Sedmo predavanje iz Teorije skupova 18/11/2005

Kratki rezime prethodnog predavanja:
Aritmetika kardinalnih brojeva: zbrajanje, množenje i potenciranje
Osnovni Cantorov teorem
Cantorova hipoteza kontinuuma

1.6. Uređeni skupovi

Neka je A neki skup. Svaki podskup R od $A \times A$ nazivamo **binarna relacija**.
Činjenicu $(x, y) \in R$ zapisujemo i xRy. (Prefiksna, infiksna i sufiksna notacija)

Kažemo da je binarna relacija R:

a) **refleksivna**, ako za sve $x \in A$ vrijedi xRx

b) **irefleksivna**, ako ne postoji $x \in A$ tako da vrijedi xRx

c) **simetrična**, ako za sve $x, y \in A$ koji imaju svojstvo xRy vrijedi yRx

d) **antisimetrična**, ako za sve $x, y \in A$ koji imaju svojstvo xRy i yRx vrijedi $x = y$

e) **tranzitivna**, ako za sve $x, y, z \in A$ koji imaju svojstvo xRy i yRz vrijedi xRz

f) **ekvivalencije**, ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna;
za $x \in A$ skup $\{y \in A : xRy\}$ nazivamo klasa ekvivalencije, i označavamo s $[x]$.

Propozicija 1 *Neka je R relacija ekvivalencije na skupu A. Tada za sve $x, y \in A$ vrijedi: $[x] = [y]$ ili $[x] \cap [y] = \emptyset$.*

Kako bismo mogli izreći sljedeću propoziciju prvo ćemo dati definiciju particije skupa.

Definicija 1 *Neka je $A \neq \emptyset$ proizvoljan skup. Kažemo da je familija skupova $\{A_i : i \in I\}$* **particija skupa** *A ako vrijedi:*

a) za sve $i \in I$ je $A_i \subseteq A$;

b) za sve $i \in I$ je $A_i \neq \emptyset$;

c) za sve $i, j \in I$, $i \neq j$, vrijedi $A_i \cap A_j = \emptyset$;

d) $\bigcup_{i \in I} A_i = A$.

Propozicija 2 *Svaka relacija ekvivalencije definira jednu particiju skupa. Vrijedi i obratno, tj. svaka particija skupa definira jednu relaciju ekvivalencije.*

Mi ćemo najviše razmatrati relacije uređaja. Sjetimo se: želimo definirati pojam "nivoa" (točnije: rednog broja) kako bismo definirali kumulativnu hijerarhiju.

Definicija 2 *Neka je R binarna relacija na skupu A. Kažemo da je R relacija* **parcijalnog uređaja** *ako je irefleksivna i tranzitivna. Relaciju parcijalnog uređaja obično označavamo sugestivno s $<$ ili $\prec$. Uređeni par $(A, <)$ nazivamo* **parcijalno uređen skup**.

Ako je $(A, <)$ parcijalno uređen skup tada možemo definirati binarnu relaciju $\leq$ sa:

$$x \leq y \qquad \text{ako i samo ako} \qquad x < y \ \text{ ili } \ x = y.$$

Očito je relacija $\leq$ refleksivna, antisimetrična i tranzitivna. Relacije $<$ i $\leq$ su međusobno definabilne.

Primjer 1 *Primjeri parcijalno uređenih relacija.*

a) Prirodni ili standardni uređaji na skupovima $\mathbb{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbb{Q}$ *i* $\mathbb{R}$. *Prirodni uređaji se definiraju sa:*

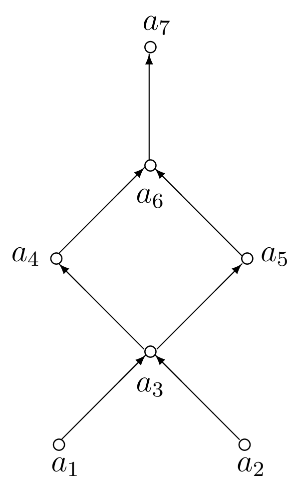
$$x < y \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad (\exists z > 0)(x + z = y).$$

b) **Anti–leksikografski** *uređaj na* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

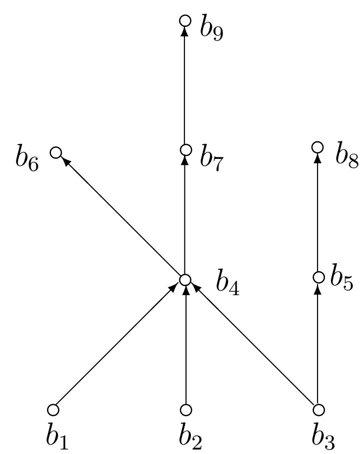
$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad (y_1 < y_2) \ \textit{ ili } \ (x_1 = x_2 \ \textit{ i } \ y_1 < y_2)$$

c) Ako je A skup tada je $(\mathcal{P}(A), \subset)$ *parcijalno uređen skup.*

d) Primjeri parcijalno uređenih skupova koji su definirani pomoću grafa:



