Treće predavanje iz Teorije skupova 22/10/2005

§1. Naivna teorija skupova

Kako bi mogli opravdati uvođenje daljnjih aksioma teorije skupova, te ih dobro motivirati, moramo prvo naučiti još neke činjenice o skupovima.
Sjetimo se da je naš glavni cilj definirati **kumulativnu hijerarhiju**, odnosno definirati što znači pojam "nivoa" – točnije rednog broja (na taj način ćemo odgovoriti na pitanje što je skup).
Pošto to nećemo raditi tako da se uvijek strogo pozivamo na aksiome onda se taj dio teorije naziva **naivna teorija skupova**.

Ovo poglavlje se sastoji od dvije točke.
U prvoj točki pod naslovom **Ekvipotentni skupovi** prvo se bavimo "veličinom" skupova, tj. razmatramo pojmove kao što su ekvipotentni skupovi, konačni i beskonačni skupovi, prebrojivi i neprebrojivi skupovi, te kardinalnost.
U drugoj točki pod naslovom **Uređeni skupovi** razmatramo pojmove kao što su parcijalno uređeni skupovi, linearno i dobro uređeni skupovi. To nam je motivacija za definiciju nivoa u kumulativnoj hijerarhiji.

1.1. Ekvipotentni skupovi

Prvo ćemo se baviti "veličinom" skupova.
Sjetimo se kako smo kao mali učili brojati predmete – uspostavljanje bijekcije između prstiju na ruci i predmeta. Cantor je tu ideju proširio i na beskonačne skupove.
(Nećemo govoriti da skupovi imaju jednak broj elemenata već da su ekvipotentni.)

Definicija 1 *Kažemo da su skupovi* A *i* B **ekvipotentni** *ako postoji barem jedna bijekcija* $f : A \to B$*. Oznaka:* $A \sim B$*.*

Primjer 1 *a)* $\{2, 7, 19\} \sim \{153, 1001, 10^{12}\}$;

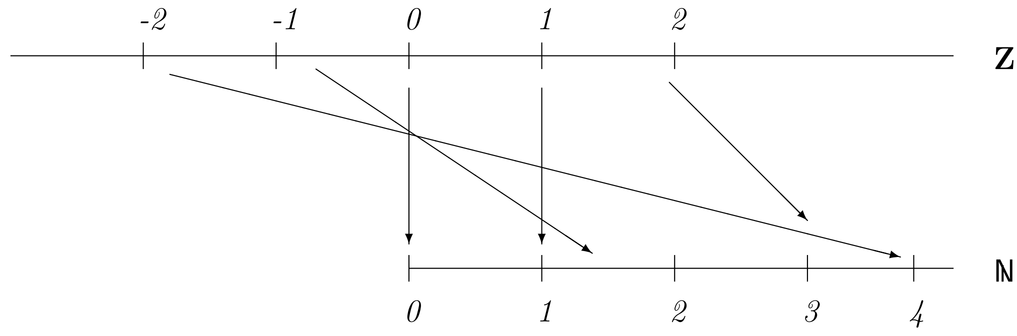
b) $\{1, 2, 3, \ldots\} \sim \{-1, -2, -3, \ldots\}$;

c) $\{1, 2, 3, \ldots\} \sim \{1, 3, 5, \ldots\}$; *jedna bijekcija je dana sa* $n \mapsto 2n - 1$

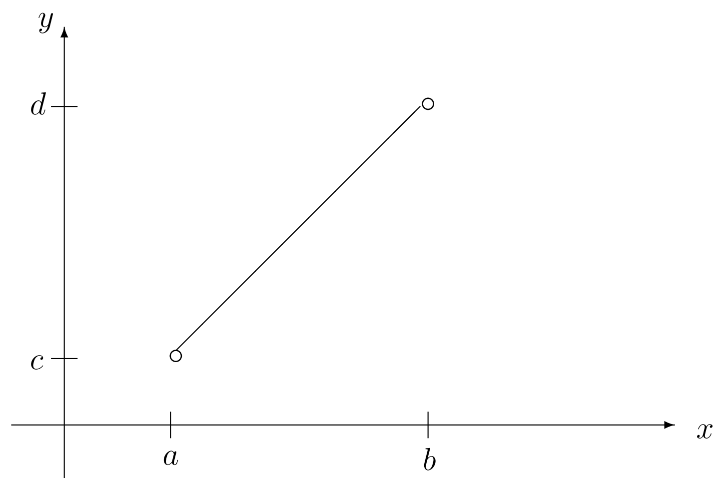
d) $\mathbb{N} \sim \mathbf{Z}$; *jedna bijekcija* $f : \mathbf{Z} \to \mathbb{N}$ *je dana sa:*

