Osmo predavanje iz Teorije skupova

25/11/2005

Kratki rezime prethodnog predavanja:
Uređeni skupovi: parcijalno i linearno uređeni; maksimalni i minimalni element; najveći i najmanji element; gornja i donja međa; supremum i infimum; sličnost.
Naveli smo propoziciju o invarijantama sličnosti.

Teorem 1 *Uređajna karekteristika skupa* $\mathbb{Q}$.
Neka je $(A, \prec)$ *linearno uređen skup koji ima sljedeća svojstva:*

a) skup A je prebrojiv;

b) skup A je gust;

c) ne postoji ni najmanji, a ni najveći element skupa A.

Tada je skup $(A, \prec)$ *sličan s* $(\mathbb{Q}, <)$.

Dokaz. Pošto je po pretpostavci skup A prebrojiv tada njegove elemente možemo poredati u niz. Neka je $A = \{a_0, a_1, \ldots\}$ (naravno, ako je $i < j$ tada ne mora biti $a_i \prec a_j$).

Analogno je $\mathbb{Q} = \{q_0, q_1, \ldots\}$.

Definiramo $\varphi : A \to \mathbb{Q}$. Istovremeno s definiranjem funkcije φ definiramo induktivno niz $(e_n) \subseteq A$. (Vidjet ćemo na kraju da je $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = A$).

Neka je $e_0 := a_0$ i $\varphi(e_0) := q_0$. Pretpostavimo da je za neki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definirano $e_0, \ldots, e_{n-1}$ i $\varphi(e_0), \ldots, \varphi(e_{n-1})$. Označimo $E = \{e_0, \ldots, e_{n-1}\}$. Prilikom definicije e_n i $\varphi(e_n)$ razlikujemo dva slučaja:

a) n je neparan broj;

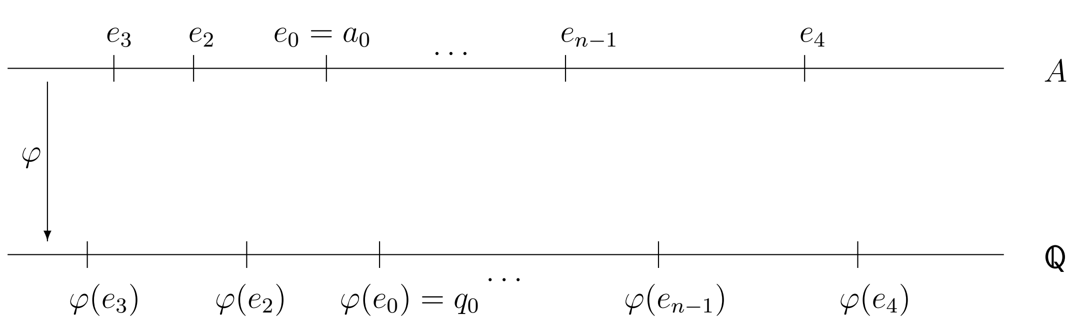
b) n je paran broj.

Promatramo prvo slučaj kada je n neparan (tada "iscrpljujemo" skup A.) Neka je

$$j_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : a_k \in A \setminus E\},$$

te $e_n = a_{j_0}$. (Dakle, e_n je element iz $A \setminus E$ s najmanjim indeksom). Primijetite da j_0 postoji, jer je A beskonačan, a E je konačan, pa je skup $A \setminus E$ neprazan.

Preostalo je definirati $\varphi(e_n)$. Na sljedećoj slici ilustriramo ideju kako ćemo izabrati element $\varphi(e_n)$.



Neka je

$$p_E(e_n) = \{x \in E : x \prec e_n\} \qquad\qquad s_E = \{x \in E : e_n \prec x\}$$

(prethodnici u skupu E od elementa e_n) (sljedbenici ...)

