb{N}$*, te* F *proizvoljna IL shema, i* φ *njena instanca. Tada:*

- *ako je* $\mathrm{Tr}(F)_n = 1$*, tada* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$
- *ako je* $\mathrm{Tr}(F)_n = -1$*, tada* $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$

DOKAZ. Indukcijom po izgradnji sheme F, za sve svjetove $w \in W$ i sve instance φ od F. Obje tvrdnje dokazujemo zajedno.

$\bot$: Jedino je moguće da bude $\mathrm{Tr}(F)_n = -1$, i tada naravno $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$.

$\star$: Tada φ može biti proizvoljna formula, ali uvjeti implikacija nikad nisu ispunjeni, pa one uvijek vrijede.

$F \to G$: Pretpostavimo da te dvije tvrdnje vrijede za F i G. Trebamo ih dokazati za $F \to G$. Neka je ξ proizvoljna instanca te sheme. Očito mora biti $\xi = (\varphi \to \psi)$, gdje je φ instanca od F, a ψ instanca od G.

1) Ako je $\mathrm{Tr}(F \to G)_n = \max\{-\mathrm{Tr}(F)_n, \mathrm{Tr}(G)_n\} = 1$, jedan od tih brojeva mora biti 1. Ako je to prvi, tada $\mathrm{Tr}(F)_n = -1$, pa po pretpostavci indukcije $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$, dakle $\mathfrak{M}, w \Vdash \xi$. Ako je to drugi, $\mathrm{Tr}(G)_n = 1$, pa po pretpostavci $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$, a onda i $\mathfrak{M}, w \Vdash \xi$.

−1) Ako je $\mathrm{Tr}(F \to G)_n = -1$, tada mora biti $-\mathrm{Tr}(F)_n = \mathrm{Tr}(G)_n = -1$, dakle po pretpostavci indukcije $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ i $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$, odnosno $\mathfrak{M}, w \nVdash \xi$.

$F \rhd G$: Pretpostavka je da obje implikacije vrijede za F i G, trebamo ih dobiti za $F \rhd G$. Kao i gore, neka je $\xi = (\varphi \rhd \psi)$ proizvoljna instanca te sheme.

1) Ako je $\mathrm{Tr}(F \rhd G)_n = 1$, moguća su dva razloga. Prvi je $n \leq m(F)$. Kad bi postojao $v \in W[w]$ na kojem vrijedi φ, njegova dubina bila bi strogo manja od dubine njegovog pretka, $\rho(w) = n \leq m(F)$, odnosno imali bismo $\rho(v) < m(F) \leq m(\varphi)$ (posljednja nejednakost je posljedica nejednakosti (sendvič) i korolara 38). Po definiciji funkcije m, to znači $\mathrm{Tr}(\varphi)_{\rho(v)} = -1$, što je u suprotnosti s pretpostavkom indukcije jer smo pretpostavili $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. Dakle, takav v ne postoji, pa je ispunjeno $\mathfrak{M}, w \Vdash \xi$.
Drugi način da $\mathrm{Tr}(F \rhd G)_n$ bude 1 je da vrijedi $m(F) \geq M(G)$. Ako je sada $v \in W[w]$ na kojem vrijedi F proizvoljan, znamo da mora biti $\rho(v) \geq m(F)$ (ispod $m(F)$ su samo vrijednosti -1 u tragu od F), dakle $\rho(v) \geq M(G) \geq M(\psi)$. No po definiciji funkcije M to znači $\mathrm{Tr}(\psi)_{\rho(v)} = 1$, pa po pretpostavci indukcije $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. To znači da

možemo uzeti $u := v$, jer $v\ S_w\ u$ onda vrijedi zbog refleksivnosti relacije S_w.

-1) Ako je $\mathrm{Tr}(F \rhd G)_n = -1$, to znači da je $M(F) < n \leq m(G)$. Iz $M(F) < n$ po lemi 16 (koja je dokazana za GL okvire, ali vrijedi i za Veltmanove jer je pojam dubine isti i definiran samo pomoću R) postoji $v \in W[w]$ takav da je $\rho(v) = M(F)$ — specijalno, $M(F)$ je prirodan broj (nije ∞). Onda se lako vidi $\mathrm{Tr}(F)_{\rho(v)} = \mathrm{Tr}(F)_{M(F)} = 1$ (štoviše, $\rho(v) = M(F)$ je najmanji takav indeks), pa po pretpostavci indukcije imamo $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. Sada pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \xi$. To bi značilo da postoji $u \in W$ na kojem vrijedi ψ, takav da je $v\ S_w\ u$. No to je nemoguće: S_w je relacija na $W[w]$, što znači da je u sljedbenik od w. Tada je $\rho(u) < \rho(w) = n \leq m(G) \leq m(\psi)$, pa je po definiciji funkcije m, $\mathrm{Tr}(\psi)_n = -1$, što je u suprotnosti s pretpostavkom indukcije i $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$. Dakle mora biti $\mathfrak{M}, w \nVdash \xi$ u ovom slučaju. □

Lako se dokažu analogne tvrdnje za računanje s funkcijom Tr i izvedenim logičkim veznicima:

- $\mathrm{Tr}(\neg F)_n = -\mathrm{Tr}(F)_n$
- $\mathrm{Tr}(F \vee G)_n = \max\{\mathrm{Tr}(F)_n, \mathrm{Tr}(G)_n\}$
- $\mathrm{Tr}(F \wedge G)_n = \min\{\mathrm{Tr}(F)_n, \mathrm{Tr}(G)_n\}$

KOROLAR 42. *Ako su F i G dvije IL formule s istim determiniranim tragom, tada je u IL dokaziva formula $F \leftrightarrow G$.*

DOKAZ. Prema gornjim pravilima, za sve n vrijedi

$$\mathrm{Tr}(F \leftrightarrow G)_n = \mathrm{Tr}\left((F \to G) \wedge (G \to F)\right)_n =$$
$$= \min\left\{\max\{-\mathrm{Tr}(F)_n, \mathrm{Tr}(G)_n\}, \max\{-\mathrm{Tr}(G)_n, \mathrm{Tr}(F)_n\}\right\} =$$
$$\max\{-\mathrm{Tr}(F)_n, \mathrm{Tr}(F)_n\} = |\mathrm{Tr}(F)_n| = |\pm 1| = 1$$

pa je tvrdnja posljedica leme 41 i teorema 33. □

TEOREM 43 (o eliminaciji $\rhd$). *Neka je F neka IL shema. Ako je $\mathrm{Tr}(F)$ determiniran, tada su sve instance od F dokazivo u IL ekvivalentne GL formuli ψ čiji je trag $\mathrm{tr}(\psi) = \{n \in \mathbb{N} : \mathrm{Tr}(F)_n = -1\}$.*

DOKAZ. Prvo primijetimo da je zbog korolara 40 skup svih n takvih da je $\mathrm{Tr}(F)_n = -1$, konačan ili kofinitan. To znači da postoji GL formula ψ čiji je to trag — vidjeli smo da se kao tragovi postižu svi jednočlani skupovi, iz čega konačnim unijama (konjunkcijama) dobijemo sve konačne, a onda komplementiranjem (negacijom) i sve kofinitne.

Također primijetimo da je zbog leme 38 trag svake instance od F precizniji od traga od F, a kako je ovaj determiniran, oni moraju biti jednaki.

Dakle, uzevši u obzir korolar 42, samo još treba dokazati da svaka GL formula φ, shvaćena kao IL shema, ima determinirani trag $\mathrm{Tr}(\varphi) = 1 - 2\chi_{\mathrm{tr}(\varphi)}$ (elementi od $\mathrm{tr}(\varphi)$ se preslikavaju u -1, a ostali u 1). To se dobije indukcijom po izgradnji φ.

$\bot$: Za svaki n je $1 - 2\chi_{\mathrm{tr}(\bot)}(n) = 1 - 2\chi_{\mathbb{N}}(n) = 1 - 2 \cdot 1 = -1 = \mathrm{Tr}(\bot)_n$.

$\psi \to \xi$: Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Označimo $a := \chi_{\mathrm{tr}(\psi)}(n)$ i $b := \chi_{\mathrm{tr}(\xi)}(n)$. Pretpostavke su $\mathrm{Tr}(\psi)_n = 1 - 2a$ i $\mathrm{Tr}(\xi)_n = 1 - 2b$. Tada je

$$\begin{aligned} 1 - 2\chi_{\mathrm{tr}(\psi\to\xi)}(n) &= 1 - 2\chi_{\mathrm{tr}(\xi)\setminus\mathrm{tr}(\psi)}(n) = 1 - 2\min\{b, 1-a\} = \\ &= \max\{1-2b, 1-2(1-a)\} = \max\{1-2b, 1-2+2a\} = \\ &= \max\{2a-1, 1-2b\} = \max\{-\mathrm{Tr}(\psi)_n, \mathrm{Tr}(\xi)_n\} = \mathrm{Tr}(\psi\to\xi)_n\,. \end{aligned}$$

$\Box\psi$: Po pretpostavci, $\mathrm{Tr}(\psi)$ je funkcija koja elemente od $\mathrm{tr}(\psi)$ preslikava u -1, a ostale prirodne brojeve u 1. To specijalno znači da je $\mathrm{Tr}(\psi)$ determiniran, pa je i $\mathrm{Tr}(\neg\psi) = -\mathrm{Tr}(\psi)$ determiniran, odnosno $m(\neg\psi) = M(\neg\psi)$. Taj broj je po definiciji minimalni indeks u kojem $\mathrm{Tr}(\neg\psi)$ poprima vrijednost 1, dakle $\mathrm{Tr}(\psi)$ poprima vrijednost -1, odnosno minimalni element od $\mathrm{tr}(\psi)$ (ili ∞ ako takvog nema). Sada korištenjem $m(\bot) = M(\bot) = \infty$ i $m(\neg\psi) = M(\neg\psi) = \min\mathrm{tr}(\psi)$ vidimo da se definicija $\mathrm{Tr}(\Box\psi)$ može zapisati kao

$$\mathrm{Tr}(\neg\psi \rhd \bot)_n = \begin{cases} 1, & n \le \min\mathrm{tr}(\psi) \\ -1, & \text{inače} \end{cases},$$

odnosno $\mathrm{Tr}(\Box\psi)_n = -1$ ako i samo ako postoji $i \in \mathrm{tr}(\psi)$ takav da je $n > i$, dakle ako i samo ako je $n \in \mathrm{tr}(\Box\psi)$, a inače je $\mathrm{Tr}(\Box\psi)_n = 1$. $\Box$

3. Primjene teorema o eliminaciji $\rhd$ na neke IL sheme

Prvo pogledajmo što se događa na svjetovima dubine 0. To su svjetovi koji nemaju sljedbenika, i u slučaju kada nemamo propozicionalnih varijabli, svi su *modalno ekvivalentni* — iste formule vrijede, odnosno ne vrijede, na svima njima. Tako formule možemo podijeliti u dvije klase.

Definicija 44. Za IL shemu (ili formulu kao specijalni slučaj) F kažemo da je *afirmativna*, ako je $\mathrm{Tr}(F) \succeq (1, 0, 0, 0, \ldots)$. Kažemo da je F *negativna*, ako je $\mathrm{Tr}(F) \succeq (-1, 0, 0, 0, \ldots)$.

PROPOZICIJA 45. *Shema* $\star \rhd \star$ *je afirmativna.*

DOKAZ. Doista, samo treba primijetiti da je $0 \leq 0 = m(\star)$, pa je prema prvom slučaju u definiciji traga $\rhd$-formula $\mathrm{Tr}(\star \rhd \star)_0 = 1$. Zapravo, na svim ostalim mjestima u $\mathrm{Tr}(\star \rhd \star)$ stoje nule, te je $\mathrm{Tr}(\star \rhd \star) = (1, 0, 0, 0, \ldots)$. $\square$

LEMA 46. *Svaka IL formula je ili afirmativna ili negativna.*

DOKAZ. Indukcijom po izgradnji formule. $\perp$ je očito negativna formula. Sve formule oblika $\varphi \rhd \psi$ su instance sheme $\star \rhd \star$, pa je prema korolaru 38

$$\mathrm{Tr}(\varphi \rhd \psi) \succeq \mathrm{Tr}(\star \rhd \star) = (1, 0, 0, 0, \ldots)\ .$$

Preostalo je vidjeti što je s formulama oblika $\varphi \to \psi$. Kako je $\mathrm{Tr}(\varphi \to \psi)_0 = \max\{-\mathrm{Tr}(\varphi)_0, \mathrm{Tr}(\psi)_0\}$, lako vidimo da je to jednako -1 ako je $-\mathrm{Tr}(\varphi)_0 = \mathrm{Tr}(\psi)_0 = -1$, a 1 u svim ostalim slučajevima. Dakle, ako je φ afirmativna, a ψ negativna formula, $\varphi \to \psi$ je negativna, a u preostala tri slučaja je afirmativna. $\square$

Primjećujemo da su jedine negativne formule $\perp$, te $\varphi \to \psi$, gdje je ψ negativna a φ afirmativna formula. Specijalno, $\varphi \to \perp$ je negativna formula ako je φ afirmativna, a afirmativna ako je φ negativna. Odnosno, negiranje mijenja klasu formule.

DEFINICIJA 47. Za IL shemu F kažemo da je *prijelazna ako je* $\mathrm{Tr}(F) \succeq (-1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$.

Sada možemo detaljnije pogledati na koje se IL sheme može primijeniti teorem o eliminaciji operatora $\rhd$, odnosno koje imaju determinirani trag. Pokazuje se da su to one navedene u sljedećem teoremu, i za svaku od njih je navedena GL formula kojoj je svaka njena instanca ekvivalentna.

TEOREM 48. *Neka je A afirmativna, N negativna, te X prijelazna shema. Tada vrijedi*

$$\begin{array}{rcl} \perp \rhd \star & \Longleftrightarrow & \top \\ \star \rhd A & \Longleftrightarrow & \top \\ A \rhd \perp & \Longleftrightarrow & \Box\perp \\ N \rhd X & \Longleftrightarrow & \top \\ X \rhd \perp & \Longleftrightarrow & \Box\Box\perp \end{array}$$

DOKAZ. Direktno računanjem traga i primjenom teorema o eliminaciji $\rhd$. Za primjer dokazujemo treću ekvivalenciju. Računamo $\mathrm{Tr}(A \rhd \perp)$. Kako je $\mathrm{Tr}(A) \succeq (1, 0, 0, \ldots) = \mathrm{Tr}(\star \rhd \star)$, po lemi 37 imamo $\mathrm{Tr}(A \rhd \perp) \succeq \mathrm{Tr}\big((\star \rhd \star) \rhd \perp\big)$. Da bismo to izračunali, primijetimo da otprije imamo $\mathrm{Tr}(\star \rhd \star) = (1, 0, 0, \ldots)$, dakle $m(\star \rhd \star) = M(\star \rhd \star) = 0$. Također iz definicije imamo $m(\bot) = M(\bot) = \infty$. To znači da je na početku $\mathrm{Tr}\big((\star \rhd \star) \rhd \bot\big)_0 = 1$ jer je $m(\star \rhd \star) \geq 0$, a na svim ostalim mjestima $n > 0$ je $\mathrm{Tr}\big((\star \rhd \star) \rhd \bot\big)_n = -1$ jer je $M(\star \rhd \star) = 0 < n \leq \infty = m(\bot)$. Dakle je $\mathrm{Tr}\big((\star \rhd \star) \rhd \bot\big) = (1, -1, -1, -1, \ldots)$, što je determiniran niz, pa je i $\mathrm{Tr}(A \rhd \bot) = (1, -1, -1, -1, \ldots)$. Iz toga slijedi da je svaka instanca sheme $A \rhd \bot$ ekvivalentna GL formuli čiji je trag $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, a najjednostavnija takva je naravno $\Box\bot$.

Vidimo da u dokazu takvih tvrdnji ima dosta računanja, još i više kad promatramo prijelazne formule. Zato možemo upotrijebiti računalo. Na slici 2.1 se nalazi kôd u programskom jeziku paketa *Wolfram Mathematica 7*, pomoću kojeg se može računati trag bilo koje IL sheme, i provjeriti ekvivalencija s drugom IL shemom ili GL formulom. Što se kôda tiče, uglavnom predstavlja samo prevođenje u računalni jezik gornjih definicija i postupaka za računanje traga. Važno je da su svi tragovi od nekog mjesta konstante, pa ih možemo prikazati u računalu kao konačne nizove (do mjesta nakon kojeg se ne mijenjaju).

Također, kôd koristi „kanonske” afirmativne, negativne i prijelazne sheme, kao najmanje elemente (gledano po tragu) u pojedinoj klasi. To smo primijenili gore kad smo računanje s općenitom afirmativnom shemom A sveli na računanje s konkretnom shemom $\star \rhd \star$. Dakle, kanonska afirmativna shema je $\star \rhd \star$, jer joj je trag $(1, 0, 0, \ldots)$, i trag svake druge afirmativne formule je precizniji od toga, te ako na kraju dobijemo determinirani trag, možemo primijeniti lemu 37 i zaključiti da smo zapravo dobili i trag početne sheme. Korištene kanonske sheme su:

$$A_0 := \star \rhd \star$$

$$N_0 := \neg A_0 = \big((\star \rhd \star) \to \bot\big)$$

$$X_0 := \neg(A_0 \rhd N_0) = \Big(\big((\star \rhd \star) \rhd \big((\star \rhd \star) \to \bot\big)\big) \to \bot\Big)$$

Radi jednostavnosti kodiranja, $\bot$ je predstavljen kao broj 0. Simbol $\Leftrightarrow$ predstavlja lokalnu ekvivalenciju, a simbol $\Longleftrightarrow$ globalnu. Potrebno je i pomicati indekse jer *Mathematica* podizraze broji počevši od 1, a mi želimo da niz koji predstavlja trag počne od 0. Ostalo sve je, nadamo se, jasno iz koda. $\square$

4. Globalna ekvivalencija i teorem o generalizaciji

Još je preostalo odgovoriti na pitanje možemo li dobiti neke nove rezultate ako oslabimo lokalnu ekvivalenciju na globalnu, te možemo li

```
{x___, y_, y_, …} ^:= {x, y, …}; {x___, y_, …}i_ := Quiet@Check[{x}[[i+1]], y]
φ_p_ := Quiet@Check[Position[Tr@φ, p][[1,1]] - 1, ∞]; Tr@φ_ := {φ - (★ = 1), …}
Tr@v_[φ_, ψ_] :=
 Table[If[v === RightArrow, Max[-Tr[φ]n, Tr[ψ]n],
     Boole[φ0|1 ≥ Min[n, ψ1]] - Boole[φ1 < n ≤ ψ0|1]],
   {n, 0, Max[Length /@ Tr /@ {φ, ψ}]}] ~Append~ …

T = 0 → 0; □φ_ := (φ → 0) ▷ 0; φ_ ⇔ ψ_ := Tr@φ = Tr@ψ ∧ φ0 = ∞;
φ_ ⟺ ψ_ := □φ ⇔ □ψ

{Tr@★, Tr@0, Tr@T, Tr@A = Tr[★ ▷ ★], Tr@N = Tr[A → 0], Tr@X = Tr[A ▷ N → 0]}
{{0, …}, {-1, …}, {1, …}, {1, 0, …}, {-1, 0, …}, {-1, 1, 0, …}}

{0 ▷ ★ ⇔ T, ★ ▷ A ⇔ T, A ▷ 0 ⇔ □0, N ▷ X ⇔ T, X ▷ 0 ⇔ □□0, N ⟺ 0, (X → 0) ⟺ □0}
{True, True, True, True, True, True, True}
```

Slika 2.1. Mathematica kôd koji provjerava sve rezultate u ovoj točki, računanjem traga

te eventualne nove rezultate također dobiti pomoću tehnike generaliziranog traga. Definicije koje koristimo, i koje su uobičajene u literaturi, su:

Definicija 49. Neka su φ i ψ dvije zatvorene IL formule.