$A = \{a_1, \dots, a_7\}$



$B = \{b_1, \dots, b_9\}$

Definicija 3 *Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup. Kažemo da:*

a) *elementi x i y su* **usporedivi** *ako vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$; inače kažemo da su elementi x i y* **neusporedivi***;*

b) *za $B \subseteq A$ kažemo da je* **lanac** *ako su svi elementi skupa B usporedivi;*

c) *element $x \in A$ je* **maksimalan** *(***minimalan***) ako ne postoji $y \in A$ tako da vrijedi $x < y$ $(y < x)$;*

d) *element $x \in A$ je* **najveći** *(***najmanji***) ako za sve $y \in A$ vrijedi $y \leq x$ $\;(x \leq y)$;*

Najveći je onaj element koji je veći od svih ostalih. Maksimalni je onaj element od kojeg ne postoji veći. U primjeru 1 u skupu A imamo dva minimalna elementa, te postoji najveći element. U skupu B tri minimalna elementa i tri maksimalna elementa.

Napomene: Neka je $(A, <)$ neki parcijalno uređen skup. Tada vrijedi:

a) ako je $x \in A$ najveći (najmanji) element tada je x i maksimalni (minimalni) element u skupu A.

b) ako u skupu A ne postoji niti jedan maksimalni (minimalni) element tada A nema ni najveći (najmanji) element;

c) ako u skupu A postoji više od jednog maksimalnog (minimalnog) elementa tada A nema najveći (najmanji) element;

d) ako je $x \in A$ jedinstveni maksimalni (minimalni) element u skupu A tada x ne mora biti najveći (najmanji) element skupa A.

(Primjer: Neka je $A = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$. Na skupu $\mathbb{N}$ promatramo standardni uređaj, te definiramo da broj $\frac{1}{2}$ nije usporediv niti s jednim prirodnim brojem. Tada je $\frac{1}{2}$ jedinstveni maksimalni element, ali nije najveći element u skupu A.)

Definicija 4 *Neka je B neprazan podskup parcijalno uređenog skupa $(A, <)$. Za element x od A kažemo da je:*

a) **gornja (donja) međa** *skupa B ako za sve $y \in B$ vrijedi $y \leq x$ $\;(x \leq y)$;*

b) **supremum (infimum)** *skupa B ako je x najmanja gornja (najveća donja) međa skupa B.*

Ako je $x \in A$ tada skup $p_A(x) = \{y \in A : y < x\}$ nazivamo **početni komad** *elementa x u skupu A.*

Propozicija 3 *Neka je $(A, <)$ konačan parcijalno uređen skup. Tada skup A sadrži maksimalan i minimalan element.*

Dokaz. Dokazujemo da postoji maksimalan element. Analogno bi se dokazalo da postoji minimalni element.

Dokaz provodimo indukcijom po broju elemenata skupa A. Ako je A jednočlan skup tada je jedini element ujedno i maksimalni. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$, te neka je A skup koji sadrži $n+1$ element. Neka je $a \in A$ proizvoljan, ali fiksiran. Označimo $B = A \setminus \{a\}$. Iz pretpostavke indukcije slijedi da skup B sadrži barem jedan maksimalni element. Neka je $B' \subseteq B$ skup svih maksimalnih elemenata skupa B. Promatramo dva slučaja:

a) element a je neusporediv sa svakim elementom iz B'. Tada je svaki element skupa $B' \cup \{a\}$ maksimalni element skupa A.

b) postoji barem jedan $x \in B'$ tako da su a i x usporedivi.
Ako vrijedi $x < a$ tada je a jedan maksimalni element skupa A. Ako pak je $a < x$ tada je B' skup svih maksimalnih elemenata skupa A. Q.E.D.

Definicija 5 *Za parcijalno uređen skup kažemo da je* **linearno uređen** *(potpuno ili totalno) ako su svaka dva njegova različita elementa usporediva.*

Korolar 1 *Neka je $(A, <)$ konačni parcijalno uređen skup. Tada svaki neprazni lanac od A sadrži najmanji i najveći element.*

Definicija 6 *Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ parcijalno uređeni skupovi. Kažemo da funkcija $f : A \to B$* **čuva uređaj** *ako vrijedi:*

$$(\forall x, y \in A)(x \leq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y))$$

Teorem 1 *(Teorem o fiksnoj točki)*
Neka je $(A, <)$ parcijalno uređen skup koji ima najmanji (najveći) element, te neka je $f : A \to A$ funkcija koja čuva uređaj. Tada vrijedi:

> *Ako za svaki $\emptyset \neq B \subseteq A$ postoji supremum (infimum) tada postoji najveća (najmanja) fiksna točka za funkciju f.*

Dokaz. Pretpostavimo da za svaki neprazan podskup od B postoji supremum u skupu A. Neka je

$$B = \{x \in A : x \leq f(x)\}.$$

Ako je $a \in A$ najmanji element tada očito vrijedi $a \in B$, tj. $B \neq \emptyset$.

