Goodsteinov teorem

Sada ćemo izreći Goodsteinov teorem. On govori o prirodnim brojevima.
Tri su razloga zašto izrićemo taj teorem.
Prvi je razlog to što je tvrdnja teorema pomalo čudna na prvi pogled, čak izgleda nevjerojatna.
Ovaj razlog je najmanje važan, ali većina studenata upravo to vide kao važnost Goodsteinovog teorema.
Drugi razlog je da se za njegov dokaz koriste beskonačni ordinalni brojevi, iako teorem govori o prirodnim brojevima.
Treći razlog je zapravo najvažniji, ali je najvjerojatnije nerazumljiv za većinu studenata.
Gödelov prvi teorem nepotpunonsti govori da svaku istinitu tvrdnju o prirodnim brojevima nije moguće dokazati pomoću Peanovih aksioma.
Dokazano je da Goodsteinov teorem nije moguće dokazati samo pomoću Peanovih aksioma, tj. da je za njegov dokaz nužno koristiti beskonačne ordinalne brojeve.

Kako bi mogli izreći Goodsteinov teorem moramo definirati prikaz prirodnog broja u superbazi i Goodsteinov niz prirodnog broja.
Te pojmove nećemo strogo definirati već ćemo ih objasniti pomoću primjera.

Svima je poznat pojam prikaza broja u nekoj bazi. Npr. prikažimo brojeve 27 i 521 u bazi 2:

$$27 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \qquad \text{i} \qquad 521 = 2^9 + 2^3 + 2^0$$

Prikazati neki broj u superbazi b znači prvo broj prikazati u bazi b, zatim eksponente prikazati u bazi b, pa eksponente eksponenata prikazati u bazi b, ...
Pogledajmo to na primjeru prikaza brojeva 27 i 521 u superbazi 2:

$$\mathbf{27} \;= 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0 = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 2^1 + 2^0$$

$$\mathbf{521} \;= 2^9 + 2^3 + 2^0 = 2^{2^3+1} + 2^{2+1} + 2^0 = 2^{2^{2+1}+1} + 2^{2+1} + 2^0$$

Ovdje je kao primjer dan i prikaz broja 521 u superbazi 3:

$$\mathbf{521} \;= 2 \cdot 3^5 + 3^3 + 2 \cdot 3 + 2 = 2 \cdot 3^{3+2} + 3^3 + 2 \cdot 3 + 2$$

Pojam **Goodsteinovog niza** definiramo prvo na primjeru broja **8**.
Prvi član Goodsteinovog niza broja 8 je on sam. Označavamo ga sa $(8)_1 = 8$.
Kako bi dobili drugi član niza prikažimo prvo broj 8 u superbazi 2, tj. $8 = 2^{2+1}$.
Umjesto svih dvojki u prikazu 2^{2+1} napišemo trojke, pa dobivamo 3^{3+1}.
Zatim od tako dobivenog broja oduzmemo 1. Time smo dobili drugi član Goodsteinovog niza, tj. $(8)_2 = 80$.
Prikažimo sada broj 80 u superbazi 3, zatim zamijenimo sve trojke s četvorkama, te oduzmemo jedan. Dobili smo $(8)_3 = 553$.
Nadamo se da je jasan daljnji postupak konstrukcije Goodsteinovog niza.
Bez daljnjih detaljnih objašnjena navodimo nekoliko prvih članova Goodsteinovog niza broja 8.

