Petnaesto predavanje iz Teorije skupova 03. 02. 2006.

Kratki rezime prošlog predavanja:
Veći dio predavanja bavili smo se aritmetikom ordinalnih brojeva.
Definirali smo pojam kardinalnog broja, te pojam kardinalnog broja svakog skupa.
Zatim, smo definirali operacije na kardinalnim brojevima, te smo istaknuli njihova osnovna svojstva.

Danas ćemo prvo promatrati još neke pojmove vezane uz kardinalne brojeve.
Nakon toga ćemo se u većem dijelu predavanja baviti aksiomom izbora.
Na kraju ćemo dati komentare o Zermelo–Fraenkelovoj teoriji skupova.

Teorem 1 *Za svaki kardinalni broj λ vrijedi $\lambda < 2^\lambda$.*
(Uređaj je naslijeđen s ordinalnih brojeva).

Primijetimo da je to u biti tvrdnja Cantorovog osnovnog teorema teorije skupova.

Teorem 2 *Ako su λ i μ kardinalni brojevi takvi da vrijedi $\lambda \leq \mu$ i $\mu \leq \lambda$ tada imamo $\lambda = \mu$.*

To je zapravo Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem kojeg smo dokazali u poglavlju o naivnoj teoriji skupova.

Lema 1 *Za svaki kardinalni broj λ postoji kardinalni broj koji je neposredni sljedbenik od λ. Neposredni sljedbenik od λ označavamo sa λ^+.*

Dokaz. Iz teorema 1 slijedi da je klasa $\{\mu : \mu$ je kardinalni broj i $\lambda < \mu\}$ neprazna. To je posebno klasa ordinalnih brojeva, pa sadrži najmanji element.

Lema 2 *Ako je S skup kardinalnih brojeva tada je $\cup S$ također kardinalni broj.*
(Sjetimo se da za svaki skup A ordinalnih brojeva vrijedi $\sup A = \cup A$.)

Dokaz. Prije smo bili dokazali da je $\cup S$ ordinalni broj. Pretpostavimo da je $k(\cup S) < \cup S$. Pošto je relacija uređaja po definiciji zapravo relacija $\in$ tada postoji $\gamma \in S$ takav da je $k(\cup S) < \gamma$. No, očito je $\gamma \subseteq \cup S$, pa imamo $\gamma = k(\gamma) \leq k(\cup S) < \gamma$, što je kontradikcija. Q.E.D.

Primjenom prethodne leme slijedi da za svaki skup S kardinalnih brojeva postoji kardinalni broj koji je supremum skupa S. Supremum skupa S označavamo sa $\sup S$.

Propozicija 1 *Klasa svih kardinalnih broejva Cn je prava klasa.*

Dokaz. Pretpostavimo da je klasa Cn skup. Tada iz leme 2 znamo da je $\sup Cn \in Cn$. Iz leme 1 slijedi da postoji $\mu \in Cn$ takav da je $\sup Cn < \mu$, što je kontradikcija.

Definicija 1 *Sa $\aleph$ označavamo funkciju na klasi svih ordinalnih brojeva On na klasu svih beskonačnih kardinalnih brojeva koja je pomoću rekurzije definirana ovako:*

$$\aleph_0 = \omega$$

$$\aleph_{\beta+1} = \aleph_\beta^+$$

$$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta : \beta < \alpha\}, \quad \textit{ako je } \alpha \textit{ granični ordinalni broj.}$$

(Uočite da nam leme 1 i 2 garantiraju da je prethodna definicija dobra.)

Prirodno se postavlja pitanje da li za svaki beskonačni kardinalni broj λ postoji ordinalni broj α takav da je $\lambda = \aleph_\alpha$. Može se pokazati da je ta tvrdnja ekvivalentna s aksiomom izbora.

Kada želimo istaknuti da ordinalni broj ω promatramo kao kardinalni broj tada umjesto ω pišemo $\aleph_0$. Analogno za ostale kardinalne brojeve. Ta razlika u notaciji nam je posebno važna kada želimo naglasiti radi li se o ordinalnoj ili kardinalnoj aritmetici.