Neka je

$$\begin{aligned} k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : \ & q_k \in \mathbb{Q} \setminus \varphi(E), \\ & q_k > x \quad \text{za sve } \ x \in \varphi(p_E(e_n)), \\ & x < q_k \quad \text{za sve } \ x \in \varphi(s_E(e_n))\} \end{aligned}$$

(Primijetite da takav broj k_0 postoji. Skup $\mathbb{Q} \setminus \varphi(E)$ je neprazan, te pošto po pretpostavci teorema skup A ne sadrži ni najmanji ni najveći element, tada je barem jedan od skupova $p_E(e_n)$ i $s_E(e_n)$ neprazan. Ako su oba od ta dva navedena skupa neprazna tada postoji $q_k \in \mathbb{Q}$ tako da vrijedi

$$\varphi(p_E(e_n)) < q_k < \varphi(s_E(e_n)),$$

pošto je skup $\mathbb{Q}$ gust.)

Sada definiramo $\varphi(e_n) = q_{k_0}$.
Analogno se tretira slučaj b). (Tada "iscrpljujemo" skup $\mathbb{Q}$).

Očito je $A = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Iz konstrukcije nizova (e_n) i $\varphi(e_n)$ slijedi da je time definirana bijekcija $\varphi : A \to \mathbb{Q}$ koja je sličnost. **Q.E.D.**

Iz prethodnog teorema npr. slijedi da je skup svih realnih algebarskih brojeva sa standardnim uređajem sličan skupu $\mathbb{Q}$.

Prije iskaza teorema o uređanoj karakteristici skupa $\mathbb{R}$ uvodimo neke oznake, te definiramo neke pojmove.
Neka je $(S, <)$ linearno uređen skup i $B \subseteq S$, te $a, b \in S$ takvi da je $a < b$.
Uvodimo oznake:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, a\rangle_B = &\ \ \{x : x \in B,\ x < a\} \\ \langle a, \cdot\rangle_B = &\ \ \{x : x \in B,\ a < x\} \\ \langle a, b\rangle_B = &\ \ \{x : x \in B,\ a < x < b\} \end{aligned}$$

Analogno bi definirali segmente $[a, b]_B$, $[a, \cdot\rangle_B$ i $\langle \cdot, b]_B$.
Svaki od navedenih skupova nazivamo **interval** u skupu B.

Definicija 1 *Neka je $(S, <)$ linearno uređen skup. Svaku particiju skupa S oblika $S = A \cup B$ koja ima svojstvo da je $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a < b)$ nazivamo* **rez** *skupa S.*

Umjesto $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a < b)$ pisat ćemo kratko $A < B$.

<u>Mogući slučajevi reza:</u>

1. skup A ima najveći element, B nema najmanji element;

2. skup A nema najveći element, B ima najmanji element;

3. A ima najveći element, B ima najmanji element (slučaj **skoka**);

4. skup A nema najveći element, B nema najmanji element (slučaj **praznine**).

Primjer 1 *a) Svaki rez skupa* $\mathbb{R}$ *je oblika 1. ili 2.*

b) Kod skupova $\mathbb{N}$ *i* $\mathbf{Z}$ *svaki rez je oblika 3.*

c) $\mathbb{Q} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \sqrt{2}\} \cup \{q \in \mathbb{Q} \mid q > \sqrt{2}\}$, *pa imamo slučaj praznine.*

Definicija 2 *Za linearno uređen skup čiji su svi rezovi oblika 1. ili 2. kažemo da je* **neprekidan u Dedekindovom smislu**.

Zadatak. Dokažite da aksiom potpunosti (Svaki neprazan podskup od $\mathbb{R}$ koji je omeđen odozgo ima supremum) povlači da je $\mathbb{R}$ neprekidan u Dedekindovom smislu.

Zadatak. Dokažite da neprekidnost u Dedekindovom smislu skupa $\mathbb{R}$ povlači aksiom potpunosti.

Definicija 3 *Neka je* $(S, <)$ *linearno uređen skup. Za* $M \subseteq S$ *kažemo da je* **svuda gust podskup** *od* S *ako svaki neprazni interval od* S *sadrži barem jedan element iz* M.

Skup $\mathbb{Q}$ je svuda gust u $\mathbb{R}$. Zatim, skup $\{q + \sqrt{2} : q \in \mathbb{Q}\}$ je svuda gust u $\mathbb{R}$.