- Kažemo da su φ i ψ *lokalno ekvivalentne*, i pišemo $\varphi \Leftrightarrow \psi$, ako za svaki Veltmanov okvir $\mathfrak{M}$ i za svaki svijet w u $\mathfrak{M}$, vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$.
- Kažemo da su φ i ψ *globalno ekvivalentne*, i pišemo $\varphi \overset{g}{\Longleftrightarrow} \psi$, ako za svaki Veltmanov okvir $\mathfrak{M}$ vrijedi $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \Vdash \psi$.

Primijetimo da je dovoljno gledati okvire, jer radimo sa zatvorenim formulama. Lokalna ekvivalencija je ono s čim smo dosad radili, no kao što smo rekli, normalne forme možemo shvatiti i kao globalno ekvivalentne traženim formulama. Iz definicije je jasno da lokalna ekvivalencija povlači globalnu, tako da svi rezultati koje smo dobili, ostaju i ako ekvivalenciju interpretiramo kao globalnu. Zanimljivo, i korisno iz perspektive primjene dosadašnjih rezultata, je da možemo globalnu ekvivalenciju svesti na lokalnu, što pokazuje sljedeći rezultat. *Generalizacijom* formule φ zovemo formulu $\Box\varphi$.

Teorem 50 (o generalizaciji). *Dvije IL formule su globalno ekvivalentne ako i samo ako su njihove generalizacije lokalno ekvivalentne. Odnosno,*

$$\varphi \overset{g}{\Longleftrightarrow} \psi \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad \Box\varphi \Leftrightarrow \Box\psi\,.$$

Dokaz. Pogledajmo prvo smjer slijeva nadesno. Neka su φ i ψ globalno ekvivalentne formule, i neka je $\mathfrak{M} = (W, R, S)$ Veltmanov okvir, te $w \in W$ takav da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$. Također, neka je $u \in W[w]$ proizvoljan. Želimo dokazati $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$. Tako ćemo dokazati $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\psi$, te zbog očite simetrije $\Box\varphi \Leftrightarrow \Box\psi$.

Konstruiramo novi Veltmanov okvir

$$\mathfrak{M}[w] := \big(W[w]\,,\, R[w]\,,\, (S_v \,:\, w\; R\; v)\big)$$

gdje je $R[w] := W[w] \times W[w] \cap R$ — lako je provjeriti da to doista jest Veltmanov okvir. Naime, $R[w]^{-1}$ je kao podskup dobro utemeljene R^{-1} također dobro utemeljena, te je $R[w]$ kao restrikcija tranzitivne R također tranzitivna. Svaka S_v ima sva svojstva koja treba, jer te relacije su ostale nepromijenjene. Samo treba provjeriti da je svaka i dalje na odgovarajućem skupu, odnosno da je $W[v] = \big(W[w]\big)[v]$, no to slijedi iz tranzitivnosti relacije R. Precizno, $s\; S_v\; t$ za $w\; R\; v$ povlači $w\; R\; v\; R\; s$ i $w\; R\; v\; R\; t$, pa je $w\; R\; s$ i $w\; R\; t$, odnosno $s, t \in W[w]$. Također, $v\; R[w]\; s\; R[w]\; t$ povlači $v\; R\; s\; R\; t$, dakle $s\; S_v\; t$.

Sada je ključno primijetiti da za sve $v \in W[w]$ vrijedi da je dio modela $\mathfrak{M}$ koji se vidi iz v jednak kao dio modela $\mathfrak{M}[w]$ koji se vidi iz v. Naime, svi R-sljedbenici od v, pa tako i svi svjetovi u relacijama S_v i S_u, $v\; R\; u$, se moraju nalaziti u $W[w]$ po tranzitivnosti od R, i među njima vrijede iste relacije u $\mathfrak{M}$ kao i u $\mathfrak{M}'$. Precizno, kada u drugom dijelu ovog rada definiramo bisimulacije Veltmanovih okvira, vidjet ćemo da su $\mathfrak{M}, v$ i $\mathfrak{M}[w], v$ bisimulirani. To prema korolaru 61 povlači da su modalno ekvivalentni, pa $\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi$, dakle $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$, znači da je i $\mathfrak{M}[w], v \Vdash \varphi$.

Kako je $v \in W[w]$ bio proizvoljan, zaključujemo $\mathfrak{M}[w] \Vdash \varphi$. Po globalnoj ekvivalenciji imamo $\mathfrak{M}[w] \Vdash \psi$, odnosno za onaj svijet u s početka, $\mathfrak{M}[w], u \Vdash \psi$. Sada opet po modalnoj ekvivalentnosti $\mathfrak{M}[w], u$ i $\mathfrak{M}, u$ možemo napokon dobiti $\mathfrak{M}, u \Vdash \psi$, što smo i željeli.

Sada dokažimo smjer zdesna nalijevo. Neka vrijedi $\Box\varphi \Leftrightarrow \Box\psi$, te neka je $\mathfrak{M} = (W, R, S)$ Veltmanov okvir na kojem vrijedi φ. Neka je $v \in W$ proizvoljan. Želimo dokazati $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$, jer iz toga će slijediti $\mathfrak{M} \Vdash \psi$, te opet argumentom simetrije $\varphi \overset{g}{\Longleftrightarrow} \psi$.

Opet konstruiramo novi model. Neka je w „novi svijet", odnosno neki svijet koji nije element od W. Definiramo

$$\mathfrak{M} + w := \big(W \mathbin{\dot\cup} \{w\}\,,\, \{w\} \times W \mathbin{\dot\cup} R\,,\, S\big)$$

gdje dodefiniramo $S_w := R \mathbin{\dot\cup} I_W$ (refleksivno zatvorenje relacije R na W). Ostale relacije S_u, $u \in W$ ostaju nepromijenjene. Opet nije teško provjeriti da se doista radi o Veltmanovom okviru, te da su za sve $u \in W$, $\mathfrak{M}, u$ i $(\mathfrak{M}{+}w), u$ bisimulirani, pa dakle i modalno ekvivalentni.

Ako je sada $u \in (W \dot\cup \{w\})[w] = W$ proizvoljan, po pretpostavci vrijedi $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$. Po modalnoj ekvivalentnosti je dakle $(\mathfrak{M}+w), u \Vdash \varphi$, a kako je u proizvoljan sljedbenik od w u $\mathfrak{M} + w$, zaključujemo $(\mathfrak{M} + w), w \Vdash \Box\varphi$. Sada po lokalnoj ekvivalentnosti $\Box\varphi$ i $\Box\psi$ zaključujemo $(\mathfrak{M}+w), w \Vdash \Box\psi$, odnosno za naš svijet v s početka imamo $(\mathfrak{M}+w), v \Vdash \psi$, te opet po modalnoj ekvivalentnosti $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. □

To znači da *Mathematica* kôd sa slike 2.1 možemo iskoristiti i za provjeru globalnih ekvivalencija, kao što je i učinjeno na zadnja dva primjera. Konkretno, radi se o sljedećim rezultatima.

KOROLAR 51. *Neka je N negativna, te X prijelazna IL shema. Vrijede sljedeće globalne ekvivalencije:*

$$\begin{aligned} N &\overset{g}{\Longleftrightarrow} \bot \\ X \to \bot &\overset{g}{\Longleftrightarrow} \Box\bot \end{aligned}$$

DOKAZ. Direktno iz teorema o generalizaciji, i dalje uobičajenim računanjem s tragovima. □

5. Neeliminabilnost operatora $\rhd$ u općem slučaju

Dosadašnji rezultati pružaju prilično dobar pregled slučajeva u kojima je trag determiniran, te se operator $\rhd$ može eliminirati, odnosno određene IL formule su ekvivalentne nekim GL formulama. Ovdje ćemo utvrditi rezultat u suprotnom smjeru, koji pokazuje da se $\rhd$ ne može uvijek eliminirati, navođenjem konkretne zatvorene IL formule χ koja nije globalno ekvivalentna nijednoj GL formuli.

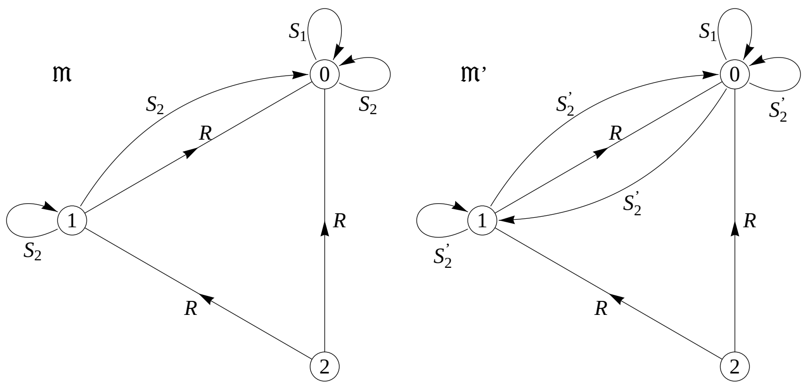
$$\chi := \big(\Diamond\Diamond\top \to (\top \rhd \Diamond\top)\big) =$$
$$=((((((\bot\to\bot)\rhd\bot)\to\bot)\rhd\bot)\to\bot)\to((\bot\to\bot)\rhd(((\bot\to\bot)\rhd\bot)\to\bot)))$$

Intuitivno, $\mathfrak{M} \Vdash \chi$ kaže da za svaki svijet w u $\mathfrak{M}$ dubine bar 2, svaki R-sljedbenik od w ima neterminalnog S_w-sljedbenika.

TEOREM 52. *Ne postoji GL formula φ takva da je $\chi \overset{g}{\Longleftrightarrow} \varphi$.*

DOKAZ. Promotrimo sljedeća dva Veltmanova okvira:
$\mathfrak{M} := \big(W, R, (S_0, S_1, S_2)\big)$ i $\mathfrak{M}' := \big(W, R, (S_0, S_1, S_2')\big)$, gdje je

$$\begin{array}{ll} W := \{0,1,2\} & R := \{(2,1),(1,0),(2,0)\} \\ S_0 := \emptyset & S_1 := \{(0,0)\} \\ S_2 := \{(0,0),(1,1),(1,0)\} & S_2' := S_2 \cup \{(0,1)\} \end{array}$$



Slika 2.2. Grafički prikaz Veltmanovih okvira $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

Lako se vidi da su oba doista Veltmanovi okviri. Pogledajmo kakva je istinitost od χ na njima. Vrijedi $\mathfrak{M}, 2 \Vdash \Diamond\Diamond\top$ (jer $2\ R\ 1\ R\ 0$), te $\mathfrak{M}, 2 \nVdash \top \rhd \Diamond\top$ (jer $2\ R\ 0$, ali 0 nema neterminalnog S_2-sljedbenika). To znači da $\mathfrak{M}, 2 \nVdash \chi$, pa χ ne vrijedi globalno na $\mathfrak{M}$.

S druge strane, u $\mathfrak{M}'$ razmišljamo ovako: jedini svijet dubine bar 2 je upravo 2, a svi njegovi R-sljedbenici (0 i 1) imaju S_2'-sljedbenika 1 koji nije terminalan (jer $1\ R\ 0$). Dakle, vrijedi $\mathfrak{M}' \Vdash \chi$.

Kad bi χ bila globalno ekvivalentna nekoj GL formuli φ, svaki Veltmanov okvir bi se morao slagati u istinitosti χ i φ, pa specijalno i dva gore definirana. Dakle vrijedilo bi $\mathfrak{M} \nVdash \varphi$, ali $\mathfrak{M}' \Vdash \varphi$. No to je nemoguće, jer $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ se razlikuju samo u relaciji S_2, koju GL formula φ „ne vidi". Precizno, oba Veltmanova okvira imaju istu GL strukturu $\mathfrak{N} := (W, R)$, s kojom se moraju slagati na svim GL formulama — što bi značilo $\mathfrak{N} \nVdash \varphi$ i $\mathfrak{N} \Vdash \varphi$, što je kontradikcija. $\square$

Primijetimo da je to na neki način minimalni kontraprimjer. Naime, svakako moramo imati svijet dubine bar 2, jer vrijedi sljedeće:

Propozicija 53. *Svi svjetovi dubine* 0 *su modalno ekvivalentni (slažu se na svim zatvorenim IL formulama). Također, svi svjetovi dubine* 1 *su modalno ekvivalentni.*

Dokaz. Ovo možemo jednostavno dokazati pomoću leme 41 — samo treba provjeriti da za sve formule φ, $\mathrm{Tr}(\varphi)_0$ i $\mathrm{Tr}(\varphi)_1$ nikada ne mogu biti 0. Naime, ako je $\mathrm{Tr}(\varphi)_n = 1$, znamo da φ vrijedi na svim svjetovima dubine n, a ako je -1, znamo da ne vrijedi ni na jednom.

To dokazujemo indukcijom po φ. Slučaj $\varphi = \bot$ je očit: $-1 \neq 0$. Također, slučaj $\varphi = (\psi \to \xi)$ je jednostavan: $\mathrm{Tr}(\varphi)_n$ je jedan od brojeva $-\mathrm{Tr}(\psi)_n$ i $\mathrm{Tr}(\xi)_n$, što ne može biti 0 ako nijedan od tih brojeva nije 0, što nije po pretpostavci indukcije.

Za formule s glavnim veznikom $\rhd$, već smo vidjeli da su afirmativne, dakle vrijedi $\mathrm{Tr}(\psi \rhd \xi)_0 = 1 \neq 0$. Preostalo je vidjeti što je s dubinom 1. Imamo

$$\mathrm{Tr}(\psi \rhd \xi)_1 = \begin{cases} 1, & m(\psi) \geq \min\{1, M(\xi)\} \\ -1, & M(\psi) < 1 \leq m(\xi) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Raspišimo ovo „inače". Što bi se trebalo dogoditi da bude $\mathrm{Tr}(\psi \rhd \xi)_1 = 0$? Prvo, morali bismo imati $m(\psi) < \min\{1, M(\xi)\}$, dakle $m(\psi) = 0$ i $M(\xi) \neq 0$. Sada $m(\psi) = 0$ povlači $\mathrm{Tr}(\psi)_0 \neq -1$, pa iz pretpostavke indukcije za ψ imamo $\mathrm{Tr}(\psi)_0 = 1$, odnosno $M(\psi) = 0$. Također, $m(\xi) = 0$ bi na jednak način, primjenom pretpostavke indukcije na ξ, povlačilo $M(\xi) = 0$, što je kontradikcija. Dakle, mora vrijediti $m(\xi) \geq 1$, što zajedno s gornjim daje upravo $M(\psi) = 0 < 1 \leq m(\xi)$. Odnosno, ako ne vrijedi prvi uvjet u gornjoj definiciji po slučajevima, tada sigurno vrijedi drugi, pa se „inače" nikada ne dogodi, odnosno uvijek je $\mathrm{Tr}(\psi \rhd \xi)_1 \neq 0$. □

Također, po lemi 16, postojanje svijeta dubine 2 povlači postojanje još bar dva svijeta — jednog dubine 1 i jednog dubine 0. Prirodno smo ih označili njihovim dubinama. Tada mora vrijediti $2 \; R \; 1 \; R \; 0$ (jer inače bismo morali imati još jedan terminalni svijet, koji bi bio svjedok za $\rho(1) = 1$), te su sve ostale relacije u $\mathfrak{M}$ posljedica toga i definicije Veltmanovog okvira. S_0 mora biti prazna jer 0 nema sljedbenika, S_1 mora biti $\{(0,0)\}$ zbog refleksivnosti i činjenice da je 0 jedini sljedbenik od 1, a S_2 mora sadržavati $(0,0)$ i $(1,1)$ po refleksivnosti, te $(1,0)$ zbog $2 \; R \; 1 \; R \; 0$. Kako je $W[2] = \{0,1\}$, jedino što uopće možemo birati je vrijedi li $0 \; S_2 \; 1$, i to je ono što razlikuje $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Formula χ je direktan način da se ta razlika opiše u IL. Primijetimo, da nam je bio cilj oboriti *lokalnu* ekvivalentnost s GL formulama, dovoljno bi bilo uzeti $\top \rhd \Diamond\top$. Ta formula vrijedi na svijetu 2 u $\mathfrak{M}'$, ali ne u $\mathfrak{M}$. Ostatak formule služi za selektiranje svijeta 2, kao jedinog na kojem vrijedi $\Diamond\Diamond\top$.

Važno je napomenuti da je velika razlika GL i IL u tome što u GL, analogon prethodne propozicije vrijedi za sve dubine, ne samo 0 i 1. Štoviše, slučaj beskonačnih dubina je još jednostavniji.

Teorem 54. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, svi svjetovi dubine n se slažu na svim zatvorenim GL formulama. Također, svi svjetovi beskonačne dubine (bez obzira na konkretan ordinal) se slažu na svim zatvorenim GL formulama: sve zatvorene GL formule koje na bilo kojem od njih vrijede su točno one s konačnim tragom.*

Dokaz. Prvi dio teorema slijedi direktno iz leme 18, i već smo ga zapravo dokazali na početku točke o nepostojanju normalnih formi u slučaju $Prop \neq \emptyset$. Drugi dio dokazujemo indukcijom. Fiksiramo GL strukturu $\mathfrak{N}$ i svijet w u njoj, takav da je $\rho(w) \geq \omega$. Dokazujemo da za sve GL formule φ vrijedi $w \Vdash \varphi$ ako i samo ako je $\mathrm{tr}(\varphi)$ konačan. Za $\varphi = \bot$ je to očito: $w \nVdash \bot$, i $\mathrm{tr}(\bot) = \mathbb{N}$, što je beskonačan skup. Za $\varphi = (\psi \to \xi)$, već smo vidjeli u dokazu leme 21 da je $\mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}(\xi) \setminus \mathrm{tr}(\psi)$ konačan ako i samo ako je $\mathrm{tr}(\xi)$ konačan ili $\mathrm{tr}(\psi)$ kofinitan, što je prema pretpostavci indukcije ekvivalentno s $w \Vdash \xi$ ili $w \nVdash \psi$, odnosno upravo $w \Vdash \varphi$.

Preostalo je vidjeti što je s formulama oblika $\Box\psi$. Tu nam može pomoći jednakost ($\mathrm{tr}\,\Box$): vidimo da je $\mathrm{tr}(\Box\psi)$ konačan jedino ako je prazan, što znači da je $\Box\psi$ teorem od GL, pa svakako vrijedi na w. U suprotnom slučaju, ako je $\mathrm{tr}(\Box\psi)$ kofinitan, svakako $\mathrm{tr}(\psi)$ ima najmanji element n. Sada je $n < \omega \leq \rho(w)$, pa prema lemi 16 postoji svijet v dubine n takav da je $w\ R\ v$. Imamo $\rho(v) = n \in \mathrm{tr}(\psi)$, pa prema lemi 18 $v \nVdash \psi$, odnosno $w \nVdash \varphi$. $\Box$

6. Zaključak

Koliko smo se približili cilju utvrđivanja normalnih formi za IL? Naravno, precizan odgovor na to pitanje ovisi o tome koliku slobodu smo spremni tolerirati u strukturi traženih normalnih formi, a i o „mjeri" na skupu svih zatvorenih IL formula, koja bi precizirala koliki dio tog skupa ima „lijepe" normalne forme. Što se tiče strukture, pokušali smo dobiti najbolje što možemo već u GL: booleovsku kombinaciju, odnosno $\to$-kombinaciju, formula oblika $\Box^n\bot$. To je prirodno rezultiralo proučavanjem kada se točno operator $\rhd$ može eliminirati iz formule, odnosno kada je formula lokalno ekvivalentna nekoj GL formuli. Dali smo prilično širok popis slučajeva (tipova formula) za koje je to moguće. Pri tome je zbog lokalne ekvivalencije moguće svaku potformulu uočenog tipa zamijeniti ekvivalentnom GL formulom, koja je obično bitno jednostavnija i omogućuje dalje pojednostavljivanje.