Sada **Cantorovu hipotezu kontinuuma** možemo zapisati ovako: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$,
odnosno opća cantorova hipoteza glasi: za svaki ordinalni broj α vrijedi:

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$$

(Bez aksioma izbora ne možemo dokazati da je $2^{\aleph_\alpha}$ alef. Vrlo se malo zna o $2^{\aleph_\alpha}$ i $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$).

Prilikom razmatranja aksioma izbora dokazat ćemo da su zbrajanje i množenje kardinalnih brojeva trivijalne operacije, tj. da vrijedi:

ako su α i β ordinalni brojevi takvi da je $\alpha \leq \beta$. Tada vrijedi:

$$\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$$

Prijedlog literature o kardinalnim brojevima:

1. J. D. Monk, Set Theory, skripta, Internet
2. **M. Holz, K. Steffens, E. Weitz, Introduction to Cardinal Arithmetic, Birkhäser, 1999.**
3. T. Jech, Set Theory, Springer–Verlag, ...
4. W. Just, M. Weese, Discovering modern Set Theory I, American Mathematical Society, 1995.
5. I. Petković, Ordinalni i kardinalni broejvi, diplomski rad, 1999.

2.6. Aksiom izbora

Na samom početku predavanja bili smo naveli taj aksiom. Sada ga ponavljamo:

> *Neka je A skup čiji su elementi neprazni u parovima disjunktni skupovi. Tada postoji skup B tako da za sve $x \in A$ vrijedi da je $x \cap A$ jednočlan skup.*

Aksiom izbora kratko ćemo označavati sa **AC** (eng. axiom of choice).

Prisjetimo se da smo aksiom izbora koristili prilikom dokaza da svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup, zatim da je prebrojiva unija prebrojivih skupova također prebrojiv skup, prilikom dokaza teorema enumeracije, te definicije kardinalnog broja proizvoljnog skupa.

Zatim, bili smo u jednom zadatku naveli **aksiom prebrojivog izbora**:

> *ako je $\{A_0, A_1, A_2, \ldots\}$ prebrojiv skup nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni tada postoji niz (a_n) takav da je za sve $n \in \mathbb{N}$ ispunjeno da je $a_n \in A_n$.*

Taj aksiom se često koristi u **matematičkoj analizi**.
Kao malo ilustraciju primjene aksioma prebrojivog izbora dokazujemo da je za prebrojivu uniju skupova mjere nula mjera također nula. Neka je $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv skup čiji su elementi skupovi mjere nula. Neka je $\epsilon > 0$ proizvoljan. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ neka je O_n neki otvoreni nadskup od A_n takav da je $\mu(O_n) \leq \epsilon/2^{n+1}$ (tu koristimo aksiom prebrojivog izbora). Tada je $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum\limits_{n\in N} \mu(O_n) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \epsilon/2^{n+1} = \epsilon$.

Aksiom izbora je jedini aksiom teorije skupova koji se **eksplicitno navodi prilikom korištenja u matematici**. Pomoću AC se dokazuju se npr. sljedeće činjenice:

1. Svaki vektorski prostor ima algebarsku bazu.
2. Svake dvije baze vektorskog prostora su ekvipotentne.
3. Svako polje ima algebarski zatvoreno proširenje.
4. Teorem Tihonova: Produkt kompaktnih topoloških prostora je kompaktan.
5. Teorem o ultrafiltru: Svaki pravi filtar je sadržan u nekom ultrafiltru.
6. Ekvivalentnost Heineove i Cauchyeve definicije neprekidnosti funkcije.

Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne s aksiomom izbora: Hahn–Banachov teorem iz funkcionalne analize, teorem kompaktnosti u matematičkoj logici, Löwenheim–Skolemov teorem, ...

Aksiom izbora je jedan od najviše razmatranih aksioma u matematici. Možda je više diskusije izazvao samo **Euklidov peti postulat o paralelama**. Aksiomi teorije skupova omogućavaju zasnivanje matematike na isti način kako su Euklidovi postulati omogućili zasnivanje Euklidove geometrije, te su pitanja vezana uz AC ista kao i pitanja vezana uz Euklidov peti postulat:

1. Može li se izvesti iz ostalih aksioma?
2. Je li konzistentan s drugim aksiomima?
3. Moramo li ga prihvatiti kao aksiom teorije?