Lema 1 *Neka je* $(S, <)$ *linearno uređen skup koji je neprekidan u Dedekindovom smislu, te* $M \subseteq S$ *prebrojiv svuda gust podskup. Tada vrijedi:*

a) skup M *je gust;*

b) ako S *ne sadrži najveći (najmanji) element, tada ni* M *ne sadrži najveći (najmanji) element.*

Dokaz. a) Očito M sadrži barem dva elementa. Neka su $a, b \in M$, te neka je $a < b$.
Primijetimo da je $\langle a, b\rangle_S \neq \emptyset$, jer bi inače $\langle \cdot, a]_S \cup [b, \cdot\rangle_S$ bio rez skupa S koji definira skok u skupu S.
Pošto je M svuda gust podskup skupa S tada je $\langle a, b\rangle_S \cap M \neq \emptyset$, tj. postoji $c \in M$ tako da vrijedi $a < c < b$.

b) Pretpostavimo da je $a \in M$ najmanji element.
Pošto po pretpostavci S nema najmanji element tada je $\langle \cdot, a\rangle_S \neq \emptyset$.
No, očito $\langle \cdot, a\rangle_S \cap M = \emptyset$.
To je kontradikcija s pretpostavkom da je M svuda gust dio od S. **Q.E.D.**

Teorem 2 *Uređajna karakteristika skupa* $\mathbb{R}$.
Neka su $(S_1, <)$ *i* $(S_2, \prec)$ *linearno uređeni skupovi koji imaju sljedeća svojstva:*

a) nemaju ni najmanji ni najveći element;

b) neprekidni su u Dedekindovom smislu;

c) sadrže prebrojiv svuda gust dio.

Tada su S_1 *i* S_2 *slični skupovi.*

Dokaz. Iz uvjeta c) slijedi da postoji prebrojivi $M_1 \subseteq S_1$ koji je svuda gust u S_1. Analogno, postoji prebrojivi $M_2 \subseteq S_2$ koji je svuda gust u S_2.

Iz prethodne leme slijedi da skupovi M_1 i M_2 nemaju ni najmanji ni najveći element, te da su gusti.

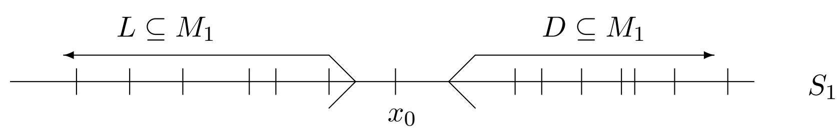
Iz Teorema o uređajnoj karakteristici skupa $\mathbb{Q}$ slijedi $\mathbb{Q} \simeq M_1 \simeq M_2$.
Neka je $\varphi : M_1 \to M_2$ neka sličnost.
Želimo tu funkciju φ proširiti na S_1 (i to tako da proširenje bude sličnost između S_1 i S_2.)

Neka je $x_0 \in S_1 \setminus M_1$ proizvoljan.
(Takav postoji jer inače imamo $M_1 = S_1$, a onda iz $M_1 \simeq \mathbb{Q}$ slijedi $S_1 \simeq \mathbb{Q}$, što je nemoguće jer $\mathbb{Q}$ nije neprekidan u Dedekindovom smislu).

Definiramo skupove

$$L = \{y \in M_1 \mid y < x_0\} \qquad \text{i} \qquad D = \{y \in M_1 \mid y > x_0\}$$

Napomena o oznakama: L je skup "lijevih" elemenata skupa M_1 u odnosu na element x_0, a D je skup "desnih" elemenata skupa M_1 u odnosu na x_0. To ilustriramo na sljedećoj slici.



Očito je: $L \cup D = M_1$, $L \cap D = \emptyset$, $L, D \neq \emptyset$ i $L < D$, tj. **skupovi L i D definiraju jedan rez skupa M_1.**

Dokažimo da rez $L \cup D = M_1$ definira prazninu u skupu M_1, tj. da skup L nema najveći element u M_1, a D nema najmanji element.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka skup L ima najveći element (analogno se tretira situacija kada D ima najmanji element).
Neka je $d \in L$ najveći element. Primijetimo prvo da je $\langle d, x_0 \rangle_{S_1} \neq \emptyset$, jer je inače $\langle \cdot, d]_{S_1} \cup [x_0, \cdot \rangle_{S_1}$ rez skupa S_1 koji definira skok.
No, pošto je d najveći element skupa L tada je

$$\langle d, x_0 \rangle_{S_1} \cap M_1 = \emptyset,$$

što je kontradikcija s činjenicom da je M_1 svuda gust dio od S_1.