Drugi, generalniji, način za utvrđivanje eventualnih pojednostavljenja, je računanje generaliziranog traga Tr, pomoću kojeg su uostalom i utvrđeni specijalni tipovi formula iz kojih je moguće eliminirati $\rhd$. Kako je generalizirani trag od nekog mjesta nadalje konstantan, u sebi nosi samo konačnu količinu informacije, te je računanje s takvim objektima efektivno provedivo, što pokazuje i *Mathematica* kod. Tako znamo da ćemo uvijek u konačno mnogo koraka znati točno kakav je generalizirani trag dane zatvorene IL formule, i ako je determiniran, znat ćemo da ima normalnu formu. Dobra strana tog pristupa je što ne moramo tražiti nekoliko specijalnih tipova formula, već imamo generalna pravila za računanje. Loša strana je što je kompliciranije (iako nije nemoguće) implementirati zamjenu neke prave potformule determiniranog traga ekvivalentnom, u slučaju da čitava formula nema determiniran trag.

U slučaju da nas zanimaju i globalne ekvivalencije, tu je teorem o generalizaciji, pomoću kojeg možemo svesti potragu za globalno ekvivalentnom formulom formuli φ na potragu za lokalno ekvivalentnom formulom formuli $\Box\varphi$, i time — ako želimo — na računanje $\mathrm{Tr}(\Box\varphi)$, odnosno korištenje bilo koje od metoda za utvrđivanje lokalne ekvivalencije. Tako su dobivena još dva rezultata o eliminaciji $\rhd$, koji se zbog globalne ekvivalentnosti ne mogu direktno koristiti u potformulama, ali mogu biti korisni u prepoznavanju čitave formule.

Je li time pružen zaokružen odgovor bar na pitanje iz kojih zatvorenih IL formula se može eliminirati operator $\rhd$? U jednom smjeru jest, u drugom nažalost nije. Naime, $\mathrm{Tr}(F)_n = 0$ znači da ne znamo ništa o tome vrijedi li F na svjetovima dubine n: može vrijediti na nekima, na svima, ili ni na jednom takvom svijetu. Pri tome je veliki problem što se formule s lijeve i desne strane veznika $\to$ i operatora $\rhd$ tretiraju „nezavisno”, bez uzimanja u obzir dodatne ovisnosti među mogućnostima da vrijede na nekom konkretnom svijetu dubine n. Odnosno, kako dubina uzima u obzir samo relaciju R, jedino što možemo reći o relacijama S_w je ono što možemo deducirati na osnovu aksioma iz onog što znamo o relaciji R: kada u i v sigurno nisu u relaciji S_w (konkretno, ako bar jedan od njih nije R-sljedbenik od w), te kada sigurno jesu u toj relaciji (konkretno, ako vrijedi $w\ R\ u\ \underline{R}\ v$).

Trivijalni primjer: vidjeli smo da formula χ iz točke 5 nema determinirani trag, odnosno postoji n takav da je $\mathrm{Tr}(\chi)_n = 0$. Zapravo se može vidjeti da je svaki $n \geq 2$ takav. Sada je po pravilima za računanje, $\mathrm{Tr}(\chi \to \chi)_2 = 0$, iako je sasvim jasno da $\chi \to \chi$ vrijedi na svim svjetovima (dubine 2, kao i ostalima), jer je to propozicionalna tautologija. Naravno, takvi primjeri se mogu lako eliminirati, ali postoje i kompliciraniji, a nije jasno kako ih eliminirati sve.

Jedna od strategija za rješavanje problema poput onog u prethodnom odlomku je: uzeti finiju podjelu svjetova u Veltmanovim modelima, ne samo po dubini, već i po nekim drugim parametrima koji uzimaju u obzir strukturu relacija S_w. Nažalost, analogni pojam dubine nema smisla, jer relacije S_w^{-1} ne moraju biti dobro utemeljene. Svakako želimo da kriterij podjele reflektira modalnu ekvivalenciju svjetova, no za razliku od GL, gdje je dubina bila dostatna za to, u IL se ne nazire neki jednostavni strukturalni kriterij.

To ima uske veze s činjenicom da je S zapravo ternarna relacija, i kao takva kompliciranija za proučavanje, a čak i njene „projekcije”

S_w su tek *predurećaji* na skupovima $W[w]$. Dakle, trebalo bi definirati kvocijentni skup od $W[w]$ s obzirom na relaciju $S_w \cap S_w^{-1}$, koja jest relacija ekvivalencije na njemu, i tek tada bismo dobili refleksivni parcijalni uređaj na klasama — koji, kao što smo rekli, ne mora biti inverzno dobro utemeljen. To znači da bismo umjesto preslikavanja u klasu ordinala morali imati preslikavanje u puno siromašniju strukturu, čime bismo izgubili mnoge pomoćne tvrdnje koje bi nam trebale pomoći u karakterizaciji modalne ekvivalencije.

Međutim, dodatni principi interpretabilnosti mogu dovoljno „uljepšati" svojstva od S_w, bar u odnosu na relaciju R, tako da operator $\rhd$ bude eliminabilan u potpunosti, i dobijemo istu normalnu formu kao za GL. Poznati primjer je ILF, logika interpretabilnosti proširena Fefermanovim principom

$$(A \rhd \Diamond A) \to \Box\neg A\,,$$

čije modele karakterizira dodatni uvjet da su relacije $(S_w \circ R)^{-1}$ dobro utemeljene za svaki $w \in W$. To je dovoljno za eliminaciju $\rhd$ iz svih zatvorenih IL formula, što je pokazano u [**13**].

Dio 3

Bisimulacije i igre

POGLAVLJE 4

Bisimulacije i modalna ekvivalencija

1. Modalna dubina i ekvivalencija

U poglavlju o kratkim normalnim formama za GL smo definirali pojam modalne dubine za GL. Slično možemo definirati i za IL.

DEFINICIJA 55. Modalna dubina je preslikavanje δ sa skupa svih IL formula u $\mathbb{N}$, definirano induktivno:

- $\delta(\bot) := 0$
- $\delta(p) := 0$, za sve $p \in Prop$
- $\delta(\varphi \to \psi) := \max\big\{\delta(\varphi), \delta(\psi)\big\}$
- $\delta(\varphi \rhd \psi) := 1 + \max\big\{\delta(\varphi), \delta(\psi)\big\}$

Lako je vidjeti da se na GL formulama ta definicija podudara s prijašnjom: jedino što treba provjeriti je $\delta(\Box\varphi) = \delta(\neg\varphi \rhd \bot) = 1 + \max\big\{\delta(\neg\varphi), \delta(\bot)\big\} = 1 + \delta(\neg\varphi)$, što je jednako $1 + \delta(\varphi)$ jer je općenito $\delta(\psi \to \bot) = \max\big\{\delta(\psi), \delta(\bot)\big\} = \delta(\psi)$.

DEFINICIJA 56. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Veltmanova modela (skupove svjetova im obično smatramo disjunktnima), te w i w' svjetovi u njima (to će uvijek ubuduće značiti da je w svijet u $\mathfrak{M}$, a w' svijet u $\mathfrak{M}'$). Za IL formulu φ kažemo da se w i w' *slažu na* φ ako vrijedi: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$.

Kažemo da su w i w' *modalno ekvivalentni*, i pišemo $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$, ako se slažu na svim IL formulama. Za $n \in \mathbb{N}$, kažemo da su w i w' *modalno n-ekvivalentni*, i pišemo $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$, ako se slažu na svim IL formulama čija je modalna dubina najviše n. Kažemo da su w i w' *propozicionalno ekvivalentni* ako se slažu na svim propozicionalnim varijablama.

PROPOZICIJA 57. *Svjetovi su modalno* 0*-ekvivalentni ako i samo ako su propozicionalno ekvivalentni.*

DOKAZ. Kako je svaka propozicionalna varijabla ujedno i IL formula modalne dubine 0, smjer slijeva nadesno je jasan. Za drugi smjer, označimo svjetove s w i w'. Primijetimo da je svaka IL formula modalne dubine 0: ili $\bot$, ili propozicionalna varijabla, ili $\varphi \to \psi$, gdje su

φ i ψ jednostavnije takve formule. Kako se svjetovi po uvjetu slažu na propozicionalnim varijablama, i uvijek se slažu na $\perp$ jer $\perp$ nigdje ne vrijedi, treba samo dokazati da se slažu na $\varphi \to \psi$ ako se slažu na φ i ψ. No to slijedi direktno iz definicije: $w \Vdash \varphi \to \psi$ ako i samo ako $w \nVdash \varphi$ ili $w \Vdash \psi$, što je po pretpostavci ako i samo ako $w' \nVdash \varphi$ ili $w' \Vdash \psi$, što vrijedi ako i samo ako $w' \Vdash \varphi \to \psi$. $\square$

Važan teorem je da, u slučaju konačnog skupa *Prop*, do na ekvivalenciju, postoji samo konačno mnogo IL formula do bilo koje fiksne modalne dubine. Preciznije, ako za konačan skup IL formula S definiramo $IL_0(S)$ kao skup svih savršenih disjunktivnih normalnih formi booleovskih kombinacija formula iz S:

$$IL_0(S) := \left\{ \bigvee_{\psi \in T'} \psi \ : \ T' \subseteq \Big\{ \bigwedge_{\varphi \in T} \varphi \wedge \bigwedge_{\varphi \in S \setminus T} \neg\varphi \ : \ T \subseteq S \Big\} \right\},$$

(uz uobičajene konvencije $\bigwedge \emptyset = \top$, $\bigvee \emptyset = \perp$, te već definirane $\wedge$, $\vee$, $\top$ i $\neg$ kao pokrate pomoću $\to$ i $\perp$) te za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$IL_{n+1}(S) := IL_0\Big(IL_n(S) \cup \big\{ \varphi \rhd \psi \ : \ \varphi, \psi \in IL_n(S) \big\} \Big),$$

tada za svaku IL formulu φ postoji njoj ekvivalentna formula u konačnom skupu $IL_{\delta(\varphi)}\big(Var(\varphi)\big)$, gdje smo s $Var(\varphi)$ označili (konačan) skup svih propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u φ.

2. Bisimulacije

Pojam bisimulacije vrlo je važan. Visser je u [**20**] definirao bisimulacije Veltmanovih modela. Razne primjene bisimulacija mogu se vidjeti u literaturi [**20, 21, 6, 23**].

Definicija 58. *Bisimulacija* između dva Veltmanova modela, $\mathfrak{M} = (W, R, S, \Vdash)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', S', \Vdash')$, je relacija $Z \subseteq W \times W'$ koja ima sljedeća svojstva:

(at) za sve $(w, w') \in Z$, w i w' su propozicionalno ekvivalentni

(forth) kad god je $w \ Z \ w'$ i $w \ R \ u$, postoji u' sa svojstvima:
- (1) $u \ Z \ u'$
- (2) $w' \ R' \ u'$
- (3) kad god je $u' \ S'_{w'} \ v'$, postoji v takav da je $v \ Z \ v'$ i $u \ S_w \ v$

(back) kad god je $w \ Z \ w'$ i $w' \ R' \ u'$, postoji u sa svojstvima:
- (1) $u \ Z \ u'$
- (2) $w \ R \ u$
- (3) kad god je $u \ S_w \ v$, postoji v' takav da je $v \ Z \ v'$ i $u' \ S'_{w'} \ v'$

Kažemo da su $w \in W$ i $w' \in W'$ *bisimulirani*, i pišemo $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows \mathfrak{M}', w'$, ako postoji bisimulacija Z između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ takva da je $w\ Z\ w'$.

Relativno lako se pokaže (vidjeti na primjer [**22**] za precizni iskaz i dokaz) da su identiteta, inverz neke bisimulacije, kompozicija neke dvije bisimulacije, te unija proizvoljne familije bisimulacija ponovo bisimulacije. Iz posljednjeg svojstva slijedi da za svaka dva Veltmanova modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ postoji najveća bisimulacija između njih — to je jednostavno unija svih bisimulacija između ta dva modela.

Definicija 59. Neka je n prirodan broj, te $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Veltmanova modela. *n-bisimulacija* između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ je padajući konačni niz relacijâ $Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$, koji ima sljedeća svojstva:

(at) za sve $(w, w') \in Z_0$, w i w' su propozicionalno ekvivalentni

(forth) kad god je $1 \leq i \leq n$, te $w\ Z_i\ w'$ i $w\ R\ u$, postoji u' sa svojstvima:
- (1) $u\ Z_{i-1}\ u'$
- (2) $w'\ R'\ u'$
- (3) kad god je $u'\ S'_{w'}\ v'$, postoji v takav da je $v\ Z_{i-1}\ v'$ i $u\ S_w\ v$

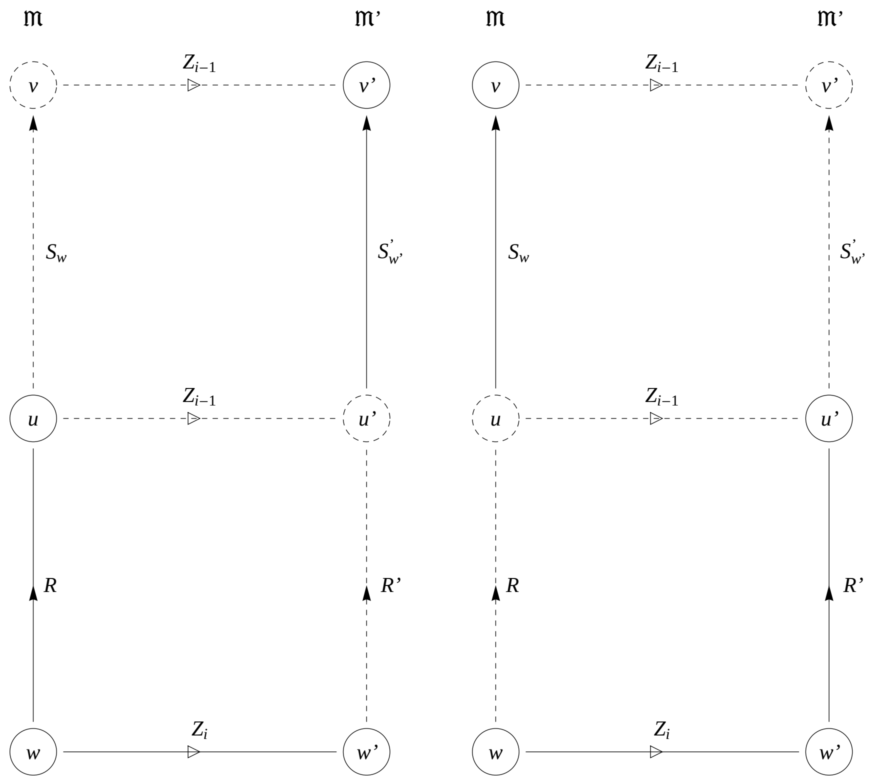
(back) kad god je $1 \leq i \leq n$, te $w\ Z_i\ w'$ i $w'\ R'\ u'$, postoji u sa svojstvima:
- (1) $u\ Z_{i-1}\ u'$
- (2) $w\ R\ u$
- (3) kad god je $u\ S_w\ v$, postoji v' takav da je $v\ Z_{i-1}\ v'$ i $u'\ S'_{w'}\ v'$

Kažemo da su $w \in W$ i $w' \in W'$ *n-bisimulirani*, i pišemo $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows_n \mathfrak{M}', w'$, ako postoji n-bisimulacija $Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \cdots \supseteq Z_n$ između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ takva da je $w\ Z_n\ w'$.

Primijetimo da je svojstvo (back) isto kao svojstvo (forth), samo sa zamijenjenim $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

Bisimulacije i n-bisimulacije se mogu definirati i za Veltmanove okvire umjesto modela, brišući svojstvo (at). To znači da kod n-bisimulacija nemamo nikakvih uvjeta na Z_0, osim da bude nadskup od Z_1, pa možemo bez smanjenja općenitosti uzeti $Z_0 := W \times W'$. Zato je za n-bisimulacije okvira dovoljno zadati n relacija umjesto njih $n + 1$.

Također, uobičajene definicije bisimulacije i n-bisimulacije za GL strukture odnosno okvire dobiju se iz gornjih, brisanjem uvjeta koji spominju relacije S_w i $S'_{w'}$. Na primjer, bisimulacija dva GL okvira



SLIKA 3.1. Grafički prikaz svojstava (forth) i (back) za n-bisimulacije. Svojstva za bisimulacije se dobiju zanemarivanjem indeksa: umjesto Z_i i Z_{i-1} piše samo Z.

$\mathfrak{N} = (W, R)$ i $\mathfrak{N}' = (W', R')$ je relacija $Z \subseteq W \times W'$, koja ima sljedeća dva svojstva:

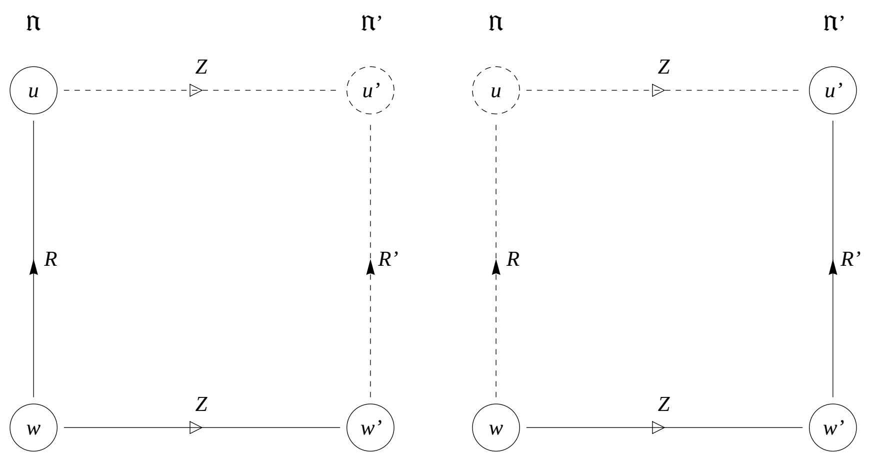
(K-forth) Kad god je $w\ Z\ w'$ i $w\ R\ v$, postoji v' takav da je $v\ Z\ v'$ i $w'\ R'\ v'$.

(K-back) Kad god je $w\ Z\ w'$ i $w'\ R'\ v'$, postoji v takav da je $v\ Z\ v'$ i $w\ R\ v$.

3. Neke veze bisimuliranosti i modalne ekvivalentnosti

Lako se dokaže, jer su definicije n-bisimulacija tako „namještene”, da n-bisimuliranost svjetova povlači njihovu modalnu n-ekvivalenciju. Za logike poput GL s isključivo unarnim modalnim operatorima, to je posljedica poznatog rezultata o bisimulacijskoj invarijantnosti, vidjeti na primjer [**10**]. Zato dokazujemo samo rezultat za IL.

LEMA 60. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ Veltmanovi modeli, te w i w' svjetovi u njima. Tada $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows_n \mathfrak{M}', w'$ povlači $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$.*



SLIKA 3.2. Grafički prikaz svojstava (K-forth) i (K-back) za bisimulacije GL okvira odnosno struktura.