Zašto je AC tako (bio) sporan?
Koje mu je sada mjesto u mat. logici i matematici?
(O mjestu AC u mat. logici daje odgovor Gödelov teorem o nezavisnosti AC od ZF).
U matematici se navodi na samom početku izreke teorema da se u dokazu koristi AC (ili neka ekvivalentna tvrdnja).

Ako su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi tada iz teorema o uzastopnom prebrojavanju slijedi da je skup $A_1 \times \ldots \times A_n$ također konačan, odnosno da postoji samo konačno mnogo "izbora" $(a_1, \ldots, a_n)$ takvih da je $a_i \in A_i$. To znači da nam za konačne familije konačnih skupova ne treba aksiom izbora.

Glavna kritika aksioma izbora je vezana uz njegovu **nekonstruktivnost**, tj. AC tvrdi egzistenciju nekog skupa, ali ne daje nikakav algoritam kako taj skup konstruirati. Zgodan primjer koji lijepo ilustrira nekonstruktivnost aksioma izbora je Vitalijev skup.

Primjer 1 Vitalijev skup
Na zatvorenom segmentu $[0,1]$ *definiramo binarnu relaciju* $\sim$ *na sljedeći način:* $x \sim y$ *ako i samo ako* $x - y \in \mathbb{Q}$. *Lako je provjeriti da je* $\sim$ *relacija ekvivalencije. Kvocijentni skup* $[0,1]/\sim$ *je familija u parovima disjunktnih skupova. Iz AC slijedi da postoji skup koji sadrži točno po jedan element iz svake klase ekvivalencije. Taj skup se naziva Vitalijev skup. Nemamo nikakvu predodžbu koji je to skup. Ne znamo čak niti jedan njegov element.*

Cilj nam je navesti neke ekvivalentne formulacije aksioma izbora, te ekvivalentne tvrdnje (Zornova lema, Hausdorffov princip maksimalnosti,...)
Sada navodimo izreku aksioma izbora koju ćemo koristiti u daljnjim razmatranjima.

Aksiom izbora [AC]
Neka je $\{A_i : i \in I\}$ *neprazna familija u parovima disjunktnih nepraznih skupova. Tada postoji skup* B *takav da je* $B \cap A_i$ *jednočlan skup za sve* $i \in I$.
Skup B *se naziva* **izborni skup** *za familiju* $\{A_i : i \in I\}$.

Pretpostavka da su članovi familije u parovima disjunktni je nužna. Promotrimo familiju skupova $\mathcal{A} = \{\{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}$ čiji članovi nisu u parovima disjunktni. Očito ne postoji izborni skup za familiju $\mathcal{A}$.

Zadatak 1. Možemo li teoriji skupova ZF bez aksioma izbora izabrati (tj. dokazati da postoji) jedan element u:

1. nekom konačnom skupu? (DA)
2. nekom beskonačnom skupu? (DA)
3. svakom članu beskonačne familije jednočlanih skupova? (DA)
4. svakom članu beskonačne familije čiji svaki skup je konačan? (NE)

5. svakom članu konačne familije skupova čiji svaki skup je beskonačan? (DA)
6. svakom članu beskonačne familije čiji svaki skup sadrži konačno mnogo realnih brojeva? (DA)

Vidi: http://db.uwaterloo.ca/ alopez-o/math-faq/math-faq.html

Definicija 2 *Neka je* $\{A_i : i \in I\}$ *neka familija skupova.* **Kartezijev produkt familije** *je skup*

$$\{f \mid f : I \to \cup_{i\in I} A_i, \quad \textit{za sve} \;\; i \in I \;\; \textit{je} \;\; f(i) \in A_i\}.$$

Kartezijev produkt familije skupova označavamo sa $\prod\limits_{i\in I} A_i$.

Prisjetimo se definicije Kartezijevog produkta dva skupa:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

No, skup $A \times B$ možemo identificirati na očiti način sa skupom

$$\{f \mid f : \{1, 2\} \to A \cup B, \; f(1) \in A, f(2) \in B\}.$$

Teorem 3 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne s aksiomom izbora:*

$[AC]_1$ *Neka je* $\{A_i : i \in I\}$ *neprazna familija nepraznih skupova.*
Tada postoji $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ *takva da je* $f(i) \in A_i$ *, za sve* $i \in I$.
Funkcija f *se naziva* **funkcija izbora**.