Dokažimo sada da je $\varphi(L) \cup \varphi(D)$ rez u skupu M_2.

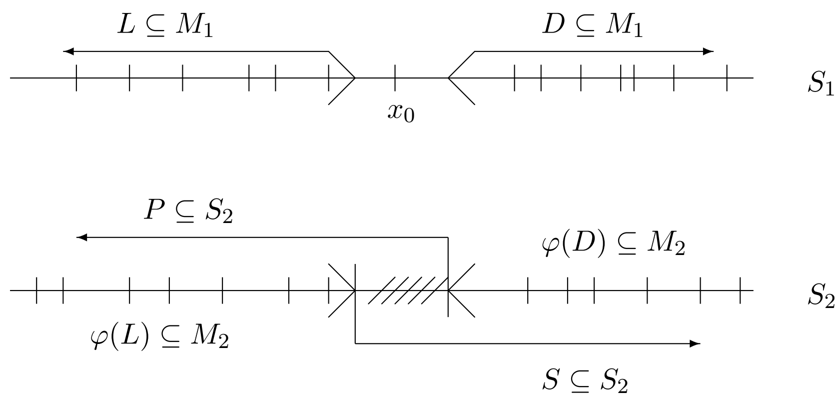
Očito je $\varphi(L) \cap \varphi(D) = \emptyset$, jer je $L \cap D = \emptyset$ i φ je injekcija.
Zatim, pošto je $L \cup D = M_1$ i $\varphi : M_1 \to M_2$ je surjekcija, tada je $\varphi(L) \cup \varphi(D) = M_2$.
Konačno, $\varphi(L) \prec \varphi(D)$ jer je $L < D$ i funkcija φ čuva uređaj.

Pošto $M_1 \simeq M_2$, te rez $L \cup D = M_1$ definira prazninu u skupu M_1 tada **rez $\varphi(L)) \cup \varphi(D) = M_2$ definira prazninu u skupu M_2.**

Definiramo podskupove skupa S_2:

$$P = \{y \in S_2 : y \prec \varphi(D)\} \qquad \text{i} \qquad S = \{y \in S_2 : \varphi(L) \prec y\}$$

Napomena o oznakama: P je skup svih "prethodnika" skupa $\varphi(D)$, a S je skup svih "sljedbenika" skupa $\varphi(L)$.
Sve do sada definirane podskupove od S_1 i S_2 ilustriramo na sljedećoj slici.



Tvrdimo da je $P \cap S$ jednočlan skup. Dokazujemo prvo da je $P \cap S \neq \emptyset$.
Tu tvrdnju dokazujemo svođenjem na kontradikciju. Pretpostavimo suprotno tj. da je $P \cap S = \emptyset$. Dokažimo prvo da je P i S rez skupa S_2. U tu svrhu primijetimo redom sljedeće:

(1) Vrijedi $P \cup S = S_2$;
Očito vrijedi $P \cup S \subseteq S_2$. Kako bi dokazali obratnu inkluziju uzmimo proizvoljan $y \in S_2$. Pošto je S_2 linearno uređen skup, te $\varphi(L)$ nema ni najveći ni najmanji element, tada su moguća samo sljedeća tri slučaja:

a) $y \prec \varphi(L)$
b) $\exists x_1, x_2 \in \varphi(L)$ tako da vrijedi $x_1 \prec y \prec x_2$
c) $\varphi(L) \prec y$

Pošto vrijedi $\varphi(L) \prec \varphi(D)$ tada u prva dva slučaja imamo $y \in P$, a u trećem slučaju je $y \in S$.

(2) Vrijedi $P \neq \emptyset$ i $S \neq \emptyset$; Znamo $\emptyset \neq \varphi(L) \subseteq P$, te $\emptyset \neq \varphi(D) \subseteq S$

(3) Vrijedi $P \prec S$. Ovo očito vrijedi.

Iz pretpostavke da je S_2 neprekidan u Dedekindovom smislu slijedi da skup P ima najveći element ili S ima najmanji element.

Radi određenosti promatramo slučaj kada P ima najveći element.
Neka je sa p_0 označen najveći element skupa P.