DOKAZ. Fiksirajmo modele $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, i indukcijom po formuli φ dokažimo da se svi $\delta(\varphi)$-bisimulirani svjetovi u tim modelima slažu na φ. Na $\perp$ se slažu svi svjetovi, jer $\perp$ nikada ne vrijedi. Također, svi 0-bisimulirani svjetovi se slažu na svim propozicionalnim varijablama, po svojstvu (at).

Neka je $\varphi = (\psi \to \xi)$, modalne dubine n, i $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows_n \mathfrak{M}', w'$. Ovo posljednje znači da postoji padajući niz $Z_0 \supseteq Z_1 \supseteq \cdots \supseteq Z_n$, sa svojstvima (at), (forth) i (back), takav da je $w \; Z_n \; w'$. Kako je $\delta(\psi) \leq \delta(\varphi) = n$, zaključujemo da je $Z_{\delta(\psi)} \supseteq Z_n$, pa su w i w' ujedno i $\delta(\psi)$-bisimulirani (samo „odrežemo” prvih $\delta(\psi)+1$ relacija). Po pretpostavci indukcije zaključujemo da se w i w' slažu na ψ. Jednako tako, jer je i $\delta(\xi) \leq n$, w i w' se slažu na ξ. Ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, to znači da $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$ ili $\mathfrak{M}, w \Vdash \xi$. U prvom slučaju $\mathfrak{M}', w' \nVdash \psi$ jer se w i w' slažu na ψ, a u drugom vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \xi$, jer se slažu na ξ. To znači da u svakom slučaju vrijedi $\mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$. Obrnuti smjer se dokaže potpuno jednako, zamjenom $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

Preostao je još slučaj $\varphi = (\psi \rhd \xi)$. Označimo $n := \delta(\varphi) = 1 + \max\{\delta(\psi), \delta(\xi)\}$, i neka je $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows_n \mathfrak{M}', w'$. Kao i za slučaj kondicionala, dovoljno je dokazati jedan smjer, drugi se dobije zamjenom $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Dakle, neka vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, te neka je $Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_0$ n-bisimulacija između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$, takva da je $w \; Z_n \; w'$. Trebamo dokazati $\mathfrak{M}', w' \Vdash \psi \rhd \xi$.

Primijetimo da iz $n - 1 = \max\{\delta(\psi), \delta(\xi)\} \geq \delta(\psi)$ slijedi da se svi svjetovi koji su u relaciji Z_{n-1} nalaze i u relaciji $Z_{\delta(\psi)}$. To znači da su oni $\delta(\psi)$-bisimulirani (opet, samo „odrežemo” $(n-1)$-bisimulaciju na tom mjestu), pa se po pretpostavci indukcije slažu na ψ. Isto vrijedi i za formulu ξ.

Neka je u' proizvoljni R'-sljedbenik od w' na kojem vrijedi ψ (ako takav ne postoji, trivijalno je ispunjeno $\mathfrak{M}', w' \Vdash \psi \rhd \xi$). Prema svojstvu (back), postoji u takav da je $w\ R\ u$, $u\ Z_{n-1}\ u'$, te za sve v takve da je $u\ S_w\ v$ postoji v' takav da je $v\ Z_{n-1}\ v'$ i $u'\ S'_{w'}\ v'$. Sada iz $u\ Z_{n-1}\ u'$ i $\delta(\psi) \leq n-1$ slijedi da su u i u' $\delta(\psi)$-bisimulirani, pa se moraju slagati na ψ. Kako na u' vrijedi ψ po pretpostavci, mora vrijediti i na u. Sada iz činjenice da na w vrijedi $\psi \rhd \xi$, i da je u sljedbenik od w na kojem vrijedi ψ, slijedi da postoji v takav da je $u\ S_w\ v$ i $\mathfrak{M}, v \Vdash \xi$. Za taj v dakle postoji v' koji je s njim $(n-1)$-bisimuliran, pa stoga i $\delta(\xi)$-bisimuliran, takav da je $u'\ S'_{w'}\ v'$. No v i v' se moraju slagati na ξ, pa zaključujemo da vrijedi $\mathfrak{M}', v' \Vdash \xi$. Dakle, našli smo $S'_{w'}$-sljedbenik od u' na kojem vrijedi ξ. Kako je u' bio proizvoljni R'-sljedbenik od w' na kojem vrijedi ψ, zaključujemo $\mathfrak{M}', w' \Vdash \psi \rhd \xi$. □

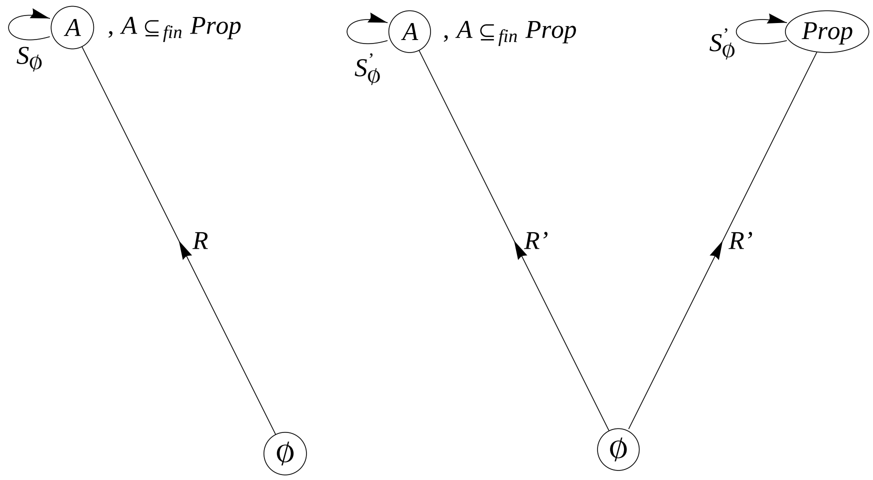
KOROLAR 61. *Uz oznake kao u lemi 60,* $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows M', w'$ *povlači* $\mathfrak{M}, w \equiv M', w'$.

DOKAZ. Lako je vidjeti da bisimuliranost povlači n-bisimuliranost za svaki n: ako imamo bisimulaciju Z, samo definiramo $Z_i := Z$, za sve i od 0 do n. Ako je sada φ proizvoljna IL formula, $\mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{M}', w'$ su $\delta(\varphi)$-bisimulirani, pa su prema lemi 60 i $\delta(\varphi)$-ekvivalentni, odnosno slažu se na φ. Kako je φ bila proizvoljna formula, zaključujemo da su $\mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{M}', w'$ modalno ekvivalentni. □

Prirodno je pitati se: što je s obratima gornjih rezultata? Postoji Hennessy-Milnerov teorem, koji kaže da u slučaju *slikovno konačnih* Kripkeovih modela (onih kod kojih svaki svijet ima samo konačno mnogo sljedbenika), modalna ekvivalentnost povlači bisimuliranost. U [**6**] je dokazano da analogni teorem vrijedi za Veltmanove modele.

Bisimuliranost svjetova se odnosi na međusobno „oponašanje" veza u jednom modelu vezama u drugom, te ekvivalenciju na svim propozicionalnim varijablama na krajevima tih veza. Kako se u svakoj formuli javlja samo konačno mnogo propozicionalnih varijabli, dok svih propozicionalnih varijabli može biti beskonačno, to razmišljanje nas vodi do sljedećeg primjera.

PRIMJER 62. Neka je *Prop* beskonačan skup. Definiramo W kao skup svih konačnih podskupova od *Prop*, dok W' definiramo kao disjunktnu uniju $W \dot\cup \{Prop\}$ (unija je doista disjunktna jer *Prop* nije konačan). Definiramo relaciju R kao $\{\emptyset\} \times (W \setminus \{\emptyset\})$, te analogno R' kao $\{\emptyset\} \times (W' \setminus \{\emptyset\})$ — dakle, $\emptyset$ je korijen u oba modela, dubine 1, a svi ostali svjetovi su terminalni. Relacije S_w i S'_w definiramo kao minimalne moguće, dakle kao prazne relacije za sve svjetove osim korijena,



SLIKA 3.3. Grafički prikaz Veltmanovih okvira nad kojima su izgrađeni modeli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$.

te $S_\emptyset$ kao identitetu na $W \setminus \{\emptyset\}$ (i $S'_\emptyset$ kao identitetu na $W' \setminus \{\emptyset\}$). Relaciju $\Vdash$ (i analnogno $\Vdash'$) za propozicionalne varijable definiramo kao $\ni$: dakle, za $p \in Prop$, $w \Vdash p$ znači $p \in w$.

Ako sada definiramo $\mathfrak{M} := (W, R, S, \Vdash)$ i $\mathfrak{M}' := (W', R', S', \Vdash')$, lako vidimo da propozicionalna ekvivalentnost po aksiomu ekstenzionalnosti znači jednakost svjetova kao skupova propozicionalnih varijabli, te ne postoji svijet $v \in W$ koji bi bio propozicionalno ekvivalentan svijetu $Prop \in W'$. Kad bi postojala 1-bisimulacija $Z_1 \subseteq Z_0$ između $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ takva da je $\emptyset\ Z_1\ \emptyset$, po svojstvu (back) bi zbog $\emptyset\ R'\ Prop$ trebao postojati $v \in W$ s tri svojstva, jedno od kojih bi bilo $v\ Z_0\ Prop$ — što je nemoguće jer bi to značilo da moraju biti propozicionalno ekvivalentni.

Dakle, zaključujemo da korijeni modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ nisu 1-bisimulirani, pa sigurno nisu ni bisimulirani. Ipak, oni su modalno ekvivalentni (pa specijalno i modalno 1-ekvivalentni), što se najlakše vidi na sljedeći način: fiksiramo proizvoljnu IL formulu φ, i skup svih propozicionalnih varijabli koje se u njoj javljaju označimo s $Var(\varphi)$. Tada je φ formula sustava IL, ali je jednako tako i formula sustava IL$'$ koji je izgrađen nad skupom propozicionalnih varijabli $Prop' := Var(\varphi)$[1]. Gledano iz perspektive logike IL$'$, svjetovi $\emptyset$ u $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ *jesu* bisimulirani: bisimulacija je zadana s

$$u\ Z\ v :\Longleftrightarrow u = v = \emptyset \vee (u \neq \emptyset \wedge v \neq \emptyset \wedge u \cap Prop' = v \cap Prop')\ .$$

[1]Strogo govoreći, za dalji dokaz je bitno da je $Prop'$ neprazan, no ako je φ zatvorena, uvijek možemo uzeti neku propozicionalnu varijablu $p_0 \in Prop$ i naći formulu φ' ekvivalentnu s φ takvu da je $Var(\varphi') = \{p_0\} \neq \emptyset$; na primjer, $\varphi' := (p_0 \to p_0) \to \varphi$.

Trivijalno je $\emptyset\ Z\ \emptyset$, svi svjetovi u Z se slažu na svim varijablama iz $Prop'$ po definiciji, a svojstvo (forth) je jasno: samo uzmemo isti svijet u $\mathfrak{M}'$ kao u $\mathfrak{M}$. Jedino kod provjere svojstva (back), treba nam svijet u W koji će biti bisimuliran s $Prop \in W'$, no $Prop'$ kao konačni podskup od $Prop$ očito zadovoljava taj uvjet. Ovo se može detaljnije raspisati pomoću igara i tehnike prijelaza s GL struktura na Veltmanove modele, koju ćemo uskoro objasniti.

To znači da su prema korolaru 61 $\mathfrak{M}, \emptyset$ i $\mathfrak{M}', \emptyset$ IL$'$-modalno ekvivalentni, odnosno slažu se na svim formulama logike IL$'$, pa specijalno i na φ. Kako je φ proizvoljna IL formula, zaključujemo da su $\mathfrak{M}, \emptyset$ i $\mathfrak{M}', \emptyset$ modalno ekvivalentni i u logici IL. Dakle, u slučaju beskonačno mnogo propozicionalnih varijabli, niti modalna n-ekvivalencija povlači n-bisimuliranost, niti modalna ekvivalencija povlači bisimuliranost — štoviše, modalna ekvivalencija (za sve formule) ne povlači n-bisimuliranost ni za koji n osim 0, što mora po propoziciji 57.

4. Slučaj konačnog skupa *Prop*

No u slučaju konačnog skupa propozicionalnih varijabli, vrijedi bar djelomični obrat. Prvo dokažimo jednu tehničku lemu.

LEMA 63. *Neka je skup Prop konačan, te $n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \not\equiv_n \mathfrak{M}', w'$, tada postoji $\varphi \in IL_n(Prop)$ takva da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ i $\mathfrak{M}', w' \nVdash \varphi$.*

DOKAZ. Pretpostavka leme znači da postoji IL formula ψ modalne dubine manje ili jednake n na kojoj se $\mathfrak{M}, w$ i $\mathfrak{M}', w'$ ne slažu. Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$ i $\mathfrak{M}', w' \nVdash \psi$, stavimo $\xi := \psi$, inače (ako ψ vrijedi na w' a ne na w) stavimo $\xi := \neg\psi$. Očito je $\delta(\xi) = \delta(\psi) \leq n$. Tako dobivamo formulu modalne dubine najviše n takvu da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \xi$ i $\mathfrak{M}', w' \nVdash \xi$.

Kako je $Prop$ konačan skup, možemo definirati formulu

$$\eta := \left(\xi \wedge \bigwedge_{p \in Prop} (p \to p) \right).$$

Očito je η ekvivalentna s ξ, dakle vrijedi na w a ne vrijedi na w', te je $Var(\eta) = Prop$ i $\delta(\eta) = \delta(\xi)$.

Koristeći formulu η možemo definirati njoj ekvivalentnu formulu $\nu := (\Box^n \top \to \eta)$. Formula $\Box^n \top$ je zatvorena, pa je $Var(\nu) = Var(\eta) = Prop$, a kako je $\delta(\eta) \leq n$, imamo $\delta(\nu) = \delta(\Box^n \top) = n$. To znači da formula ν ima ekvivalentnu formulu φ u skupu $IL_{\delta(\nu)}\big(Var(\nu)\big) = IL_n(Prop)$, koja je ekvivalentna formuli ξ, pa vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ i $\mathfrak{M}', w' \nVdash \varphi$. $\square$

TEOREM 64. *Ako je Prop konačan, te $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ dva Veltmanova modela sa svjetovima $w \in W$ i $w' \in W'$ u njima, te n prirodan broj, tada $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$ povlači $\mathfrak{M}, w \rightleftarrows_n \mathfrak{M}', w'$.*

DOKAZ. Za svaki i od 0 do n, definiramo Z_i kao relaciju $\equiv_i$ između svjetova u $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Precizno,

$$Z_i := \{(x, x') \in W \times W' : \mathfrak{M}, x \equiv_i \mathfrak{M}', x'\}.$$

Tada je prema uvjetu teorema $w\ Z_n\ w'$, te svojstvo (at) vrijedi prema propoziciji 57. Također je jasno iz „kumulativne" definicije modalne n-ekvivalencije (slaganje na svim formulama modalne dubine *do* n) da relacije Z_i tvore padajući niz. Dakle, jedino je preostalo provjeriti svojstva (forth) i (back), a zbog simetrije je dovoljno samo jedno od njih. Dokazujemo (forth). Pri tome će ključno biti ono što smo napisali na kraju točke o modalnoj dubini, da su skupovi $IL_n(Prop)$ konačni za sve $n \in \mathbb{N}$. Do kraja dokaza ne pišemo modele $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ — podrazumijevamo da su svjetovi i skupovi svjetova označeni crticama u $\mathfrak{M}'$, a ostali u $\mathfrak{M}$.

Neka je $v\ Z_{i+1}\ v'$ za $i < n$, te neka je $v\ R\ u$. Rastavimo skup $W'[v']$ na dva dijela, s obzirom na i-ekvivalentnost s u:

$$N' := \{u' \in W'[v'] : u' \equiv_i u\}, \quad \text{te} \quad N'' := \{u' \in W'[v'] : u' \not\equiv_i u\}.$$

Za svaki svijet $u' \in N''$, zbog $u' \not\equiv_i u$ po lemi 63 postoji formula $\varphi_{u'} \in IL_i(Prop)$ takva da vrijedi $u \Vdash \varphi_{u'}$ i $u' \nVdash \varphi_{u'}$. Skup $\{\varphi_{u'} : u' \in N''\}$ je konačan kao podskup konačnog skupa $IL_i(Prop)$, pa možemo definirati formulu φ kao konjunkciju svih formula u tom skupu (uz standardnu konvenciju da je $\varphi = \top$ ako je $N'' = \emptyset$). Tada je jasno po definiciji konjunkcije da formula φ vrijedi na u, te ne vrijedi ni na kojem svijetu $u' \in N''$ — jer na svakom takvom u' bar jedan konjunkt ne vrijedi.

Po definiciji skupa N', za dokazati (forth) dovoljno je vidjeti da postoji $u' \in N'$ takav da za svaki z' sa svojstvom $u'\ S'_{v'}\ z'$ postoji z sa svojstvom $u\ S_v\ z$ koji mu je i-ekvivalentan. Skup mogućih kandidata za z, odnosno svih S_v-sljedbenika od u, označimo s N. Pretpostavimo suprotno: da za svaki $u' \in N'$ postoji njegov $S'_{v'}$-sljedbenik $z'_{u'}$, takav da za sve $z \in N$ postoji (prema lemi 63) formula $\psi_{z,u'} \in IL_i(Prop)$ sa svojstvom $z \Vdash \psi_{z,u'}$, te $z'_{u'} \nVdash \psi_{z,u'}$.

Za svaki $u' \in N'$, skup $\{\psi_{z,u'} : z \in N\}$ je konačan kao podskup od $IL_i(Prop)$, pa možemo definirati $\psi_{u'}$ kao disjunkciju svih formula u tom skupu (uz konvenciju da je disjunkcija praznog skupa $\bot$). Kao gore, sada možemo zaključiti da za svaki takav u', na svijetu $z'_{u'}$ ne vrijedi $\psi_{u'}$ (jer ne vrijedi nijedan disjunkt), dok ta formula vrijedi na svim svjetovima $z \in N$ (jer vrijedi disjunkt koji odgovara tom svijetu).

Štoviše, budući da svjetovi u N ne ovise o u', na svima njima vrijede sve formule $\psi_{u'}$, za $u' \in N'$. Koliko najviše takvih može biti? Svakako konačno mnogo — ako u nekom konačnom skupu ima m formula, svih disjunkcija — do na ekvivalenciju — koje možemo napraviti od tih formula nema više nego podskupova tog skupa, dakle 2^m (svaka formula može biti ili ne biti uključena u disjunkciju). To znači da možemo stvoriti formulu ψ kao konjunkciju svih formula $\psi_{u'}$, i ta formula će vrijediti na svim svjetovima iz N, a neće vrijediti ni na kojem $z'_{u'}$ (jer, opet, neće vrijediti konjunkt $\psi_{u'}$). Lako se vidi, s obzirom na to da konjunkcije i disjunkcije ne mogu povećati modalnu dubinu, da je $\delta(\psi) \leq i$.

Promotrimo sada formulu $\varphi \rhd \neg\psi$. Njena modalna dubina je očito $\delta(\varphi \rhd \neg\psi) = 1 + \max\{\delta(\varphi), \delta(\psi)\} \leq i + 1$. Kako smo krenuli od $v \; Z_{i+1} \; v'$, odnosno $v \equiv_{i+1} v'$, svjetovi v i v' morali bi se slagati na toj formuli. No je li doista tako?

Prvo, vidjeli smo da je u R-sljedbenik od v na kojem vrijedi φ. Kad bi bilo $v \Vdash \varphi \rhd \neg\psi$, morao bi postojati z takav da je $u \; S_v \; z$, te da na z vrijedi $\neg\psi$. No $u \; S_v \; z$ znači da je $z \in N$, a vidjeli smo da na svima njima vrijedi ψ. To je kontradikcija, pa zaključujemo $v \nVdash \varphi \rhd \neg\psi$.