$[AC]_2$ *Neka je* $A \neq \emptyset$. *Tada postoji funkcija* $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$
takva da je $f(B) \in B$, *za sve* $\emptyset \neq B \subseteq A$.

$[AC]_3$ *Neka je* $A \neq \emptyset$ *i* $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ *neka particija skupa* A.
Tada postoji funkcija $g : \mathcal{A} \to A$ *takav da je* $g(A_i) \in A_i$, *za sve* $i \in I$.

$[R]$ **Russellov multiplikativni aksiom**
Neka je $\{A_i : i \in I\}$ *familija skupova. Ako je* $\prod\limits_{i\in I} A_i$ *prazan skup,*
tada postoji $i \in I$ *takav da je* $A_i = \emptyset$.

Dokaz. Skica implikacija kako ćemo ih redom dokazivati: $[AC] \Rightarrow [AC]_1 \Rightarrow [AC]_2 \Rightarrow [AC]_3 \Rightarrow [R] \Rightarrow [AC]$.
$\underline{[AC] \Rightarrow [AC]_1}$ Neka je $\{A_i : i \in I\}$ neprazna familija nepraznih skupova. Za svaki $i \in I$ definiramo $B_i = A_i \times \{i\}$. Uočimo da je za sve $i \in I$ skup $B_i \neq \emptyset$, te je $B_i \cap B_j = \emptyset$, za sve $i \neq j$. Primjenom [AC] na familiju $\{B_i : i \in I\}$ slijedi da postoji skup B takav da je $B \cap B_i$ jednočlan skup za sve $i \in I$. Neka je $a_i \in \bigcup_{i\in I} A_i$ takav da je $B \cap B_i = \{(a_i, i)\}$. Definiramo funkciju $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ sa $f(i) = a_i$, za sve i. Očito je $f(i) \in A_i$, za sve $i \in I$.

$\underline{[AC]_1 \Rightarrow [AC]_2}$ Neka je A neprazan skup. Tada je $\{B : B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}\}$ neprazna familija nepraznih skupova. Primjenom $[AC]_1$ slijedi da postoji funkcija

$$f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup_{B \in \mathcal{P}(A)\setminus\{\emptyset\}} B, \quad \text{tako da vrijedi } f(B) \in B, \text{ za sve } B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \; .$$

$[AC]_2 \Rightarrow [AC]_3$ Neka je $A \neq \emptyset$ i $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ neka particija skupa A. Iz $[AC]_2$ slijedi da postoji funkcija $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ takva da vrijedi $f(B) \in B$, za sve $B \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Pošto je za svaki $i \in I$ skup $A_i \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, tada za sve $i \in I$ vrijedi $f(A_i) \in A_i$. To znači da za restrikciju funkcije f na $\mathcal{A}$ vrijedi traženo svojstvo.

$[AC]_3 \Rightarrow [R]$ Neka je $\{A_i : i \in I\}$ neka familija skupova. Pretpostavimo da je za svaki $i \in I$ skup A_i neprazan. Za svaki $i \in I$ definiramo $B_i = A_i \times \{i\}$. Tada je $\{\mathcal{B} = (B_i : i \in I\}$ particija skupa $B = \bigcup_{i \in I} B_i$. Iz $[AC]_3$ slijedi da postoji funkcija $g : \mathcal{B} \to B$ tako da za sve $i \in I$ vrijedi $g(B_i) \in B_i$. To znači da za sve $i \in I$ postoji $a_i \in A_i$ tako da je $g(B_i) = (a_i, i)$. Sada definiramo $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ sa $f(i) = a_i$. Iz toga slijedi da je $\prod\limits_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

$[R] \Rightarrow [AC]$ Neka je $\{A_i : i \in I\}$ neprazna familija nepraznih skupova koji su u parovima disjuktni. Iz Russellovog multiplikativnog aksioma slijedi da je $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, tj. postoji $f : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$ takva da za sve $i \in I$ vrijedi $f(i) \in A_i$. Sada traženi izborni skup definiramo sa $B = \{f(i) : i \in I\}$.
Q.E.D.