Iz definicije skupa P i činjenice $\varphi(L) \prec \varphi(D)$ slijedi da je $\varphi(L) \subseteq P$. Iz toga slijedi $\varphi(L) \preceq p_0$. Pošto skup $\varphi(L)$ nema najveći element tada imamo $\varphi(L) \prec p_0$.

Iz definicije skupa S i činjenice $\varphi(L) \prec p_0$ slijedi $p_0 \in S$. Time smo dobili $p_0 \in P \cap S$, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom da vrijedi $P \cap S = \emptyset$.

Dokažimo sada da je presjek P i S jednočlan skup.

Pretpostavimo da su $a, b \in P \cap S$. Radi određenosti neka je $a \prec b$. Primijetimo prvo da je interval $\langle a, b\rangle_{S_2}$ neprazan, jer bi inače $\langle \cdot, a]_{S_2} \cup [b, \cdot\rangle_{S_2}$ bio jedan rez skupa S_2 koji definira skok. Iz pretpostavke b) teorema slijedi $\langle a, b\rangle_{S_2} \cap M_2 \neq \emptyset$. Neka je $y \in \langle a, b\rangle_{S_2} \cap M_2 \neq \emptyset$. Tada očito vrijedi:

$$\varphi(L) \prec a \prec y \prec b \prec \varphi(D)$$

No, znamo da je $M_2 = \varphi(L) \cup \varphi(D)$, pa dobivamo da $y \notin M_2$, što je kontradikcija.

Neka je $P \cap S = \{y_0\}$. **Sada definiramo** $\varphi(x_0) = y_0$.

Provjerimo prvo da je proširenje funkcije φ injekcija.
Neka su $x_1, x_2 \in S_1$. Radi određenosti neka je $x_1 < x_2$. Promatramo tri slučaja:

a) $x_1, x_2 \in M_1$

b) $x_1 \in S_1 \setminus M_1$ i $x_2 \in M_1$

c) $x_1 \in S_1 \setminus M_1$ i $x_2 \in S_1 \setminus M_1$

Ako su $x_1, x_2 \in M_1$ i $x_1 < x_2$ tada je $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ jer je $\varphi : M_1 \to M_2$ sličnost.
Promotrimo slučaj b). Definiramo skupove: $L_1 = \{y \in M_1 : y < x_1\}$ i $D_1 = \{y \in M_1 : x_1 < y\}$. Kao u prethodnom dijelu dokaza pokazali bi da ta dva skupa definiraju rez s prazninom skupa M_1. Zatim bi dokazali da $\varphi(L_1) \cup \varphi(D_1)$ definira rez s prazninom u skupu M_2. Primijetimo da je $x_2 \in D_1$, pa je $\varphi(x_2) \in \varphi(D_1)$. No, iz definicije proširenja funkcije φ slijedi $\varphi(x_1) \in S_2 \setminus (\varphi(L_1) \cup \varphi(D_1)$.
Za slučaj c) dokazali bi analogno da je $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.

Uočite da smo tu dokazali i da **funkcija φ čuva uređaj.**

Provjerimo sada da je proširenje funkcije φ surjekcija.
Ako je $y \in M_2$ tada, pošto je $\varphi : M_1 \to M_2$ sličnost, postoji $x \in M_1$ tako da vrijedi $\varphi(x) = y$. Ako je $y \in S_2 \setminus M_2$ tada definiramo skupove $p_{M_2}(y)$ i $s_{M_2}(y)$. Analogno kao prije dokažemo da ti skupove definiraju rez s prazninom skupa M_2, te da skupovi $\varphi^{-1}(p_{M_2}(y))$ i $\varphi^{-1}(s_{M_2}(y))$ definiraju rez s prazninom skupa M_1. Zatim, bi analogno kao prilikom definicije proširenja definirali skupove P' i S'. Dokazali bi da je presjek tih skupova jednočlan, te da je y slika upravo tog elementa iz presjeka.
Q.E.D.

Iz prethodnog teorema slijedi npr. da su: skup svih iracionalnih brojeva, skup svih transcendentnih brojeva, $\langle 0, 1] \cup \langle 5, 8\rangle$, slični sa $\mathbb{R}$.