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ako je } x < 0; \\ 0, & \text{ako je } x = 0; \\ 2x - 1, & \text{ako je } x > 0 \end{cases}$$

Upravo definiranu bijekciju ilustriramo na sljedećoj slici.



e) Svi zatvoreni segmenti realnih brojeva su međusobno ekvipotentni. Jedna bijekcija $f : [a, b] \to [c, d]$ *je dana sa* $f(x) = \dfrac{d - c}{b - a}(x - a) + c$. *Na sljedećoj slici ilustriramo kako smo dobili navedenu bijekciju (jednadžba pravca kroz dvije točke).*



1.2. Konačni i beskonačni skupovi

U ovim izlaganjima koristimo skup $\mathbb{N}$ na intuitivnom nivou, tj. pretpostavljamo da su nam poznata svojstva klase $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$, koju nazivamo skup prirodnih brojeva, te je označavamo sa $\mathbb{N}$.

Za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ sa $\mathbb{N}_k$ označavamo skup $\{1, \ldots, k\}$.

Teorem 1. Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Ako je $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija tada je f i surjekcija.
Dokaz. Indukcijom po k dokazuje se da je svaka injekcija $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ ujedno i surjekcija.

Definicija 2 *Kažemo da je skup A konačan ako je prazan ili postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je skup A ekvipotentan sa skupom $\mathbb{N}_k$.*

Napomena. Iz teorema 1 slijedi da za svaki konačan skup A postoji jedinstveni $k \in \mathbb{N}_k$ takav da vrijedi $A \sim \mathbb{N}_k$. To nam omogućava da za svaki konačan skup A definiramo broj elemenata, u oznaci $k(A)$, stavljajući $k(A) = n$, pri čemu vrijedi $A \sim \mathbb{N}_n$.

Teorem 2. Za svaki $A \subseteq \mathbb{N}_m$ postoji prirodan broj k takav da vrijedi $k \leq m$ i $k(A) = k$.

Korolar 1. Svaki podskup konačnog skupa je konačan.

Teorem 3. Skup X je konačan ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{N}$ i surjekcija $f : \mathbb{N}_k \to X$.

Definicija 3 *Za skup X kažemo da je beskonačan ako nije konačan.*

Teorem 4. Neka je X neki skup. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

a) skup X je beskonačan;

b) postoji injekcija iz $\mathbb{N}$ u X;

c) postoji injekcija iz X u X koja nije surjekcija;

d) skup X je ekvipotentan s nekim svojim pravim podskupom.

Dokaz.

$a \Rightarrow b)$ Neka je X beskonačan i $x_0 \in X$ proizvoljan. Za sve $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $x_1, \ldots, x_n \in X$ vrijedi $X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\} \neq \emptyset$. To znači da možemo odabrati $f_n(x_1, \ldots, x_n) \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sada rekurzivno definiramo preslikavanje $f : \mathbb{N} \to X$ ovako:

$$\begin{aligned} f(0) &= x_0 \\ f(n+1) &= f_n(f(0), \ldots, f(n)) \end{aligned}$$

(Gornjim uvjetima je dobro definirana funkcija. To slijedi iz Dedekindovog teorema rekurzije.) Uočimo da je $f(n) \in X \setminus \{f(0), \ldots, f(n-1)\}$. Dakle, za sve $k \leq n$ vrijedi $f(n+1) \neq f(k)$. Iz toga slijedi da je funkcija f injekcija.