Bez AC ne možemo dokazati da je za proizvoljnu prebrojivu familiju $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ dvočlanih skupova Kartezijev produkt $\prod A_n$ neprazan.
neprazan.
No, ako je $A = \{0, 1\}$ tada je $A^\omega \neq \emptyset$, jer sadrži npr. nul–niz.
Pazite! U prvi tren čini se da je sljedeće zaključivanje pravilno: pošto je svaki A_n ekvipotentan sa A tada je skup A^ω ekvipotentan sa $\prod A_n$. Greška u ovom zaključivanju je sljedeća: za konstrukciju takve bijekcije za svaki n moramo izabrati jednu od dvije bijekcije između A_n i A.
Russell je kao ilustraciju primjene AC naveo prebrojive familije parova cipela i prebrojive familije parova čarapa. Za prvu familiju imamo egzistenciju izborne funkcije bez primjene AC, dok nam je za izbor prebrojivo čarapa, pri čemu iz svakog para biramo točno jednu čarapu, potreban aksiom izbora.

Teorem 4 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne sa [AC]:*

a) **Zornova lema***: Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup koji ima svojstvo da svaki lanac iz A ima gornju među u A. Tada $(A, <)$ ima barem jedan maksimalni element.*

b) **Hausdorffov princip maksimalnosti***: Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Tada za svaki lanac L od A postoji maksimalni lanac koji ga sadrži.*

c) **Zermelov teorem***: Svaki skup se može dobro urediti, tj. za svaki skup A postoji relacija $R \subseteq A \times A$ takav da je (A, R) dobro uređen skup.*

d) Ako su A i B proizvoljni skupovi tada vrijedi $k(A) \leq k(B)$ ili $k(B) \leq k(A)$.

e) **Teorem Tarskog***: Ako je λ beskonačni kardinalni broj tada je $\lambda^2 = \lambda$.*

Radi ilustracije dokazujemo neke jednostavnije implikacije.

Zornova lema povlači **Hausdorffov princip maksimalnosti.**
Neka je $(A,<)$ parcijalno uređen skup i $L \subseteq A$ neki lanac. Neka je $\mathcal{L}$ skup svih lanaca L' od A za koje vrijedi da je $L \subseteq L'$. Očito je $(\mathcal{L}, \subset)$ parcijalno uređen skup koji zadovoljava uvjete Zornove leme (ako je $\mathcal{A}$ neki lanac od $\mathcal{L}$ tada je $\cup\mathcal{A}$ lanac koji je jedna gornja međa za $\mathcal{A}$). Iz Zornove leme slijedi da parcijalno uređen skup $(\mathcal{L}, \subset)$ sadrži maksimalni element.

Zermelov teorem povlači usporedivost kardinalnih brojeva.
Neka su A i B dva proizvoljna skupa. Iz Zermelovog teorema slijedi da postoje binarne relacije $R \subseteq A \times A$ i $Q \subseteq B \times B$ takve da su skupovi (A,R) i (B,Q) dobro uređeni. Iz teorema o usporedivosti dobro uređenim skupovima slijedi da je ispunjeno barem jedno od: A je sličan s B, A je sličan nekom početnom komadu od B, ili obratno. Tada posebno slijedi da postoji injekcija iz A u B, ili obratno.

Zermelov teorem povlači **aksiom izbora**.
Neka je $\{A_i, i \in I\}$ neprazna familija nepraznih skupova koji su u parovima disjunktni. Iz Zermelovog teorema slijedi da se svaki skup A_i može dobro urediti, tj. postoji $R_i \subseteq A_i \times A_i$ tako da je (A_i, R_i) dobro uređen skup. Za svaki $i \in I$ označimo sa a_i najmanji element od A_i. Tada je $B = \{a_i : i \in I\}$ jedan izborni skup za danu familiju.

Zadatak 2. Dokažite da Zornova lema povlači Zermelov teorem.
Literatura:
Drake, Singh; Just, Weese; E. Mendelson, Set theory and related topics, Schaumm's Outline Series; Rubin, Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice, North–Holland, 1985.