S druge strane, uzmimo proizvoljni u', R'-sljedbenik od v' na kojem vrijedi φ. Kako je $u' \in W'[v'] = N' \cup N''$, a vidjeli smo da ni na kojem svijetu iz N'' ne vrijedi φ, zaključujemo da mora biti $u' \in N'$. No tada postoji svijet $z'_{u'}$ koji je $S'_{v'}$-sljedbenik od u', na kojem, kao što smo vidjeli, ne vrijedi ψ. To znači da $z'_{u'} \Vdash \neg\psi$, te zbog proizvoljnosti od u' zaključujemo $v' \Vdash \varphi \rhd \neg\psi$.

Došli smo do kontradikcije, što dokazuje svojstvo (forth), a time i tvrdnju teorema. $\square$

POGLAVLJE 5

Bisimulacijske konstrukcije

1. Transformacija GL struktura u Veltmanove modele

Preostalo je još vidjeti povlači li modalna ekvivalencija bisimuliranost u Veltmanovim modelima. Za općenite Kripkeove modele znamo da to nije istina, kao što je pokazano na primjer u [**4**]. No kontraprimjer koji je tamo naveden ne može poslužiti ni kao GL struktura, jer jedan model ima beskonačnu granu takvu da relacija R^{-1} nije dobro utemeljena. Ipak, pokazat ćemo da se i za GL strukture (zapravo okvire, jer nećemo koristiti propozicionalne varijable) može naći kontraprimjer, a onda će prema rezultatima iz ove točke slijediti da postoji kontraprimjer i za Veltmanove okvire odnosno modele.

Ovdje ćemo vidjeti kako pretvoriti GL strukturu u Veltmanov model nad istim skupom $Prop$, tako da bisimulacije ostanu sačuvane. Za relaciju R na skupu W, koristimo oznaku $\underline{R}$ za njeno refleksivno zatvorenje na W; dakle, za $u, v \in W$, $u \; \underline{R} \; v$ znači $u \; R \; v$ ili $u = v$.

Definicija 65. Neka je $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$ GL struktura. Za svaki $w \in W$ definiramo

$$u \; S_w^R \; v :\Longleftrightarrow w \; R \; u \; \underline{R} \; v$$

(odnosno, relacija S_w^R je upravo refleksivno zatvorenje od R na skupu sljedbenika od w). Označavamo $Vel\,\mathfrak{N} := (W, R, S^R, \Vdash)$.

Ako je $\mathfrak{N} = (W, R)$ GL okvir, označavamo $Vel\,\mathfrak{N} := (W, R, S^R)$.

Propozicija 66. *Za svaku GL strukturu $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$, $Vel\,N$ je Veltmanov model. Štoviše, relacije S_w^R su* najmanje *relacije S_w takve da je $(W, R, S, \Vdash)$ Veltmanov model.*

Dokaz. Za prvi dio, jedino treba dokazati da je relacija $\underline{R}$ na skupu $W[w]$ tranzitivna — refleksivnost i svojstvo $w \; R \; u \; R \; v \Longrightarrow u \; S_w \; v$ slijede po definiciji. Ako je $w \; R \; u \; \underline{R} \; v \; \underline{R} \; z$, lako vidimo raspisivanjem 4 slučaja da vrijedi $u \; \underline{R} \; z$.

Za drugi dio, neka je $(W, R, S, \Vdash)$ Veltmanov model. Tvrdimo da za svaki $w \in W$ vrijedi $S_w \supseteq S_w^R$. Neka je $u \; S_w^R \; v$, odnosno $w \; R \; u \; \underline{R} \; v$. Imamo dva slučaja. Ako je $w \; R \; u \; R \; v$, mora vrijediti $u \; S_w \; v$ po definiciji Veltmanovog modela. Ako je pak $w \; R \; u = v$, tada vrijedi

$u\ S_w\ v$, odnosno $u\ S_w\ u$, po refleksivnosti relacije S_w na sljedbenicima od w. □

KOROLAR 67. *Za svaki GL okvir* $\mathfrak{N} = (W, R)$, $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}$ *je Veltmanov okvir. Štoviše,* S_w^R *su najmanje relacije* S_w *takve da je* (W, R, S) *Veltmanov okvir.*

LEMA 68. *Neka su* $\mathfrak{N}$ *i* $\mathfrak{N}'$ *dvije GL strukture, te* w *i* w' *svjetovi u njima. Tada vrijedi*

$$\mathfrak{N}, w \rightleftarrows \mathfrak{N}', w' \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathit{Vel}\,\mathfrak{N}, w \rightleftarrows \mathit{Vel}\,\mathfrak{N}', w' \;.$$

DOKAZ. Smjer zdesna nalijevo je očit: ako imamo bisimulaciju Z između $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}$ i $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}'$ takvu da je $w\ Z\ w'$, lako se vidi, ne čitajući dijelove definicije koji se odnose na relacije S_w, da je ista relacija Z ujedno i bisimulacija između $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$.

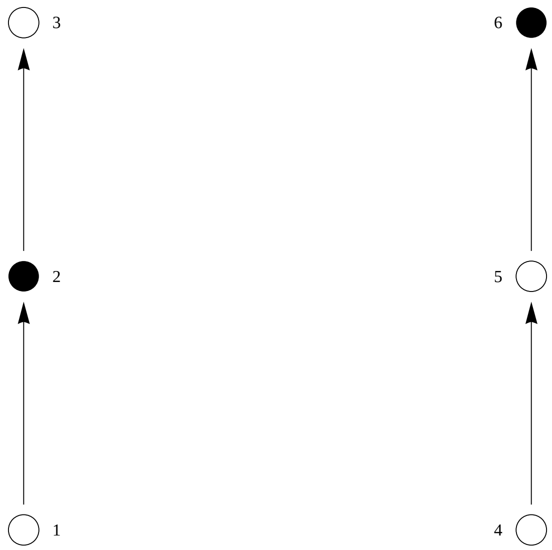
Za drugi smjer, neka je Z bisimulacija između $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ takva da je $w\ Z\ w'$. Tvrdimo da je Z također bisimulacija između $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}$ i $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}'$. Dakle, imamo svojstva (at), (K-forth) i (K-back), a trebamo dokazati (forth) i (back). Primijetimo da je svojstvo (at) isto za bisimulacije GL struktura i Veltmanovih modela. Dokazujemo (forth), nakon toga je dokaz svojstva (back) analogan.

Neka je $w\ Z\ w'$ i $w\ R\ u$. Po svojstvu (K-forth), postoji u' takav da je $w'\ R'\ u'$ i $u\ Z\ u'$. Sada neka je v' takav da vrijedi $u'\ S_{w'}^{R'}\ v'$. Po definiciji 65, to znači $u'\ \underline{R}'\ v'$, dakle $u' = v'$ ili $u'\ R'\ v'$. U prvom slučaju možemo staviti $v := u$, pa iz $u\ Z\ u'$ imamo $v\ Z\ v'$. Također vrijedi $w\ R\ u\ \underline{R}\ v$, pa je $u\ S_w^R$.

U drugom slučaju, imamo $u\ Z\ u'$ i $u'\ R'\ v'$. Sada prema svojstvu (K-back) postoji v takav da je $v\ Z\ v'$ i $u\ R\ v$, što povlači $u\ \underline{R}\ v$, dakle $u\ S_w^R\ v$. U svakom slučaju smo dakle našli v s traženim svojstvima, te zaključujemo da vrijedi (forth). Jednako tako bismo dokazali i (back) — primjenom prvo svojstva (K-back) pa zatim (K-forth) — te zaključujemo da je Z bisimulacija odgovarajućih Veltmanovih modela. Kako otprije imamo $w\ Z\ w'$, zaključujemo $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}, w \rightleftarrows \mathit{Vel}\,\mathfrak{N}', w'$. □

Lako se vidi da smjer zdesna nalijevo u lemi 68 vrijedi i za n-bisimulacije:

PROPOZICIJA 69. *Neka su* $\mathfrak{N}$ *i* $\mathfrak{N}'$ *dvije GL strukture, te* w *i* w' *svjetovi u njima takvi da vrijedi* $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_n \mathit{Vel}\,\mathfrak{N}', w'$. *Tada je i* $\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_n \mathfrak{N}', w'$.



SLIKA 3.1. Grafički prikaz modela $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ iz primjera 70.

DOKAZ. Kao i u dokazu leme 68: ista $(n+1)$-torka relacija koja je bisimulacija između $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{N}$ i $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{N}'$, može poslužiti i kao bisimulacija između $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ (opet, samo čitamo dijelove definicije koji se odnose na relaciju R i propozicionalne varijable). □

Obrat prethodne propozicije ne vrijedi nužno za isti n na lijevoj i na desnoj strani, što se može vidjeti iz sljedećeg primjera.

PRIMJER 70. Neka je $Prop = \{p\}$, $W := \{1,2,3\}$, $W' := \{4,5,6\}$, relacije R i R' restrikcije standardnog uređaja na prirodnim brojevima, te $2 \Vdash p$ i $6 \Vdash' p$ (i p ne vrijedi ni na kojem drugom svijetu). Uz oznake $\mathfrak{N} := (W, R, \Vdash)$ i $\mathfrak{N}' := (W', R', \Vdash')$, vrijedi

$$\mathfrak{N}, 1 \rightleftarrows_1 \mathfrak{N}', 4\ , \qquad \text{ali} \qquad \mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{N}, 1 \not\rightleftarrows_1 \mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{N}', 4\ .$$

Prvi dio možemo pokazati jednostavno navođenjem bisimulacije:

$$Z_1 := \{(1,4)\}\ ,\ Z_0 := \{(1,4),(1,5),(2,6),(3,4),(3,5)\}$$

Primijetimo da je Z_0 upravo relacija propozicionalne ekvivalencije između W i W', pa je svojstvo (at) trivijalno, te je očito $1\ Z_1\ 4$. Jedino još treba provjeriti svojstva (K-forth) i (K-back), no to je jednostavno ispitivanje slučajeva:

(K-forth)	(K-back)
$1\ Z_1\ 4, 1\ R\ 2 : 2\ Z_0\ 6, 4\ R'\ 6$	$1\ Z_1\ 4\ R'\ 5 : 1\ R\ 3\ Z_0\ 5$
$1\ Z_1\ 4, 1\ R\ 3 : 3\ Z_0\ 5, 4\ R'\ 5$	$1\ Z_1\ 4\ R'\ 6 : 1\ R\ 2\ Z_0\ 6$

Za drugi dio, pretpostavimo da imamo 1-bisimulaciju $Z_1 \subseteq Z_0$, sa svojstvima (at), (forth) i (back), te $1\ Z_1\ 4$. Po svojstvu (forth) iz $1\ R\ 3$ slijedi da postoji v' sa svojstvima:

- $4\ R'\ v'$
- $3\ Z_0\ v'$
- za sve u' takve da je $v'\ S_4^{R'}\ u'$ postoji u takav da je $3\ S_1^R\ u$ i $u\ Z_0\ u'$

Iz prvog svojstva je $v' \in \{5, 6\}$, a iz drugog prema svojstvu (at) mora vrijediti $v' \not\Vdash' p$, dakle $v' \in \{4, 5\}$. Dakle, jedino je moguće $v' = 5$. No tada bi zbog $4\ R\ 5\ R\ 6$, odnosno $5\ S_4^{R'}\ 6$, morao postojati u takav da je $3\ S_1^R\ u$ i $u\ Z_0\ 6$. No ovo drugo po svojstvu (at) povlači $u \Vdash p$ odnosno $u = 2$, a $3\ S_1^R\ 2$ bi značilo $3\ R\ 2$, što je kontradikcija.

Navedeni primjer je minimalan, u 3 kriterija. Što se tiče 1-bisimuliranosti, lako se vidi da 0-bisimuliranost kao propozicionalna ekvivalentnost ne ovisi o relacijama između svjetova, pa mora biti ista u $\mathfrak{N}$ i $Vel\,\mathfrak{N}$. Što se tiče broja svjetova, minimalnost pokazuje sljedeća propozicija.

Propozicija 71. *Uz $Prop = \{p\}$, ako je $\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_1 \mathfrak{N}', w'$, ali $Vel\,\mathfrak{N}, w \not\rightleftarrows_1 Vel\,\mathfrak{N}', w'$, tada svaki od modela $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ mora imati bar 3 svijeta.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$ i $\mathfrak{N}' = (W', R', \Vdash')$ imaju tražena svojstva, te da jedan od skupova W i W' ima manje od 3 elementa. Po svojstvu (at) znamo da su w i w' propozicionalno ekvivalentni. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $|W'| \le 2$. To znači da skup $W[w]$ ima najviše 1 element, a mora imati bar 1 — naime, $W[w] = \emptyset = W'[w']$ povlači $Vel\,\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_1 Vel\,\mathfrak{N}', w'$, dok $W[w] = \emptyset \neq W'[w']$ povlači $\mathfrak{N}, w \not\rightleftarrows_1 N', w'$.

Dakle, $W[w] = \{v\}$, i neka na v vrijedi p (slučaj kada na v ne vrijedi p je analogan, samo zamijenimo p i $\neg p$). Ako sada na nekom sljedbeniku od w' ne vrijedi p, lako vidimo da $\mathfrak{N}, w$ i $\mathfrak{N}', w'$ nisu 1-bisimulirani, jer ne vrijedi svojstvo (K-back). Ako pak na svim sljedbenicima od w' vrijedi p, vrijede svojstva (K-forth) i (K-back), ali jednako tako vrijede i svojstva (forth) i (back), jer se preko relacije S_w možemo kretati samo među sljedbenicima od w odnosno w', a svi su oni propozicionalno ekvivalentni jer na svima vrijedi p. Dakle tada su i $Vel\,\mathfrak{N}, w$ i $Vel\,\mathfrak{N}', w'$ 1-bisimulirani, pa opet nemamo kontraprimjer. Zaključujemo da W (a jednako tako i W') mora imati bar 3 elementa. $\square$

Ono što je zanimljivo je da je primjer 70 minimalan i što se tiče skupa *Prop*: naime, n-bisimuliranost GL *okvira* (GL strukturâ s praznim skupom *Prop*) doista povlači n-bisimuliranost odgovarajućih Veltmanovih okvira, što će slijediti iz teorema 73 u sljedećoj točki. Zasad samo dokažimo da za proizvoljni skup *Prop*, možemo dobiti „upola manju" bisimuliranost prelaskom na Veltmanove modele.

PROPOZICIJA 72. *Neka su* $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$ *i* $\mathfrak{N}' = (W', R', \Vdash')$ *GL strukture,* $w \in W$*,* $w' \in W'$*, te* $n \in \mathbb{N}$*. Ako vrijedi* $\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_{2n} \mathfrak{N}', w'$*, tada vrijedi* $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_n \mathit{Vel}\,\mathfrak{N}', w'$*.*

DOKAZ. Neka je $Z_{2n} \subseteq Z_{2n-1} \subseteq Z_{2n-2} \subseteq \cdots \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ bisimulacija između $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ takva da je $w\ Z_{2n}\ w'$, koja postoji prema uvjetima propozicije. Tvrdimo da je $Z_{2n} \subseteq Z_{2n-2} \subseteq Z_{2n-4} \subseteq \cdots \subseteq Z_2 \subseteq Z_0$ (samo uzmemo svaku drugu relaciju u polaznoj $2n$-bisimulaciji) jedna n-bisimulacija između $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}$ i $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}'$, koja pokazuje traženo. Već imamo $w\ Z_{2n}\ w'$, očito je niz relacija padajući, svojstvo (at) vrijedi jer je posljednja relacija Z_0 ista u obje bisimulacije, još samo treba provjeriti svojstva (forth) i (back). Kao i obično, provjeravamo samo (forth), dokaz za (back) se dobije zamjenom $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$.

Neka je $v\ Z_{2i}\ v'$, za $1 \leq i \leq n$, te $v\ R\ u$. Iz $i \geq 1$ imamo $2i \geq 2 > 1$, pa po svojstvu (K-forth) postoji u' takav da je $u\ Z_{2i-1}\ u'$ i $v'\ R'\ u'$. Ako je sada $u'\ S^{R'}_{w'}\ z'$, odnosno $u'\ \underline{R'}\ z'$, imamo dva slučaja. U prvom je $z' = u'$, pa $z := u$ zadovoljava uvjete $u\ S^R_w\ z$ i $(z, z') = (u, u') \in Z_{2i-1} \subseteq Z_{2i-2}$. U drugom je $u'\ R'\ z'$ i $u\ Z_{2i-1}\ u'$, pa po svojstvu (K-back) postoji z takav da je $z\ Z_{2i-2}\ z'$ i $u\ R\ z$, iz čega slijedi $w\ R\ u\ \underline{R}\ z$, odnosno $u\ S^R_w\ z$.

Jedino još treba vidjeti da je $u\ Z_{2i-2}\ u'$, no to je direktna posljedica činjenice da imamo padajući niz: znamo $(u, u') \in Z_{2i-1} \subseteq Z_{2i-2}$. □

2. Veza dubine i bisimulacije u GL okvirima

U ovoj točki dokazat ćemo karakterizaciju n-bisimuliranosti i bisimuliranosti na GL okvirima i njima pripadnim Veltmanovim okvirima, što se može interpretirati i kao GL strukture i pripadni Veltmanovim modeli u slučaju $\mathit{Prop} = \emptyset$, pomoću dubine svjetova. Prisjetimo se, za svaki GL okvir $\mathfrak{N}$ (kao i za bilo koji Veltmanov okvir s istim skupom svjetova i relacijom dostiživosti), *dubina* je funkcija ρ koja svjetovima pridružuje ordinale, definirana rekurzivno sa

$$\rho(w) := \sup_{wRu} \rho(u)^+ \ .$$

Dobra utemeljenost relacije R^{-1} povlači da je to dobra rekurzivna definicija. Također, važna će nam biti lema 16, koja kaže da svaki svijet dubine veće od α ima sljedbenika dubine točno α.

TEOREM 73. *Neka su $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ GL okviri, w i w' svjetovi u njima, te n prirodan broj. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) $\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_n \mathfrak{N}', w'$
(2) $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_n \mathit{Vel}\,\mathfrak{N}', w'$
(3) $\rho(w) = \rho(w') \lor \big(\rho(w) \geq n \land \rho(w') \geq n\big)$

DOKAZ. Dokazujemo implikacije „ciklički”, što će povlačiti ekvivalentnost sve tri tvrdnje: (2) $\Longrightarrow$ (1) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (2). Kao i obično, skupove svjetova u $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ označavamo s W i W', a relacije dostiživosti sa R i R' redom. Dubinu označavamo s ρ u oba okvira.

(2) $\Rightarrow$ (1): Ovu implikaciju smo zapravo već dokazali — ako imamo $(w, w') \in Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_1 \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$, sa svojstvima (forth) i (back), zanemarujući dijelove definicije koji se odnose na relacije S, vidimo da ista $(n+1)$-torka relacija Z_i ima i svojstva (K-forth) i (K-back), odnosno može poslužiti kao bisimulacija između $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ koja pokazuje (1).

(1) $\Rightarrow$ (3): Pretpostavimo (1), i neka je bar jedan od ordinala $\rho(w)$, $\rho(w')$ manji od n — inače nemamo što dokazivati. Zbog simetrije je svejedno koji je to, pa bez smanjenja općenitosti neka je $r := \rho(w) < n$. Kako je n prirodan broj, proizlazi da je i r prirodan broj, te je $\varphi := \big((\Box^{r+1}\bot \to \Box^r\bot) \to \bot\big)$ dobro definirana IL formula. Iz definicije je jasno da je $\delta(\varphi) = r + 1 \leq n$. Također, iz pretpostavke (1) slijedi da se w i w' slažu na svim GL formulama modalne dubine do n (to je za GL poznati rezultat o bisimulacijskoj invarijantnosti), pa specijalno i na φ. Lako je provjeriti da $w \Vdash \Box^{r+1}\bot$, te $w \nVdash \Box^r\bot$, dakle $w \Vdash \varphi$, te bi trebalo vrijediti i $w' \Vdash \varphi$.