$b) \Rightarrow c)$ Neka je $f : \mathbb{N} \to X$ neka injekcija. Definiramo funkciju $g : X \to X$ ovako:

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \notin f(\mathbb{N}); \\ f(n+1), & x = f(n). \end{cases}$$

Pokažimo da je funkcija g injekcija. Neka su $x_1, x_2 \in X$ takvi da je $x_1 \neq x_2$. Razlikujemo tri slučaja:

(i) $x_1, x_2 \notin f(\mathbb{N})$. Tada je $g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2)$.

(ii) $x_1 \in f(\mathbb{N})$ i $x_2 \notin f(\mathbb{N})$. Tada je $g(x_1) \in f(\mathbb{N})$, a $g(x_2) \notin f(\mathbb{N})$, pa je očito $g(x_1) \neq g(x_2)$.

(iii) $x_1, x_2 \in f(\mathbb{N})$. Tada je $x_1 = f(n)$ i $x_2 = f(m)$, za neke $n, m \in \mathbb{N}$. Pošto je $x_1 \neq x_2$ tada je $n \neq m$. No, funkcija f je po pretpostavci injekcija, pa je $f(n+1) \neq f(m+1)$, a onda je $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Funkcija f nije surjekcija jer $f(0) \notin g(X)$.

$c) \Rightarrow d)$ Neka je $f : X \to X$ neka injekcija koja nije surjekcija. Tada je $f(X)$ pravi podskup od X, te je očito $f : X \to f(X)$ bijekcija. To znači $X \sim f(X)$.

$d) \Rightarrow a)$ Neka je $Y \subset X$ i $g : X \to Y$ bijekcija. Pretpostavimo da je skup X konačan. Tada iz definicije slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $X \sim \mathbb{N}_k$. Neka je $f : \mathbb{N}_k \to X$ jedna bijekcija. Tada je $h = f^{-1} \circ g \circ f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija. No, $h(\mathbb{N}_k) = f^{-1}(g(f(\mathbb{N}_k))) = f^{-1}(g(X)) = f^{-1}(Y) \neq \mathbb{N}_k$, pa h nije surjekcija. To je u kontradikciji s teoremom 1.

Korolar 1 *Skup X je konačan ako i samo ako je svaka injekcija iz X u X ujedno i surjekcija.*

Dokaz. Iz prethodnog teorema posebno imamo $a) \Leftrightarrow c)$, a onda i $\neg\, a) \Leftrightarrow \neg\, c)$.

1.3. Prebrojivi skupovi

Definicija 4 *Za skup kažemo da je* **prebrojiv** *ako je ekvipotentan sa* $\mathbb{N}$. *Ako je skup beskonačan i nije prebrojiv tada kažemo da je* **neprebrojiv**.

Primjeri prebrojivih skupova: $\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}$, $2\mathbb{N}+1$, $\mathbf{Z}$
Na vježbama će se dokazati prebrojivost sljedećih skupova:
Skup svih točaka ravnine s racionalnim koordinatama.
Skup svih intervala s racionalnim krajevima.
Skup svih polinoma nad poljem racionalnih brojeva.
Skup svih algebarskih realnih brojeva.

Sada nam je cilj dokazati da je prebrojiva unija prebrojivih skupova ponovno prebrojiv skup.
Tada ćemo kao jednostavnu posljedicu dobiti da je skup $\mathbb{Q}$ prebrojiv.
Posebno ćemo istaknuti još jedan aksiom teorije skupova – aksiom izbora, koji nam je potreban u dokazima.

Prvo definiramo pojam familije skupova. To je poopćenje pojma niza.

Definicija 5 *Neka su A i I skupovi. Svako preslikavanje $f : I \to \mathcal{P}(A)$ nazivamo familija skupova. Obično umjesto $f(i)$ pišemo A_i. Iz tog razloga za familiju skupova koristimo oznaku $\{A_i \ : \ i \in I\}$, te I nazivamo skup indeksa.*

Domaća zadaća. Neka je $\mathcal{A} = \{A_i \ : \ i \in I\}$ neka familija skupova. Definirajte Kartezijev produkt familije $\mathcal{A}$, u oznaci $\prod\limits_{i\in I} A_i$. Povežite definiciju Kartezijevog produkta familije skupova i definiciju Kartezijevog produkta konačnog broja skupova.