Zadatak 3. Dokažite da iz aksioma izbora slijedi da za sve kardinalne brojeve $\lambda \geq \aleph_0$ vrijedi $\lambda^2 = \lambda$.
Literatura: K. Devlin, Fundamentals of Contemporary Set Theory

Korolar 1 *Za sve kardinalne brojeve $\lambda \neq 0$ i $\mu \neq 0$ od kojih je barem jedan beskonačan vrijedi:*

$$\lambda \ + \ \mu = \lambda \cdot \mu = \max\{\lambda, \mu\}.$$

Dokaz. Primijetimo prvo da iz AC po gornjem teoremu slijedi da postoji maksimum skupa $\{\lambda, \mu\}$.
Radi određenosti neka je λ maksimum tog skupa.
Očito je $\lambda \leq \lambda + \mu$. Kako bi dokazali obratnu nejednakost, prvo primijetimo:

$$\lambda \ + \ \mu \leq \lambda \cdot \mu + \lambda \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda \ + \lambda \cdot \lambda = 2\lambda^2 = 2\lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda^2 = \lambda$$

Iz Cantor, Schröder, Bernsteinovog teorema slijedi da je $\lambda \ + \ \mu = \lambda$.

Očito je $\lambda \cdot \mu \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda^2 = \lambda$, te $\lambda \leq \lambda \cdot \mu$.
Iz Cantor, Schröder, Bernsteinovog teorema slijedi $\lambda \cdot \mu = \lambda$. Q.E.D.

Zadatak 4.*. Dokažite da aksiom izbora povlači Zornovu lemu.
Literatura:
Drake, Singh; Jech; Papić; Medelson, Set Theory and Related Topics, Schaumm's Outline Series
Weston, A short proof of Zorn's lemma, Archiv der Mathematik, 8 (1954), 279
T. Szele, On Zorn's lemma, Publications Math. Debrecen, 1 (1949/50), 254–256

Zadatak 5. Dokažite da opća hipoteza kontinuuma povlači aksiom izbora.
Literatura:
L. Gillman, Two Classical Surprises Concerning the Axiom of Choice and the Continuum Hypothesis, American Mathematical Monthly, 109, June–July 2002.

Neke posljedice aksioma izbora su zbunjujuće, a neke čak paradoksalne.
Iz aksioma izbora slijedi Zermelov teorem o dobrom uređaju, tj. da se svaki skup može dobro urediti. Iz toga posebno slijedi da se može dobro urediti skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Znate li neki dobar uređaj na skupu $\mathbb{R}$? Jedna paradoksalna posljedica aksioma izbora je sljedeći teorem.

Teorem 5 *(Banach–Tarski, 1924.)*
Neka su k i K kugle u $\mathbb{R}^3$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ i particija $k_1, \ldots, k_n$ od k, te postoji particija $K_1, \ldots, K_n$ od K, tako da je za sve $i = 1, \ldots, n$ skup k_i izometričan sa K_i.

Primijetite da skupovi k_i i K_i nisu izmjerivi.
Literatura:
S. Wagon, The Banach–Tarski Paradox, Cambridge University Press, 1999.
V.Čačić, Banach–Tarskijev paradoks, diplomski rad, PMF–Zagreb, 2002.

Napomena 1 *K. Gödel je 1939. godine dokazao da ako pretpostavimo da je teorija ZF konzistentna tada je i teorija ZF+AC konzistentna.*
P. Cohen je 1963. godine dokazao da se u teoriji ZF (bez aksioma izbora) ne može dokazati AC.
Literatura:
Drake, Singh; Kunen; Jech; V. Čačić, magistarski rad

2.7. Zermelo–Fraenkelova teorija skupova

Zermelo–Fraenkelova teorija skupova, ili kratko ZF, je jedna teorija prvog reda. Formule teorije ZF gradimo pomoću varijabli, lgoičkih veznika i kavnatifikatora, te jednog dvomjesnog relacijskog simbola, kojeg označavamo sa $\in$. Prisjetimo se koje sve aksiome teorije ZF smo naveli:

askiom izbora

aksiom ekstenzionalnosti

aksiom praznog skupa

aksiom para

aksiom unije

aksiom partitivnog skupa

aksiom regularnosti ili dobre utemeljenosti

aksiom beskonačnosti

shema aksioma separacije

Danas ćemo navesti posljednji aksiom teorije ZF. To je **shema aksioma zamjene**.

Iz aksioma partititvnog skupa slijedi da možemo izgraditi sljedeći niz skupova:

$$A_1 = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad A_2 = \mathcal{P}(A_1), \quad A_3 = \mathcal{P}(A_2), \ldots$$

No, niti jedan od navedenih aksioma nam **ne omogućava** da zaključimo da je $S = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ skup.