Kada bi bilo $\rho(w') < r$, indukcijom po r lako bismo dobili $w' \Vdash \Box^r\bot$, dakle $w' \nVdash \varphi$, što je kontradikcija. Slično, kada bi bilo $\rho(w') > r$, dobili bismo $w' \nVdash \Box^{r+1}\bot$, dakle opet $w' \nVdash \varphi$. Zaključujemo da je jedino moguće $\rho(w') = r = \rho(w)$, čime smo dokazali (3).

(3) $\Rightarrow$ (2): Pretpostavimo (3), i konstruirajmo relacije

$$Z_i := \Big\{(v, v') \in W \times W' \,:\, \rho(v) = \rho(v') \lor \big(\rho(v) \geq i \land \rho(v) \geq i\big)\Big\}$$

za $0 \leq i \leq n$. Očito Z_i čine padajući niz (ako su obje dubine veće od i, onda su veće i od $i - 1$), te po pretpostavci (3) vrijedi $w\ Z_n\ w'$. Kako se radi o okvirima, preostaje samo provjeriti svojstva (forth) i (back). Zbog simetrije dovoljno je dokazati (forth).

Neka je $v \; Z_{i+1} \; v'$ za $0 \leq i < n$, te $v \; R \; u$. Iz drugog svojstva imamo $\rho(u) < \rho(u)^+ \leq \rho(v)$, a iz prvog imamo rastav na dva slučaja. U prvom je $\rho(v) = \rho(v')$, pa imamo zapravo $\rho(u) < \rho(v')$. Po lemi 16 postoji u' takav da je $v' \; R' \; u'$ i $\rho(u') = \rho(u)$, iz čega slijedi $u \; Z_i \; u'$. U drugom slučaju je $\rho(v) \geq i+1$ i $\rho(v') \geq i+1$, te razmišljamo ovako: ako je $\rho(u) \leq i$, tada je svakako $\rho(u) < i+1 \leq \rho(v')$, pa kao u prvom slučaju imamo u', sljedbenika od v' koji je iste dubine kao u. Ako je pak $\rho(u) > i$, tada samo trebamo naći neki u', sljedbenik od v' koji je dubine bar i. No $i < i+1 \leq \rho(v')$, pa takav u' (dubine točno i) postoji po lemi 16. Opet je $u \; Z_i \; u'$, ovaj put jer su $\rho(u)$ i $\rho(u')$ veći ili jednaki i. Dakle, u oba slučaja postoji u' koji ima svojstva $u \; Z_i \; u'$ i $v' \; R' \; u'$.

Neka je sada $u' \; S^{R'}_{v'} \; z'$. To znači da je zapravo $u' \; \underline{R}' \; z'$, pa opet imamo dva slučaja. Ako je $u' = z'$, stavimo $z := u$. Taj svijet sigurno ima svojstvo $u \; \underline{R} \; z$ po definiciji refleksivnog zatvorenja, te $v \; R \; u \; \underline{R} \; z$ povlači $u \; S^R_v \; z$. Također je prema prethodno dokazanom $(z, z') = (u, u') \in Z_i$.

Ako je pak $u' \; R' \; z'$, da bismo našli z moramo raspisati što znači $u \; Z_i \; u'$. Ako su dubine od u i u' jednake, lako dobijemo $\rho(z') < \rho(z')^+ \leq \rho(u') = \rho(u)$, te postoji z, iste dubine kao i z', koji je sljedbenik od u. Sada $\rho(z) = \rho(z')$ povlači $z \; Z_i \; z'$, a $u \; R \; z$ povlači $u \; \underline{R} \; z$, dakle $u \; S^R_v \; z$.

Još je preostalo vidjeti što kada je $u' \; R' \; z'$, te su dubine od u i u' bar i. Tada ako je $\rho(z') < i$ imamo $\rho(z') < \rho(u)$, pa imamo z sa svojstvima kao u prethodnom odlomku. U suprotnom, kada je $\rho(z') \geq i$, možemo opet staviti $z := u$. Naime, tada je $\rho(z) = \rho(u) \geq i$, što zajedno s $\rho(z') \geq i$ daje $z \; Z_i \; z'$ — a svakako je $u \; \underline{R} \; z$, dakle $u \; S^R_v \; z$. $\square$

Teorem 73 možemo interpretirati kao karakterizaciju n-bisimuliranosti u GL okvirima (i pripadnim Veltmanovim okvirima) pomoću „odrezane" dubine: svjetovi su n-bisimulirani ako su im n-dubine jednake, gdje je n-dubina definirana kao $\rho_n(w) := \min\big\{\rho(w), n\big\}$. To nas vodi na ideju da bi mogao vrijediti i analogni rezultat za bisimulacije, gdje dubine nisu „odrezane". Pokazuje se da taj rezultat doista vrijedi.

TEOREM 74. *Neka su $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ GL okviri, te $w \in W$ i $w' \in W'$ svjetovi u njima. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) $\mathfrak{N}, w \rightleftarrows \mathfrak{N}', w'$
(2) $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N}, w \rightleftarrows \mathit{Vel}\,\mathfrak{N}', w'$
(3) $\rho(w) = \rho(w')$

DOKAZ. Primijetimo da je (1) $\Leftrightarrow$ (2) samo specijalni slučaj leme 68 (za $\mathit{Prop} = \emptyset$). Dakle, dovoljno je dokazati ekvivalenciju (1) $\Leftrightarrow$ (3).

(3) ⇒ (1): Na već uobičajen način, definiramo relaciju

$$Z := \{(v, v') \in W \times W' \,:\, \rho(v) = \rho(v')\} ,$$

primijetimo da je po pretpostavci (3) $w\ Z\ w'$, i pokažimo da Z ima svojstvo (K-forth) — svojstvo (K-back) se dobije analogno zamjenom $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$. Neka je $v\ Z\ v'$ i $v\ R\ u$. To znači $\rho(u) < \rho(v) = \rho(v')$, pa po lemi 16 postoji u' takav da je $\rho(u') = \rho(u)$, odnosno $u\ Z\ u'$, te $v'\ R'\ u'$.

(1) ⇒ (3): Pretpostavimo da imamo relaciju $Z \subseteq W \times W'$ sa svojstvima (K-forth), (K-back) i $w\ Z\ w'$, te da ne vrijedi (3). Kako su ordinali totalno uređeni, mora vrijediti $\rho(w) < \rho(w')$ ili $\rho(w') < \rho(w)$, pa zbog simetrije bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\rho(w) < \rho(w')$. Definirajmo skup[1] ordinala

$$L := \{\alpha \,:\, \big(\exists (u, u') \in Z\big)\big(\rho(u) = \alpha < \rho(u')\big)\} .$$

Po pretpostavci je $\rho(w) \in L$, pa je L neprazan. Kao neprazan skup ordinala, L ima najmanji element, označimo ga s β. Dakle imamo $\beta \in L$, pa postoji par $(v, v') \in Z$ takav da je $\rho(v) = \beta < \rho(v')$. Sada po lemi 16 postoji $z' \in W'[v']$ dubine β. Po svojstvu (back), mora postojati $z \in W[v]$ takav da je $z\ Z\ z'$. Sada zbog $v\ R\ z$ imamo $\gamma := \rho(z) < \rho(v) = \beta = \rho(z')$. Iz toga i $z\ Z\ z'$ slijedi $\gamma \in L$, što je nemoguće zbog $\gamma < \beta = \min L$. □

3. Lanci i globalne bisimulacije

Sada napokon možemo odgovoriti na jedino preostalo pitanje s početka ovog poglavlja: povlači li modalna ekvivalentnost svjetova njihovu bisimuliranost, bar za konačan (ili prazan) skup *Prop*? Pokazat ćemo da to ne vrijedi, sljedećim razmatranjem: modalna ekvivalentnost praktički po definiciji znači upravo modalnu n-ekvivalentnost za sve $n \in \mathbb{N}$ (svaka IL formula je neke konačne modalne dubine), a svaka od njih, bar u slučaju konačnog skupa *Prop*, ekvivalentna je s n-bisimuliranošću.

Dakle, pokušavamo naći svjetove (po mogućnosti u okvirima) koji jesu n-bisimulirani za svaki konačni n, ali ipak nisu bisimulirani. Teoremi 73 i 74 iz prethodne točke kažu da tada njihove dubine moraju biti različite, ali „odrezane" dubine na svakom prirodnom broju moraju biti jednake. Dakle, dubine moraju biti dva različita beskonačna ordinala. Najjednostavniji takvi su ω i $\omega^+ = \omega + 1$.

[1]To je doista skup po aksiomu zamjene, jer je W skup, a svakom $u \in W$ odgovara najviše jedan $\alpha \in L$ kao njegova dubina.

Treba još konstruirati konkretne modele sa svjetovima tih dubina, no to nije teško. Pokazuje se da lako možemo naći svjetove proizvoljne dubine, u vrlo jednostavnim modelima.

DEFINICIJA 75. Neka je α ordinal. *Lanac* dubine α je GL okvir $\mathfrak{C}_\alpha := (W, R)$, gdje je W skup svih ordinala manjih od α, a R restrikcija standardnog uređaja $>$ na njima. Uz von Neumannovu definiciju ordinala, možemo kraće pisati $\mathfrak{C}_\alpha := (\alpha, \ni)$.

Veltmanov lanac dubine α je Veltmanov okvir $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_\alpha$.

Lako je provjeriti (transfinitnom indukcijom) da je svaki svijet β u $\mathfrak{C}_\alpha$ upravo dubine β, pa postoje svjetovi proizvoljne dubine: samo uzmimo svijet β u lancu $\mathfrak{C}_{\beta+}$ ili $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\beta+}$. Također iz toga i definicije dubine okvira slijedi $\rho(\mathfrak{C}_\alpha) = \alpha$, pa je naziv „lanac dubine α" opravdan. Jasno je da se doista radi o GL okviru: uređaj $>$ na ordinalima je tranzitivan, a njegov inverz je upravo (restringirana) relacija $\in$, čija dobra utemeljenost je jedan od aksioma teorije skupova.

Sada možemo dokazati ono što smo najavili na početku ove točke.

PROPOZICIJA 76. *U Veltmanovom lancu* $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}$*, svjetovi* ω *i* ω^+ *su modalno ekvivalentni, ali nisu bisimulirani.*

DOKAZ. Neka je φ proizvoljna IL formula, i označimo $n := \delta(\varphi)$. Tada je jasno da su $\rho(\omega) = \omega$ i $\rho(\omega^+) = \omega^+$ veći od n, te prema teoremu 73 imamo $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega \rightleftarrows_n \mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega^+$. Prema lemi 60 iz toga slijedi $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega \equiv_n \mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega^+$, pa se ω i ω^+ slažu na φ. Kako je φ bila proizvoljna IL formula, zaključujemo $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega \equiv \mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega^+$.

S druge strane, očito je $\rho(\omega) = \omega \neq \omega^+ = \rho(\omega^+)$, te prema teoremu 74 imamo $\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega \not\rightleftarrows \mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega^+$. $\square$

Primijetimo da za postojanje svijeta dubine α uvijek zapravo trebamo lanac (i općenito model) dubine bar α^+. Za proučavanje lanaca zato su prirodnije *globalne bisimulacije*, kod kojih ne dolazi do takvog pomaka.

DEFINICIJA 77. Neka su $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ GL strukture (ili okviri, ili pak Veltmanovi modeli ili okviri), te Z bisimulacija između njih. Kažemo da je Z *globalna* bisimulacija, ako je totalna s obzirom na oba skupa svjetova; preciznije, ako za svaki svijet w u $\mathfrak{N}$ postoji w' u $\mathfrak{N}'$ takav da je $w\ Z\ w'$, i za svaki w' u $\mathfrak{N}'$ postoji w u $\mathfrak{N}$ takav da je $w\ Z\ w'$. Kažemo da su $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ *(globalno) bisimulirani*, i pišemo $\mathfrak{N} \rightleftarrows \mathfrak{N}'$, ako postoji globalna bisimulacija između njih.

Kažemo da je n-bisimulacija $Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_0 \subseteq W \times W'$ globalna, ako je relacija Z_n totalna s obzirom na W i W'. Kažemo da su $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}'$ *(globalno) n-bisimulirani*, i pišemo $\mathfrak{N} \rightleftarrows_n \mathfrak{N}'$, ako postoji globalna n-bisimulacija između njih.

Definicija globalne bisimulacije vrlo liči na svojstva (forth) i (back) u običnoj bisimulaciji, i to nije slučajno. Po analogiji s oznakom iz dokaza teorema o generalizaciji, ako je $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$ i $w \in W$, $\mathfrak{N}[w]$ nam označava podstrukturu od $\mathfrak{N}$ s nosačem $A := W[w]$; dakle, GL strukturu $(A, A \times A \cap R, A \times Prop \cap \Vdash)$.

PROPOZICIJA 78. *Ako su $\mathfrak{N} = (W, R, \Vdash)$ i $\mathfrak{N}' = (W', R', \Vdash')$ dvije GL strukture, $w \in W$ i $w' \in W'$ svjetovi u njima, te n prirodan broj, tada vrijedi*

(1) *$\mathfrak{N}, w \rightleftarrows \mathfrak{N}', w'$ ako i samo ako su w i w' propozicionalno ekvivalentni i $\mathfrak{N}[w] \rightleftarrows \mathfrak{N}'[w']$*
(2) *$\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_{n+1} \mathfrak{N}', w'$ ako i samo ako su w i w' propozicionalno ekvivalentni i $\mathfrak{N}[w] \rightleftarrows_n \mathfrak{N}'[w']$*

DOKAZ. Zapravo samo treba pročitati definicije. Dokažimo (2), dokazati (1) je još jednostavnije. Ako vrijedi $\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_{n+1} \mathfrak{N}', w'$, po $(n+1)$-bisimulaciji $Z_{n+1} \subseteq Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0$, svojstvo (at) nam kaže da su w i w' propozicionalno ekvivalentni, svojstvo (K-forth) za $i = n+1$ da je relacija Z_n totalna na skupu $W[w]$, a svojstvo (K-back) za $i = n+1$ da je totalna na skupu $W'[w']$. Dakle, „odrezana" i restringirana bisimulacija definirana sa

$$Z_i' := W[w] \times W'[w'] \cap Z_i \text{ , za } 0 \le i \le n$$

je globalna n-bisimulacija između $\mathfrak{N}[w]$ i $\mathfrak{N}'[w']$.

U drugom smjeru, ako imamo propozicionalnu ekvivalentnost w i w', te globalnu n-bisimulaciju $Z_n \subseteq \cdots \subseteq Z_0 \subseteq W[w] \times W'[w']$ između $\mathfrak{N}[w]$ i $\mathfrak{N}'[w']$, možemo definirati $(n+1)$-bisimulaciju sa

$$Z_i' := \begin{cases} Z_i \cup \{(w, w')\} & i \le n \\ \{(w, w')\} & i = n+1 \end{cases} .$$

Tada svojstvo (at) za Z_0' slijedi iz propozicionalne ekvivalentnosti w i w' te svojstva (at) za Z_0. Dokažimo (K-forth), (K-back) se dokazuje analogno.

Ako je $i = n+1$, jedini par u Z_i' je (w, w'). Sada $w\ R\ u$ znači da je $u \in W[w]$, te postoji $u' \in W'[w']$ takav da je $(u, u') \in Z_n \subseteq Z_n'$, što smo i trebali. Ako je pak $(v, v') \in Z_i'$ za $i \le n$, imamo dva slučaja. U prvom je $(v, v') = (w, w')$, te prema upravo dokazanom postoji odgovarajući par $(u, u') \in Z_n \subseteq Z_{i-1} \subseteq Z_{i-1}'$. U drugom je $(v, v') \in Z_i$, pa tvrdnja slijedi iz svojstva (K-forth) za Z_i. $\square$

Naravno, zanemarivanjem propozicionalnih varijabli i svojstva (at) dobivamo rezultat na okvirima.

KOROLAR 79. *Ako su* $\mathfrak{N} = (W, R)$ *i* $\mathfrak{N}' = (W', R')$ *dva GL okvira,* $w \in W$ *i* $w' \in W'$ *svjetovi u njima, te* n *prirodan broj, tada vrijedi*

(1) $\mathfrak{N}, w \rightleftarrows \mathfrak{N}', w'$ *ako i samo ako je* $\mathfrak{N}[w] \rightleftarrows \mathfrak{N}'[w']$
(2) $\mathfrak{N}, w \rightleftarrows_{n+1} \mathfrak{N}', w'$ *ako i samo ako je* $\mathfrak{N}[w] \rightleftarrows_n \mathfrak{N}'[w']$

Kao posljedicu toga možemo dobiti karakterizaciju globalne bisimuliranosti preko dubine modela, analogno teoremima 73 i 74. Prisjetimo se, $\rho(\mathfrak{N})$ smo definirali kao sliku funkcije ρ na skupu svih svjetova u $\mathfrak{N}$, i to je uvijek ordinal. Jednako tako možemo za „odrezanu" dubinu $\rho_n(w) := \min\{n, \rho(w)\}$ definirati $\rho_n(\mathfrak{N})$ kao sliku funkcije ρ_n.

Zanimljivo je da ako režemo dubinu svjetova na n, zapravo dubinu modela režemo na njegovom sljedbeniku $n + 1$.

PROPOZICIJA 80. *Neka je* W *skup svjetova nekog GL okvira ili strukture* $\mathfrak{N}$. *Tada je*

$$\rho_n(\mathfrak{N}) := \big\{\rho_n(w) \,:\, w \in W\big\} = \min\big\{\rho(\mathfrak{N}), n + 1\big\}\,.$$

DOKAZ. Ako je desna strana jednaka $\rho(\mathfrak{N})$, to znači da je $\rho(\mathfrak{N}) \leq n + 1$. Tada za svaki $w \in W$ vrijedi $\rho(w) \in \rho(\mathfrak{N}) \subseteq n + 1$, dakle $\rho(w) \in n + 1 = n \cup \{n\}$, odnosno $\rho(w) \leq n$. To znači da je za sve w zapravo $\rho_n(w) = \rho(w)$, pa je i slika $\rho_n(\mathfrak{N}) = \rho(\mathfrak{N})$, dakle jednaka desnoj strani.