Neka je $b = \sup B$. Za sve $x \in B$ vrijedi $x \leq b$. Pošto f čuva uređaj tada imamo

$$f(x) \leq f(b).$$

Sada zbog $x \leq f(x)$ (definicija skupa B), te tranzitivnosti, dobivamo da za sve $x \in B$ vrijedi

$$x \leq f(b).$$

Iz toga slijedi da je $f(b)$ jedna gornja međa skupa B. Pošto je $a = \sup B$, tada imamo

$$b \leq f(b) \qquad\qquad (*)$$

Dokažimo sada drugu nejednakost. Iz $(*)$ slijedi $f(b) \leq f(f(b))$, a onda je $f(b) \in B$. Pošto je $b = \sup B$, tada je

$$f(b) \leq b.$$

Preostalo je dokazati da je b najveća fiksna točka. Neka je $a \in A$ tako da vrijedi $f(a) = a$. Posebno tada vrijedi $a \leq f(a)$, pa je $a \in B$. Pošto je $b = \sup B$, tada imamo $a \leq b$.

(Za najmanju fiksnu točku treba promatrati skup $\{x \in A : f(x) \leq x\}$. Q.E.D.

Korolar 2 *Knaster–Tarskijev teorem*
Neka je A neprazan skup i $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ funkcija takva da za sve $x, y \subseteq A$ vrijedi

$$x \subseteq y \quad \Rightarrow \quad F(x) \subseteq F(y).$$

Tada postoji $x_0 \subseteq A$ tako da vrijedi $f(x_0) = x_0$.

Napomena 1
1. *Primjenom prethodnog teorema dokazali smo egzitenciju skupa S koja treba za dokaz Cantor, Bernstein, Schröderovog teorema.*
2. *Obično se u Knaster–Tarskijev teoremu navodi da za:*

$$fix(F) = \cap\{x : x \subseteq A,\ F(x) \subseteq x\},$$

$$Fix(F) = \cup\{x : x \subseteq A,\ x \subseteq F(x)\},$$

vrijedi da je $fix(F)$ najmanja, $Fix(F)$ najveća fiksna točka funkcije f.

(Primijetite da je skup $Fix(F)$ upravo definiran kao supremum skupa $\{x : x \subseteq A,\ x \subseteq F(x)\}$, tj. upravo kao i fiksna točka iz dokaza prethodnog teorema o fiksnoj točki.

Definicija 7 *Neka su $(A, <)$ i $(B, \prec)$ parcijalno uređeni skupovi. Svaku bijekciju $f : A \to B$ koja ima svojstvo da f i f^{-1} čuvaju uređaj nazivamo* **sličnost** *(ili izomorfizam).*
Ako postoji sličnost $f : A \to B$, tada kažemo da su A i B **slični skupovi**. *Oznaka: $A \simeq B$.*

Primjer 2

1. $\langle 0,1\rangle \simeq \langle 2,4\rangle$
   Jedna sličnost $f : \langle 2,4\rangle \to \langle 0,1\rangle$ *je zadana s* $f(x) = \dfrac{x-2}{2}$.

2. $\mathbb{N} \simeq 2\mathbb{N}$

3. $\mathbb{R} \simeq \langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\rangle$
   Restrikcija $tg|_{\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle} : \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle \to \mathbb{R}$ *je jedna sličnost.*

Napomena 2 *Ako vrijedi* $A \simeq B$ *tada očito* $A \sim B$. *No, obrat općenito ne vrijedi (npr.* $\mathbb{N} \sim \mathbf{Z}$, *ali ne i* $\mathbb{N} \simeq \mathbf{Z}$*).*

Definicija 8 *Kažemo da je parcijalno uređen skup* $(A,<)$ **gust** *ako sadrži barem dva elementa, i za sve* $x, y \in A$ *takve da je* $x < y$ *postoji* $z \in A$ *tako da vrijedi* $x < z$ *i* $z < y$.

Propozicija 4 *(Invarijante sličnosti)*
Neka su A *i* B *slični parcijalno uređeni skupovi. Tada vrijedi:*

a) *skup* A *je linearno uređen ako i samo ako* B *je linearno uređen;*

b) *skup* A *ima maksimalni (minimalni) element ako i samo ako* B *sadrži maksimalni (minimalni) element;*

c) *skup* A *ima najveći (najmanji) element ako i samo ako skup* B *ima najveći (najmanji) element;*

d) *skupa* A *je gust ako i samo ako skup* B *je gust.*

Primijetite da iz prethodne propozicije npr. slijedi $\mathbb{N} \not\simeq \mathbf{Z}$ i $\mathbb{Q} \not\simeq \mathbf{Z}$.

Zadatak. Definirajte uređaj $\prec$ na $\mathbf{Z}$, odnosno na $\mathbb{Q}$, tako da vrijedi $(\mathbf{Z}, \prec) \simeq (\mathbb{N}, <)$, odnosno $(\mathbb{Q}, \prec) \simeq (\mathbb{N}, <)$.