Općenito, aksiomi koje smo do sada naveli još uvijek ne daju mogućnost izgradnje svih skupova koje trebamo, odnosno koristimo u matematici. Iz tog se razloga dodaje još jedan aksiom, koji se intuitivno može izreći ovako:

> **ako je na skupu A definirana funkcija f i za svaki element skupa $a \in A$ je $f(a)$ skup, tada je $B = \{f(a) : a \in A\}$ također skup.**

Formalni zapis sheme aksioma zamjene je sljedeći:

$$\forall t_1 \ldots \forall t_k \Big(\forall x \exists ! y F(x, y, t_1, \ldots t_k) \to$$

$$\forall u \exists v \forall z (z \in v \leftrightarrow \exists w (w \in u \wedge F(w, z, t_1, \ldots, t_k))) \Big),$$

gdje je F proizvoljna formula teorije ZF, te u i v su različite varijable koje su različite od x, y, z, $t_1, \ldots, t_k$ i w.

U prvom dijelu aksioma je zapisana "funkcionalnost" formule F, tj. ističe se da nas zanimaju formule koje opisuju neku funkciju. Zatim se u drugom dijelu aksioma tvrdi da je slika skupa također skup (tj. ako je u skup tada je i slika skupa u, obzirom na funkciju koju definira formula F, također skup).

Objašnjenje **naziva** sheme aksioma zamjene: Naziva se tako jer se elementi skupa u **zamjenjuju** s elementima skupa v pomoću funkcije F.

Prilikom dokaza teorema enumeracije bili smo naveli da koristimo shemu aksioma zamjene.

Sistem askioma teorije ZF nije nezavisan. Ne promatra se minimalan skup aksioma jer je na ovakav način omogućeno razmatranje više zanimljivih podteorija od ZF.

1. Iz sheme aksioma zamjene slijedi shema aksioma separacije.

2. Iz sheme aksioma separacije slijedi aksiom praznog skupa.

3. Iz sheme aksioma zamjene i aksioma partitivnog skupa slijedi aksiom para.
   Neka je $F(x, y) \equiv (x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = b)$. Iz aksioma partitivnog skupa slijedi da postoji skup $\mathcal{P}^2(\emptyset) = \{\emptyset \{\emptyset\}\}$. Sada primjenom sheme aksioma zamjene na F te na skup $\mathcal{P}^2(\emptyset)$ slijedi egzistencija para $\{a, b\}$.

Što dalje? Navodimo neke moguće teme:

1. nezavisnost aksioma izbora – konstruktibilna hijerahija
2. nezavisnost hipoteze kontinuuma – metoda forcinga
3. Novi aksiomi teorije skupova – Martinov aksiom o determiniranosti igara
4. nedostiživi kardinalni brojevi
5. deskriptivna teorija skupova

(za druge teme vidi npr. Handbook of Set Theory koji je još uvijek dostupan na Internetu)

Ovdje navodimo **Martinov aksiom determiniranosti igara:**

> Neka je X neki skup nizova 0 i 1. Dva igrača, I i II, igraju igru tako da naizmjence biraju 0 ili 1. Igrač I pobjeđuje ako niz pripada X, a inače pobjeđuje II. Aksiom determiniranosti za skup X (oznaka: AD(X)) govori da barem jedna igrač ima pobjedničku strategiju.

Napomena 2 *Primjenom AC slijedi da postoji skup X tako da je AD(X) lažno. U drugu ruku, ZF+AD(X) povlači da je Banach-Tarskijeva dekompozicija nemoguća.*

Literatura vezana uz Martinov aksiom:

1. V. W. Amrek, J. Mycielski, Foundations of Mathematics in Twentith Century, American Math. Monthly, 108(2001), No 3
2. J. Barwise, Handbook of Mathematical Logic
3. S. Feferman, Gödels's program for new axioms: Why, where, how and what?, 1996.
4. S. Feferman, Does Mathematics Need New Axioms?, AMM 106(1999), No2
5. P. Maddy, Beliving the axioms I, JSL 53 (1988), No 2
6. S. Shelah, The Future of Set Theory, Internet
7. J. R. Shoenfield, Martin's axiom, Am. Math. Monthly,
8. J. R. Steel, Mathemaics Needs New Axioms, 2000,
9. A. S. Troelstra, Concepts and axioms, Amsterdam, preprint