U suprotnom je na desnoj strani $n + 1 = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, te je $n+1 < \rho(\mathfrak{N})$, odnosno po definiciji standardnog uređaja na ordinalima, $n + 1 \in \rho(\mathfrak{N})$, pa postoji $w_{n+1} \in W$ dubine $n + 1$. Trebamo dokazati skupovnu jednakost

$$\big\{\rho_n(w) \,:\, w \in W\big\} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Jedna inkluzija (slijeva nadesno) slijedi iz činjenice da je $\rho_n(w)$ po definiciji najviše n, dakle $\rho_n(w) \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Druga inkluzija slijedi po lemi 16, jer je svaki broj i na desnoj strani manji od $n+1 = \rho(w_{n+1})$, pa postoji svijet $w_i \in W[w_{n+1}] \subseteq W$ takav da je $\rho(w_i) = i$. No tada je i $\rho_n(w_i) = \min\{i, n\} = i$. □

KOROLAR 81. *Neka su* $\mathfrak{N}$ *i* $\mathfrak{N}'$ *GL okviri, te* n *prirodan broj. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) $\mathfrak{N} \rightleftarrows_n \mathfrak{N}'$
(2) $\mathit{Vel}\,\mathfrak{N} \rightleftarrows_n \mathit{Vel}\,\mathfrak{N}'$
(3) $\rho_n(\mathfrak{N}) = \rho_n(\mathfrak{N}')$

KOROLAR 82. *Neka su* $\mathfrak{N}$ *i* $\mathfrak{N}'$ *GL okviri. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(1) $\mathfrak{N} \rightleftarrows \mathfrak{N}'$
(2) $Ve\ell\,\mathfrak{N} \rightleftarrows Ve\ell\,\mathfrak{N}'$
(3) $\rho(\mathfrak{N}) = \rho(\mathfrak{N}')$

4. Bisimulacijske igre na Veltmanovim modelima

Pristup proučavanju određenih relacija ekvivalencije na modelima odnosno njihovim elementima pomoću igara potječe još od Ehrenfeuchta i Fraïsséa [**9**]. Za GL strukture kao specijalni slučaj općenitih Kripkeovih struktura, definicija bisimulacijskih igara može se vidjeti na primjer u [**10**]. Ovdje generaliziramo tu definiciju na Veltmanove modele, te dokazujemo da igre na GL strukturama i Veltmanovim modelima nikada nisu beskonačne.

DEFINICIJA 83. Neka su $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, S^i, \Vdash_i)$, za $i \in \{0, 1\}$, dva Veltmanova modela. Bisimulacijska igra na tim modelima je igra za 2 igrača, čije uloge se obično zovu *challenger* i *defender*, koji se pomiču kroz konfiguracije u nizu rundi. *Konfiguracija* je uređena četvorka $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$, gdje su $w_0 \in W_0$ i $w_1 \in W_1$. *Runda* s početnom konfiguracijom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ je uređena šestorka poteza koji se igraju na sljedeći način:

(1) Challenger bira $i \in \{0, 1\}$, indeks jednog modela.
S $j := 1 - i$ označavamo indeks drugog modela.
(2) Ako je $W_i[w_i] = \emptyset$, runda završava: defender pobjeđuje.
Inače, challenger bira $u_i \in W_i[w_i]$.
(3) Ako je $W_j[w_j] = \emptyset$, runda završava: challenger pobjeđuje.
Inače, defender bira $u_j \in W_j[w_j]$.
(4) Challenger bira $v_j \in W_j$ takav da je $u_j\ S^j_{w_j}\ v_j$.
(5) Defender bira $v_i \in W_i$ takav da je $u_i\ S^i_{w_i}\ v_i$.
(6) Challenger bira jednu od konfiguracija: $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1)$ ili $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)$. Ako svjetovi u toj konfiguraciji (u_0 i u_1, odnosno v_0 i v_1) nisu propozicionalno ekvivalentni, challenger pobjeđuje. Inače to postaje završna konfiguracija runde.

Kao što vidimo iz definicije, runda može završiti pobjedom challengera, pobjedom defendera, ili novom, završnom konfiguracijom[2]. Prve dvije vrste rundi — one koje nemaju završnu konfiguraciju — zovemo *pobjedničkima*.

[2]Naime, ako su odigrani prvi, drugi i treći potez, tada se četvrti i peti potez uvijek mogu igrati po refleksivnosti — odnosno, uvijek možemo staviti $v_j := u_j$, te $v_i := u_i$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. *n-igra* s početkom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ igra se na sljedeći način:

(1) Provjerava se jesu li w_0 i w_1 propozicionalno ekvivalentni. Ako nisu, igra završava: challenger pobjeđuje.
(2) Trenutna konfiguracija C postavlja se na $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$. Postavljamo k na 1.
(3) Ako je $k > n$, igra završava: defender pobjeđuje.
(4) Igra se k-ta runda, s početnom konfiguracijom C.
Ako je k-ta runda pobjednička, igra završava: pobjeđuje onaj igrač koji je pobijedio u toj rundi.
(5) Postavimo C na završnu konfiguraciju k-te runde,
povećamo k za 1, i idemo na korak (3).

Igra s početkom $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ igra se kao n-igra za $n = \infty$, dakle nikad ne završava u koraku (3) — sve ostalo je isto.

Usprkos tome što su igre definirane kao potencijalno beskonačne, jednostavna posljedica inverzne dobre utemeljenosti relacije dostiživosti je da su sve igre konačne.

Propozicija 84. *Svaka igra završava nakon konačno mnogo poteza (odnosno rundi), pobjedom jednog od igrača.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da imamo igru koja ne završava. Gledajući definiciju igre, vidimo da je jedini način da se to dogodi, taj da imamo prebrojivo mnogo rundi $r_1, r_2, \ldots$ i prebrojivo mnogo konfiguracija $C_1, C_2, C_3, \ldots$, tako da svaka runda r_k ima početnu konfiguraciju C_k i završnu konfiguraciju C_{k+1} — specijalno, nijedna runda nije pobjednička. Svaka konfiguracija C_k je oblika $(\mathfrak{M}_0, w_0^k, \mathfrak{M}_1, w_1^k)$ za svjetove $w_0^k \in W_0$ i $w_1^k \in W_1$. Općenito, igrane svjetove u k-toj rundi ćemo označavati kao u definiciji runde, samo s gornjim indeksom jednakim „rednom broju" runde k.

Promotrimo rundu r_k: prema gornjem, njena početna konfiguracija mora biti $C_k = (\mathfrak{M}_0, w_0^k, \mathfrak{M}_1, w_1^k)$. Ako je u prvom potezu te runde challenger odabrao $i = 0$, prema drugom potezu slijedi $w_0^k \; R_0 \; u_0^k$, a ako je odabrao $i = 1$, tada je $j = 1 - 1 = 0$, pa to isto slijedi prema trećem potezu — kako nijedna runda nije pobjednička, postoje u_i i u_j. To znači da uvijek imamo $w_0^k \; R_0 \; u_0^k$.

Sada ako je $i = 0$, po petom potezu slijedi $u_0^k \; S^0_{w_0^k} \; v_0^k$, a ako je $i = 1$, tada je $j = 0$, pa to isto slijedi prema četvrtom potezu. Dakle, uvijek vrijedi $(u_0^k, v_0^k) \in S^0_{w_0^k} \subseteq W_0[w_0^k] \times W_0[w_0^k]$, te iz toga slijedi $v_0^k \in W_0[w_0^k]$, odnosno $w_0^k \; R_0 \; v_0^k$.

Prema koracima (4) i (5) u definiciji igre, završna konfiguracija runde r_k mora biti $C_{k+1} = (\mathfrak{M}_0, w_0^{k+1}, \mathfrak{M}_1, w_1^{k+1})$, a prema šestom potezu od r_k to je ili $(\mathfrak{M}_0, u_0^k, \mathfrak{M}_1, u_1^k)$ ili $(\mathfrak{M}_0, v_0^k, \mathfrak{M}_1, v_1^k)$. Dakle, svakako je $w_0^{k+1} \in \{u_0^k, v_0^k\}$, a kako smo upravo dokazali da su oba ta svijeta R_0-sljedbenici od w_0^k, proizlazi $w_0^k \, R_0 \, w_0^{k+1}$. Kako to vrijedi za proizvoljan $k \geq 1$, imamo beskonačni rastući R_0-lanac

$$w_0^1 \, R_0 \, w_0^2 \, R_0 \, w_0^3 \, R_0 \cdots ,$$

što je u kontradikciji s činjenicom da je $\mathfrak{M}_0$ Veltmanov model, odnosno R_0^{-1} dobro utemeljena relacija. □

DEFINICIJA 85. *Tip igre* je uređen par (C, n), gdje je C neka konfiguracija, a $n \in \mathbb{N} \dot{\cup} \{\infty\}$. *Igra tipa* (C, n) znači: n-igra s početkom C. Dakle, igra tipa (C, ∞) je igra s početkom C. Često pišemo tip igre bez unutarnjih zagrada: $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1, n)$ umjesto $\big((\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1), n\big)$.

Strategija za challengera je pravilo koje određuje svaki challengerov potez (gdje god piše da challenger nešto bira), poznavajući potpunu povijest igre (sve poteze odigrane do tog trenutka, od strane oba igrača). Analogno se definira strategija za defendera. Preciznije, strategija je preslikavanje koje konačne nizove poteza preslikava u poteze. Kažemo da igrač *slijedi* strategiju ako u svakom trenutku igra onaj potez koji ta strategija pridružuje nizu poteza odigranih do tada. Kažemo da igrač I *ima pobjedničku strategiju za tip igre* (C, n) ako postoji strategija s takva da I pobjeđuje u svakoj igri tipa (C, n) u kojoj I slijedi s.

Iz propozicije 84 je jasno da je u definiciji pobjedničke strategije za I dovoljno tražiti da I *ne gubi* slijedeći je; tada mora pobijediti u nekom trenutku. Također je jasno da ne mogu oba igrača imati pobjedničku strategiju za isti tip igre; kad bi se to dogodilo, oba igrača bi morala pobijediti slijedeći svatko svoju pobjedničku strategiju. Ono što možda nije na prvi pogled očito je da doista uvijek točno jedan igrač *ima* pobjedničku strategiju, što je karakterizirano sljedećim teoremom. Da bismo ga dokazali, prvo trebamo dvije leme.

LEMA 86. *Ako je* $\mathfrak{M}_0, w_0 \rightleftarrows_n \mathfrak{M}_1, w_1$*, tada defender ima pobjedničku strategiju za tip igre* $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1, n)$.

DOKAZ. Za Veltmanove modele $\mathfrak{M}_0$ i $\mathfrak{M}_1$, na njihovim skupovima svjetova W_0 i W_1 fiksirajmo funkcije izbora[3]. Lemu dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Ako je $n = 0$, imamo 0-bisimulaciju:

[3] Funkcija izbora za skup W je funkcija $f : \mathcal{P}(W) \setminus \{\emptyset\} \to W$ takva da je $f(X) \in X$ za sve $X \in \operatorname{dom} f$, i postoji za svaki skup prema aksiomu izbora. Ovdje nam je bitno da unaprijed imamo fiksiranu funkciju izbora na svakom skupu svjetova, kako bismo mogli govoriti o *strategiji* — dakle, determinističkom odabiru nekog svijeta, od eventualno više njih koji zadovoljavaju uvjete.

$(w_0, w_1) \in Z_0 \subseteq W_0 \times W_1$. Prema svojstvu (at) w_0 i w_1 su propozicionalno ekvivalentni, te defender pobjeđuje u trećem koraku igre (jer je $1 > 0$) ne igrajući ništa. Pretpostavimo da za sve $(z_0, z_1) \in W_0 \times W_1$ l-bisimuliranost $\mathfrak{M}_0, z_0$ i $\mathfrak{M}_1, z_1$ povlači postojanje defenderove pobjedničke strategije za tip $(\mathfrak{M}_0, z_0, \mathfrak{M}_1, z_1, l)$.

Neka je sada $\mathfrak{M}_0, w_0 \rightleftarrows_{l+1} \mathfrak{M}_1, w_1$. To znači da imamo $(l+1)$-bisimulaciju: $(w_0, w_1) \in Z_{l+1} \subseteq Z_l \subseteq \cdots \subseteq Z_0 \subseteq W_0 \times W_1$. Prođimo kroz igru tipa $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1, l+1)$, i pogledajmo kako defender treba igrati da bi pobijedio.

Prvo se provjerava jesu li w_0 i w_1 propozicionalno ekvivalentni. To će proći po svojstvu (at), jer je $(w_0, w_1) \in Z_{l+1} \subseteq Z_0$. Nakon toga se C postavlja na $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$, k se postavlja na 1, ustanovi se da ne vrijedi $1 > l + 1$, i igra se prva runda. Ako u njoj challenger ne može odabrati odgovarajućeg sljedbenika u odabranom modelu, defender pobjeđuje.

Inače challenger igra $i \in \{0, 1\}$, te $u_i \in W_i[w_i]$. Prema svojstvu (forth) ako je $i = 0$, odnosno svojstvu (back) ako je $i = 1$, postoji $u_j \in W_j[w_j]$ takav da je $u_0\ Z_l\ u_1$, te za sve v_j za koje je $u_j\ S^j_{w_j}\ v_j$ postoji v_i takav da je $u_i\ S^i_{w_i}\ v_i$ i $v_0\ Z_l\ v_1$. Defender treba odabrati jedan takav u_j, po unaprijed fiksiranoj funkciji izbora za W_j, i igrati ga u potezu (3). Sada kad challenger u potezu (4) igra v_j takav da je $u_j\ S^j_{w_j}\ v_j$, defender će imati odgovor v_i sa svojstvima $u_i\ S^i_{w_i}\ v_i$ i $v_0\ Z_l\ v_1$. Naravno, opet treba odabrati jedan takav v_i, po funkciji izbora za W_i, i igrati ga u potezu (5).

Ako sada challenger u potezu (6) odabere $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1)$ kao završnu konfiguraciju — i početnu konfiguraciju za sljedeću rundu ako ona postoji — u_0 i u_1 će biti propozicionalno ekvivalentni po svojstvu (at), zbog $(u_0, u_1) \in Z_l \subseteq Z_0$. Štoviše, l-bisimulacija $Z_l \subseteq \cdots \subseteq Z_0 \subseteq W_0 \times W_1$ pokazuje da vrijedi $\mathfrak{M}_0, u_0 \rightleftarrows_l \mathfrak{M}_1, u_1$, pa po pretpostavci indukcije defender ima pobjedničku strategiju za tip $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1, l)$. Zaboravljajući sve igrano do tog trenutka — kao da igra počinje od $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1)$ — i slijedeći tu strategiju u l rundi od 2. do $(l + 1)$. defender može pobijediti.

Ako challenger u potezu (6) odabere $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)$, razmišljamo potpuno jednako, samo iskoristimo činjenicu $v_0\ Z_l\ v_1$. □

LEMA 87. *Ako je $n \in \mathbb{N}$, i challenger nema pobjedničku strategiju za tip $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1, n)$, tada je $\mathfrak{M}_0, w_0 \rightleftarrows_n \mathfrak{M}_1, w_1$.*

DOKAZ. Za $0 \le l \le n$ definiramo

$$Z_l := \left\{ (v_0, v_1) \in W_0 \times W_1 \ : \ \begin{array}{l} \text{challenger nema pobjedničku strategiju} \\ \text{za tip igre } (\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1, l) \end{array} \right\}$$

— prema pretpostavci leme tada je $w_0\ Z_n\ w_1$. Također, lako je provjeriti da je $Z_l \subseteq Z_{l-1}$ za $1 \leq l \leq n$, kontrapozicijom: ako challenger ima strategiju za pobjedu u $(l-1)$-igri s početkom $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)$, tada ta ista strategija može poslužiti i za pobjedu u l-igri s istim početkom, budući da challenger mora pobijediti prije isteka $(l-1)$. runde.

Dakle, vrijedi $(w_0, w_1) \in Z_n \subseteq Z_{n-1} \subseteq \cdots \subseteq Z_0 \subseteq W_0 \times W_1$. Preostaje provjeriti svojstva (at), (forth) i (back). Pretpostavimo da svojstvo (at) ne vrijedi, odnosno da u Z_0 postoji par svjetova (v_0, v_1) koji nisu propozicionalno ekvivalentni. No tada 0-igra s početkom $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1)$ završava odmah u prvom koraku pobjedom challengera, pa challenger ima pobjedničku „strategiju" (ne činiti ništa), što je u kontradikciji s definicijom relacije Z_0.

Za dokaz svojstva (forth), neka je $v_0\ Z_{l+1}\ v_1$ i $v_0\ R_0\ u_0$. Dokazat ćemo da postoji u_1 s traženim svojstvima iz (forth) tako što ćemo u svakom od slučajeva kada takav u_1 ne postoji konstruirati odgovarajuću challengerovu pobjedničku strategiju s za tip $(\mathfrak{M}_0, v_0, \mathfrak{M}_1, v_1, l+1)$, što će biti u kontradikciji s definicijom relacije Z_{l+1}.

Prvo, ako uopće ne postoji u_1 takav da je $v_1\ R_1\ u_1$, tada je s jednostavna: u prvoj rundi, koja postoji jer je $l+1 \geq 1$, igrati u prvom potezu $i = 0$ i u drugom potezu $u_0 \in W_0[v_0]$. U trećem potezu defender tada nema odgovor, i challenger pobjeđuje.

Drugo, ako skup $W_1[v_1]$ nije prazan, ali nijedan element u_1 tog skupa nema svojstvo $u_0\ Z_l\ u_1$, tada s izgleda ovako: u prvoj rundi igrati $i = 0$ i $u_0 \in W_0[v_0]$ kao gore. Nakon odgovora defendera u trećem potezu (označimo ga s $u_1 \in W_1[v_1]$), u četvrtom potezu igrati isti u_1 (koristeći refleksivnost relacije S_{v_1}). Što god defender odgovorio u petom potezu, u šestom potezu odabrati $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1)$ kao završnu konfiguraciju. Nakon toga, ako u_0 i u_1 nisu propozicionalno ekvivalentni, challenger pobjeđuje. Ako pak vrijedi $\mathfrak{M}_0, u_0 \equiv_0 \mathfrak{M}_1, u_1$, slijedi „krnja" (bez prvog koraka) igra tipa $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1, l)$, za koji challenger ima pobjedničku strategiju s', jer je $(u_0, u_1) \notin Z_l$. Strategija s' mora biti takva da se ne oslanja na prvi korak u igri, jer u_0 i u_1 jesu propozicionalno ekvivalentni, pa slijeđenjem s' od tog trenutka nadalje challenger pobjeđuje.

I treće, ako postoje svjetovi $u_1 \in W_1[v_1]$ takvi da je $u_0\ Z_l\ u_1$, ali ni za jedan takav u_1 nije istina da za svaki z_1 koji je u relaciji S_{v_1} s u_1 postoji z_0 u relaciji S_{v_0} s u_0 takav da je $z_0\ Z_l\ z_1$: treba igrati u_0 kao i prije, te ako defender odgovori nekim u_1 koji nije u relaciji Z_l s u_0, slijediti strategiju iz prethodnog odlomka. Ako pak defender odgovori s u_1 koji jest u relaciji Z_l s u_0, znamo da postoji $z_1 \in W_1$ takav da je $u_1\ S_{v_1}\ z_1$, te da za sve z_0 takve da vrijedi $u_0\ S_{v_0}\ z_0$, ne vrijedi $z_0\ Z_l\ z_1$.

Taj (zapravo jedan od tih, odabran unaprijed fiksiranom funkcijom izbora na W_1) z_1 treba igrati u četvrtom potezu. Koji god z_0 defender igrao u petom, znamo da ne vrijedi $z_0\ Z_l\ z_1$, pa opet imamo strategiju kao u prethodnom odlomku, samo sa z_0 i z_1 umjesto u_0 i u_1: ako oni nisu propozicionalno ekvivalentni, challenger pobjeđuje već u šestom potezu iste runde, a ako jesu, challenger pobjeđuje u krnjoj igri tipa $(\mathfrak{M}_0, z_0, \mathfrak{M}_1, z_1, l)$, te istom strategijom pobjeđuje u nastavku igre koju promatramo. □

TEOREM 88. *Neka je* $(C, n) = (\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1, n)$ *neki tip igre, gdje je* $n \in \mathbb{N}$.