Propozicija 1 *Neka je $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ familija skupova koja ima svojstvo da je za sve $k \in \mathbb{N}$ skup B_k konačan (moguće i prazan!), te su članovi familije u parovima disjunktni. Tada je skup $\bigcup B_k$ konačan ili prebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo da skup $\bigcup B_k$ nije konačan. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ označimo sa $|B_k|$ broj elemenata skupa B_k (iz točke o konačnim skupovima slijedi da je taj pojam moguće definirati) i sa f_k neku bijekciju između skupova B_k i $\{1, 2, \ldots, |B_k|\}$. Sada definiramo funkciju $f : \bigcup B_k \to \mathbb{N}$ ovako: ako je $x \in \bigcup B_k$ tada postoji jedinstveni $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x \in B_{k_0}$, pa onda neka je

$$f(x) = \sum_{k<k_0} |B_k| + f_k(x).$$

Funkcija f je očito injekcija. Pošto smo bili pretpostavili da je skup $\bigcup B_k$ beskončan tada za $n \in \mathbb{N}$ postoji jedinstveni $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\sum\limits_{k<k_0} |B_k| \leq n$ i $\sum\limits_{k\leq k_0} |B_k| \geq n$. Iz toga očito slijedi da postoji $x \in B_{k_0}$ takav da je $f(x) = n$. To znači da je funkcija f i surjekcija. Q.E.D.

Propozicija 2 *Neka je $\{B_k : k \in \mathbb{N}\}$ familija skupova koja ima svojstvo da je za sve $k \in \mathbb{N}$ skup B_k konačan (moguće i prazan!). Tada je skup $\bigcup B_k$ konačan ili prebrojiv.*
(Za razliku od prethodne propozicije ovdje ne pretpostavljamo da su članovi familije u parovima disjunktni).

Dokaz. Pretpostavimo da skup $\bigcup B_k$ nije konačan. Definiramo induktivno familiju $\{B'_k : k \in \mathbb{N}\}$ ovako:

$$B'_1 = B_1$$

$$B'_{n+1} = B_{n+1} \setminus (B'_1 \ \cup \ \ldots \ \cup \ B'_n)$$

Očito vrijedi: $\bigcup B_k = \bigcup B'_k$; za sve $k \in \mathbb{N}$ skup B'_k je konačan, te ako je $k \neq j$ tada je $B_j \cap B_k = \emptyset$. Primjenom prethodne propozicije slijedi tražena tvrdnja. Q.E.D.

Lema 1 *Neka je A konačan, a B prebrojiv skup. Tada je skup $A \cup B$ prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $A' = A \setminus B$. Očito je tada $A \cup B = A' \cup B$. Ako je A' prazan skup tada tvrdnja leme očito vrijedi.

Promotrimo slučaj kada je A' neprazan skup. Pošto je A konačan tada je i A' konačan skup. Neka je $|A'| = k$, te neka je $g : A' \to \mathbb{N}_k$ neka bijekcija. Označimo s h jednu bijekciju između B i $\mathbb{N}$.

Definiramo funkciju $f : A' \cup B \to \mathbb{N}$ ovako

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ako je } \ x \in A' \\ \\ h(x) + \mid A' \mid, & \text{ako je } \ x \in B \end{cases}$$

Očito je f bijekcija. Q.E.D.

Propozicija 3 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan, te neka su $A_1, \ \ldots, \ A_n$ prebrojivi skupovi koji su u parovima disjunktni. Tada je skup $A_1 \cup \ldots \cup \ A_n$ također prebrojiv.*

Dokaz. Za sve $k \in \{0, 1 \ldots, n-1\}$ označimo s B_k skup svih prirodnih brojeva koji pri djeljenju s brojem n daju ostatak k. Očito je svaki skup B_k prebrojiv. Zatim, za $i \neq j$ vrijedi $B_i \cap B_j = \emptyset$, te imamo $\bigcup B_k = \mathbb{N}$. Neka je sa f_k označena neka bijekcija između A_k i B_k.

Definiramo funkciju $f : (A_1 \cup \ldots \cup A_n) \to \mathbb{N}$ tako da elementu x iz skupa A_k pridružimo $f_k(x)$. Očito je funkcija f bijekcija. Q.E.D.