- *Defender ima pobjedničku strategiju za tip igre* (C, n) *ako i samo ako je* $\mathfrak{M}_0, w_0 \rightleftarrows_n \mathfrak{M}_1, w_1$
- *Challenger ima pobjedničku strategiju za tip igre* (C, n) *ako i samo ako je* $\mathfrak{M}_0, w_0 \not\rightleftarrows_n \mathfrak{M}_1, w_1$

DOKAZ. Smjerovi zdesna nalijevo tih tvrdnji su upravo leme 86 i 87 — prva direktno, druga po kontrapoziciji. Za smjerove slijeva nadesno razmišljamo ovako: ako defender ima pobjedničku strategiju za tip (C, n), tada je jasno da challenger *nema* pobjedničku strategiju za isti tip, te prema lemi 87 slijedi n-bisimuliranost svjetova u konfiguraciji C. Jednako tako, ako svjetovi jesu n-bisimulirani, tada po lemi 86 defender ima pobjedničku strategiju za tip (C, n), pa je challenger ne može imati. Po kontrapoziciji dobivamo: ako challenger ima pobjedničku strategiju za tip (C, n), tada svjetovi u C nisu n-bisimulirani, što smo i trebali. □

Slično možemo dokazati i teorem za bisimulacije odnosno igre.

TEOREM 89. *Neka je* $C = (\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ *neka konfiguracija.*

- *Defender ima pobjedničku strategiju za tip igre* (C, ∞) *ako i samo ako je* $\mathfrak{M}_0, w_0 \rightleftarrows \mathfrak{M}_1, w_1$
- *Challenger ima pobjedničku strategiju za tip igre* (C, ∞) *ako i samo ako je* $\mathfrak{M}_0, w_0 \not\rightleftarrows \mathfrak{M}_1, w_1$

DOKAZ. Za dokaz smjera zdesna nalijevo prve tvrdnje, pretpostavimo da postoji bisimulacija Z između $\mathfrak{M}_0$ i $\mathfrak{M}_1$, takva da je $w_0\ Z\ w_1$. *Z-konfiguracijama* nazovimo one čiji svjetovi su u relaciji Z. Dakle, početna konfiguracija $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1)$ je Z-konfiguracija. Po svojstvu (at) defender neće izgubiti u prvom koraku igre, te će se igrati bar jedna runda. Sada je ključno primijetiti da postoji strategija s takva da vrijedi sljedeće:

> Svaka runda koja počinje Z-konfiguracijom i u kojoj defender slijedi stretegiju s, je ili pobjednička za defendera, ili završava Z-konfiguracijom.

Naravno, strategija s samo slijedi relaciju Z, i igra prema svojstvu (forth) ako je challenger na početku runde odabrao $i = 0$, ili (back) ako je odabrao $i = 1$. Detaljno smo opisali kako to činiti u dokazu leme 86. Sada tvrdnja slijedi iz propozicije 84: igra mora završiti nakon konačno mnogo rundi, a ako defender slijedi strategiju s, jedino može završiti njegovom pobjedom. Dakle, s je pobjednička strategija.

Sada pretpostavimo da challenger nema pobjedničku strategiju za tip $(\mathfrak{M}_0, w_0, \mathfrak{M}_1, w_1, \infty)$, i definirajmo Z' kao skup svih uređenih parova $(u_0, u_1) \in W_0 \times W_1$ takvih da challenger nema pobjedničku strategiju za tip $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1, \infty)$. Dakle, vrijedi $w_0\ Z'\ w_1$, i očito je $Z' \subseteq W_0 \times W_1$. Kad Z' ne bi imala svojstvo (at), recimo da se u njoj nalazi par propozicionalno neekvivalentnih svjetova (u_0, u_1), challenger bi imao trivijalnu pobjedničku strategiju za tip $(\mathfrak{M}_0, u_0, \mathfrak{M}_1, u_1, \infty)$ — ne činiti ništa, i pobijediti u prvom koraku igre. Dakle, samo treba dokazati svojstva (forth) i (back), no to se dokazuje jednako kao u dokazu leme 87 — zapravo još jednostavnije, jer obje relacije Z_{l+1} i Z_l su sada jedna relacija Z'.

Iz te dvije tvrdnje, kao i iz činjenice da za isti tip ne mogu oba igrača imati pobjedničku strategiju, slijedi tvrdnja teorema, jednako kao u dokazu teorema 88. □

Direktna posljedica prethodnih teorema, te neekvivalencije n-bisimuliranosti za sve $n \in \mathbb{N}$ i bisimuliranosti, je da postoji konfiguracija — primjer takve je $C := (\mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega, \mathit{Ve\ell}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}, \omega + 1)$ — takva da defender ima pobjedničku strategiju u n-igri s početkom C za svaki n, ali svejedno nema pobjedničku strategiju u igri s početkom C, iako je prema propoziciji 84 svaka igra zapravo n-igra za neki n. Stvar je u tome da strategija može ovisiti o n, i zapravo je neprecizno govoriti o „pobjedničkoj strategiji za igru": to je jedan od razloga zašto smo definirali tip igre i pobjedničku strategiju za tip.

5. Što dalje?

Ovdje opisujemo nekoliko mogućih smjerova u kojima može ići dalje istraživanje.

Još u dijelu o normalnim formama vidjeli smo da s obzirom na formule imamo lokalnu i globalnu ekvivalenciju. Tu pojavu možemo promatrati i s obzirom na svjetove, i vidimo da pojam modalne ekvivalencije koji smo uveli na početku ovog dijela, zapravo odgovara lokalnoj ekvivalenciji. Može se promatrati i *globalna modalna ekvivalencija* između Veltmanovih modela, koja je analogna *elementarnoj ekvivalenciji* između dvije strukture prvog reda: dva Veltmanova modela (ili okvira) su globalno modalno ekvivalentni ako sve formule koje globalno vrijede na jednom, vrijede i na drugom.

Tako možemo pokušati uspostaviti vezu između globalne modalne ekvivalentnosti i globalne bisimuliranosti, analognu vezi između odgovarajućih lokalnih pojava koju smo obradili. Naravno, zamislivo je da i takva veza ovisi o kardinalnosti skupa $Prop$.

Također se mogu definirati i *globalne igre* (i globalne n-igre), kod kojih u početnoj konfiguraciji nisu specificirani svjetovi, već samo modeli od kojih se kreće. Pobjedničke strategije u takvim igrama bi trebale odražavati globalnu bisimuliranost polaznih modela.

S druge strane, mnoge konačne stvari koje smo definirali vjerojatno se mogu prirodno proširiti preko ω. Vidjeli smo primjer dubine svijeta i okvira, te lanaca i Veltmanovih lanaca. Relativno je lako zamisliti što bi bila α-bisimulacija za proizvoljni ordinal α: u nuli imamo svojstvo (at), u sljedbenicima do α svojstva (forth) i (back), a u graničnim ordinalima do α „proširenje po neprekidnosti": relaciju Z_γ na graničnoj razini γ definiramo kao presjek („limes", jer se radi o padajućoj familiji) relacijâ Z_β, za $\beta \in \gamma$.

Tada bi na primjer svjetovi ω i ω^+ u Veltmanovom lancu $\mathit{Vel}\,\mathfrak{C}_{\omega+2}$ bili ω-bisimulirani, ali ne i ω^+-bisimulirani. Standardnim tehnikama teorije skupova može se tada dobiti da se takav „niz" sigurno od nekog mjesta stabilizira, i tako bismo dobili „ordinalnu bisimuliranost" koja se vjerojatno podudara s bisimuliranošću kako smo je definirali.

Malo je teže definirati α-igre za $\alpha \geq \omega$, koje bi karakterizirale tako definiranu α-bisimuliranost — pogotovo uzevši u obzir propoziciju 84. No vjerojatno najteži pojam za generalizaciju preko ω je modalna ekvivalencija, odnosno modalna dubina formula — za to svakako treba proširivati IL jezik i dodavati nove konstrukcije pomoću kojih se izgrađuju formule. Ipak, zamislivo je da se svi ti pojmovi mogu uvesti, te da veze između njih budu iste ili vrlo slične pronađenim vezama između n-ekvivalentnosti, n-bisimuliranosti i n-igara za prirodne n.

Tu treba spomenuti i svojstvo konačnosti modela, koje je dokazano za logike IL i ILM, ali je otvoren problem za neka druga proširenja, poput ILM_0. Naime, dubina svijeta na kojem formula vrijedi u uskoj je vezi s modalnom dubinom same formule, što efektivno znači da dok promatramo jednu IL formulu, uvijek možemo „odrezati" model na nekoj konačnoj dubini.

Naravno, za potpun dokaz svojstva konačnosti modela potrebna je i tehnika „raspetljavanja" (pretvaranja modela u stablo), te „rezanja širine", koja predstavlja veliki problem u općenitim Veltmanovim modelima i zapravo se niti ne može provesti u općem slučaju bez identificiranja nekih svjetova (detaljnije o metodi konstrukcije konačnih modela za IL može se vidjeti u [**17**]). Ipak, generaliziranjem gornjih pojmova preko ω mogao bi se dobiti bolji uvid u granicu konačnog i beskonačnog u Veltmanovim modelima, što bi moglo voditi do jednostavnijeg dokaza svojstva konačnosti modela za IL, ili čak možda za neka njena proširenja za koja je to trenutno otvoren problem.

Bibliografija

[1] S. N. Artemov and B. Silver. Arithmetically complete modal theories. In *Six papers in logic*, American Mathematical Society translations. American Mathematical Society, 1987.

[2] Alessandro Berarducci. The interpretability logic of Peano arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, 55(3):1059–1089, 1990.

[3] Marta Bílková, Dick de Jongh, and Joost J. Joosten. Interpretability in PRA. *Annals of Pure and Applied Logic*, 161(2):128–138, 2009. Festschrift on the occasion of Franco Montagna's 60th birthday.

[4] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic.* Cambridge University Press, 2001.

[5] George Boolos. On the nonexistence of certain normal forms in the logic of provability. *The Journal of Symbolic Logic*, 47(3):638–640, 1982.

[6] René de Jonge. IL-modellen en bisimulaties. *preprint X-2004-06, ILLC, Amsterdam*, 2004.

[7] Dick de Jongh and Giorgi Japaridze. Logic of provability. In S. Buss, editor, *Handbook of Proof Theory*, pages 475–546. Elsevier, 1998.

[8] Dick de Jongh and Frank Veltman. Provability logics for relative interpretability. In P. P. Petkov, editor, *Mathematical Logic: Proceedings of the Heyting 1988 Summer School in Varna, Bulgaria*, pages 31–42. Plenum Press, 1990.

[9] Andrzej Ehrenfeucht. An application of games to the completeness problem for formalized theories. *Fundamenta Mathematicae*, 49:129–141, 1961.

[10] V. Goranko and M. Otto. Model theory of modal logic. In P. Blackburn, F. Wolter, and J. van Benthem, editors, *Handbook of Modal Logic*, pages 255–325. Elsevier, 2006.

[11] E. Goris and J. J. Joosten. *Modal matters in interpretability logics.* Logic Group preprint series. Department of Philosophy, Utrecht University, 2004.

[12] E. Goris and J. J. Joosten. A new principle in the interpretability logic of all reasonable arithmetical theories. *Logic Journal of IGPL*, 19(1):1–17, 2011.

[13] P. Hájek and V. Švejdar. A note on the normal form of closed formulas of interpretability logic. *Studia Logica*, 50(1):25–28, 1991.

[14] Thomas Jech. *Set Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[15] J. J. Joosten and A. Visser. How to derive principles of interpretability logic, A toolkit. *Liber Amicorum for Dick de Jongh. ILLC, Amsterdam*, 2004.

[16] Joost J. Joosten. Towards the interpretability logic of all reasonable arithmetical theories. Master's thesis, University of Amsterdam, 1998.

[17] Joost J. Joosten. *Interpretability formalized.* PhD thesis, Department of Philosophy, Utrecht University, 2004.

[18] Jeff Paris and Leo Harrington. A mathematical incompleteness in Peano arithmetic. In Jon Barwise, editor, *Handbook of Mathematical Logic*, volume 90 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, pages 1133–1142. Elsevier, 1977.

[19] Robert Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel Journal of Mathematics*, 25:287–304, 1976. 10.1007/BF02757006.

[20] Albert Visser. Interpretability logic. In P. P. Petkov, editor, *Mathematical Logic: Proceedings of the Heyting 1988 Summer School in Varna, Bulgaria*, pages 175–209. Plenum Press, 1990.

[21] Albert Visser. An overview of interpretability logic. In *Advances in modal logic, Vol. 1 (Berlin, 1996)*, volume 87 of *CSLI Lecture Notes*, pages 307–359. CSLI Publ., Stanford, CA, 1998.

[22] Domagoj Vrgoč and Mladen Vuković. Bisimulations and bisimulation quotients of generalized Veltman models. *Logic Journal of IGPL*, 18(6):870–880, 2010.

[23] Domagoj Vrgoč and Mladen Vuković. Bisimulation quotients of Veltman models. *Reports on Mathematical Logic*, to appear.

[24] Mladen Vuković. Some correspondences of principles in interpretability logic. *Glasnik Matematički*, 31:193–200, 1996.

[25] Mladen Vuković. The interpretability logic ILF. *Mathematical Communications*, 2:205–210, 1997.

[26] Mladen Vuković. The principles of interpretability. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 40:227–235, 1999.

[27] Mladen Vuković. A note on semantics of the interpretability logic IL(KW1). *Bulletin of the Section of Logic*, 32(3):109–115, 2003.

Sažetak

Rad se sastoji od tri dijela, od kojih je prvi uvodni. U prvom dijelu uvodimo logiku interpretabilnosti IL, reducirani jezik za nju, njenu sintaksu i aksiome, te dokazujemo neke rezultate unutar IL sintaktički, glavni od kojih je teorem o supstituciji.

U drugom dijelu detaljno pratimo problem normalnih formi zatvorenog fragmenta neke modalne logike, i njegovo postojeće rješenje za logiku GL primjenom traga, te uvodimo pojam generaliziranog traga za logiku IL, služeći se pojmom dubine. Pomoću generaliziranog traga dokazujemo teorem o eliminaciji operatora $\rhd$, koji karakterizira (ne sve) situacije u kojima su IL formule ekvivalentne nekim GL formulama, te navodimo nekoliko važnih specijalnih slučajeva tipova takvih formula.

Za primjenu tehnike generaliziranog traga na globalnu ekvivalenciju, dokazujemo teorem o generalizaciji, koji karakterizira globalnu ekvivalenciju formula preko lokalne ekvivalencije njihovih generalizacija. Također pokazujemo primjer gdje operator $\rhd$ sigurno nije eliminabilan. Još jedan od rezultata u ovom dijelu je teorem o kratkim normalnim formama za GL.

U trećem dijelu promatramo bisimulacije i n-bisimulacije Veltmanovih modela odnosno okvira, kao i veze s bisimulacijama i n-bisimulacijama GL struktura odnosno okvira. Opisujemo tehniku konstrukcije Veltmanovih modela iz GL struktura, te navodimo kako se može „podići" n-bisimulacija s GL okvira u Veltmanove okvire, služeći se pojmom dubine, ovaj put generalizirane preko ω na proizvoljne ordinale. Veza tako generalizirane dubine svjetova (koja može biti beskonačna) i modalne dubine IL formula (koja mora biti konačna) sugerira da „rezanje u dubinu", postupak prilikom uobičajenog dokaza svojstva konačnosti modela, prolazi i na Veltmanovim modelima.

Također definiramo lance i Veltmanove lance, te pomoću njih navodimo primjer koji pokazuje da je slikovna konačnost nužni uvjet za Hennessy-Milnerov teorem, čak i u zatvorenom fragmentu od IL. Karakteriziramo i globalne bisimulacije pomoću pojma dubine okvira.

Za kraj dajemo karakterizaciju bisimuliranosti i n-bisimuliranosti svjetova u Veltmanovim modelima preko pobjedničkih strategija u određenim igrama za dva igrača, koje su analogne igrama kakve postoje za utvrđivanje bisimuliranosti u Kripkeovim strukturama. Dokazujemo da svaka takva igra završava u konačno mnogo poteza, te koristimo rezultate iz prethodnih točaka da bismo dokazali da, usprkos tome, posjedovanje pobjedničke strategije u igri ograničenoj na n poteza za svaki n ne mora povlačiti posjedovanje pobjedničke strategije u neograničenoj igri — jer strategija ne mora biti uniformna s obzirom na n.

Summary

The thesis contains three parts, first of which is introductory. In the first part we introduce Interpretability logic IL, its reduced language, syntax and axioms, and we prove some results in IL syntactically, main result here being the Substitution theorem.

In the second part we follow the problem of normal forms for closed fragment of some modal logic in detail, studying its existing solution for logic GL by trace of formulas, and we define generalized trace for logic IL, by using depth up to ω. Using generalized trace we prove the $\rhd$-elimination theorem, that characterizes some situations where IL formulas are equivalent to some GL formulas, and we provide some important special cases of such formulas.

To apply the generalized trace technique to global equivalence, we prove the Generalization theorem, that reduces global equivalence of formulas to local equivalence of their generalizations. We also show an example where $\rhd$ cannot be eliminated. One more result here is the Short GL normal forms theorem.

In the third part we study bisimulations and n-bisimulations of Veltman models / frames, and we connect them to bisimulations and n-bisimulations of GL structures / frames. We describe a technique to construct Veltman models from GL ones, with focus on „lifting" n-bisimulations from GL frames to corresponding Veltman frames, by using depth generalized beyond ω into infinite ordinals. Connection between such generalization of world depth (which can be infinite) and modal formula depth (which must be finite for IL formulas) suggests that "depth cutting," a procedure used in usual proofs of finite modal property, can be performed in Veltman models, too.

We also define chains and Veltman chains, and use them to construct an example which shows that finite image property is essential for Hennessy-Milner theorem, even in the closed fragment of IL. We characterize global bisimulations using ordinal depth of frames, too.

Finally, we characterize bisimilarity and n-bisimilarity of worlds in Veltman models by winning strategies in specially constructed games

for two players, analogous to (but more complicated than) bisimulation games for general Kripke structures. We show that every such game must end in finitely many moves, and using results from previous sections, we show that nonetheless having a winning strategy for n-game for every n does not amount to having a winning strategy for an unbounded game—for strategy can depend on n.

Životopis

Rođen sam u Sisku, 15. lipnja 1980. godine. Prvo desetljeće života proveo sam u Petrinji, gdje sam završio prvih 5 razreda osnovne škole. Rat me otjerao iz Petrinje u srpnju 1991. godine, i nakon polugodišnjeg lutanja Hrvatskom i Slovenijom, u veljači 1992. godine s obitelji dolazim u Pulu, gdje sam završio osnovnu školu te prirodoslovno-matematičku gimnaziju. U rujnu 1998. godine dolazim u Zagreb, na studij matematike pri Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta.

Diplomirao sam u listopadu 2002. godine na smjeru teorijske matematike, pod mentorstvom doc. dr. sc. Mladena Vukovića, s temom *Banach-Tarskijev „paradoks”*. U prosincu iste godine zaposlen sam kao znanstveni novak na projektu Matematička logika i primjena, voditelja prof. dr. sc. Zvonimira Šikića, te upisujem poslijediplomski studij. Magistrirao sam u siječnju 2007. godine, s temom *Nezavisnost i relativna konzistentnost aksioma izbora i hipoteze kontinuuma.* Od tada redovno sudjelujem u radu Logic Colloquiuma (Wrocław, Bern, Sofija, Pariz), gdje sam održao predavanja s temama *Changing the order of summation for series beyond* ω, te *Towards the normal form theorem for Interpretability logic.*

Kao asistent držao sam vježbe iz kolegija Elementarna matematika, Računarski praktikum 1, Linearna algebra, Uvod u matematiku, Matematička logika, te Teorija skupova. Član sam Zavoda za algebru i osnove matematike, te tajnik Seminara za matematičku logiku i osnove matematike. Oženjen sam i otac jednog djeteta.