$$
\begin{array}{lrl}
 & (8)_1 = & 8 \\
 & & \\
\mathit{superbaza}\ 2 & & 8 = 2^{2+1} \\
2 \mapsto 3 & & \qquad 3^{3+1} = 81 \\
-1 & (8)_2 = & 80 \\
 & & \\
\mathit{superbaza}\ 3 & & 80 = 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \\
3 \mapsto 4 & & \qquad 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 2 = 554 \\
-1 & (8)_3 = & 553 \\
 & & \\
\mathit{superbaza}\ 4 & & 553 = 2 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 \\
4 \mapsto 5 & & \qquad 2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = 6\ 311 \\
-1 & (8)_4 = & 6\ 310 \\
 & & \\
\mathit{superbaza}\ 5 & & 6\ 310 = 2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \\
5 \mapsto 6 & & \qquad 2 \cdot 6^6 + 2 \cdot 6^2 + 2 \cdot 6 = 93\ 396 \\
-1 & (8)_5 = & 93\ 395 \\
 & & \\
\mathit{superbaza}\ 6 & & 93\ 395 = 2 \cdot 6^6 + 2 \cdot 6^2 + 6 + 5 \\
 & \vdots & \\
 & (8)_6 = & 1\ 647\ 195 \\
 & (8)_7 = & 33\ 554\ 571 \\
 & (8)_8 = & 774\ 841\ 151 \\
 & (8)_9 = & 20\ 000\ 000\ 211 \\
 & (8)_{10} = & 570\ 623\ 341\ 475 \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Sada navodimo nekoliko prvih članova Goodsteinovog niza broja **25**.

$$
\begin{array}{rl}
(25)_1 = 25 & = 2^{2^2} + 2^{2+1} + 1 \\
 & \\
 & 3^{3^3} + 3^{3+1} + 1 \\
 & \\
(25)_2 & = 3^{3^3} + 3^{3+1} \approx 10^{13} \\
 & \\
 & 4^{4^4} + 4^{4+1} \\
 & \\
(25)_3 & = 4^{4^4} + 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3 \approx 10^{81} \\
 & \\
 & 5^{5^5} + 3 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3 \\
 & \\
(25)_4 & = 5^{5^5} + 3 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 \approx 10^{2\ 216}
\end{array}
$$

Evo još desetak članova Goodsteinovog niza broja 266.

$$
\begin{array}{lll}
(266)_1 = 266 = 2^{2^{2+1}} \ + \ 2^{2+1} \ + \ 2 & \geq \ 2^{2^3} & \simeq 3 \times 10^2 \\[1em]
(266)_2 = 3^{3^{3+1}} \ + \ 3^{3+1} \ + \ 2 & \geq \ 3^{3^4} & \simeq 4 \times 10^{38} \\[1em]
(266)_3 = 4^{4^{4+1}} \ + \ 4^{4+1} \ + \ 1 & \geq \ 4^{4^5} & \simeq 3 \times 10^{616} \\[1em]
(266)_4 = 5^{5^{5+1}} \ + \ 5^{5+1} & \geq \ 5^{5^6} & \simeq 3 \times 10^{10921} \\[1em]
(266)_5 = 6^{6^{6+1}} \ + 5 \cdot 6^6 + 5 \cdot 6^5 + \ldots 5 \cdot 6 + 5 & & \simeq 4 \times 10^{217832} \\[1em]
(266)_6 = 7^{7^{7+1}} \ + 5 \cdot 7^7 + 5 \cdot 7^5 + \ldots 5 \cdot 7 + 4 & & \simeq 10^{4871822} \\[1em]
(266)_7 = 8^{8^{8+1}} \ + 5 \cdot 8^8 + 5 \cdot 8^5 + \ldots 5 \cdot 8 + 3 & & \simeq 2 \times 10^{121210686} \\[1em]
(266)_8 = 9^{9^{9+1}} \ + 5 \cdot 9^9 + 5 \cdot 9^5 + \ldots 5 \cdot 9 + 2 & & \simeq 5 \times 10^{3327237896} \\[1em]
(266)_9 = 10^{10^{10+1}} \ + 5 \cdot 10^{10} + 5 \cdot 10^5 + \ldots 5 \cdot 10 + 1 & & \simeq 10^{10^{11}} \\[1em]
& \vdots &
\end{array}
$$

Najvjerojatnije ste zaključili da Goodsteinovi nizovi brojeva 8, 25 i 266 teže prema beskonačnosti. No, prevarili ste se. R. L. Goodstein je dokazao 1944. godine sljedeći teorem.

Teorem. *Svaki Goodsteinov niz završava s nulom.*

Kako je to moguće? U prvi tren se čini nevjerojatno.
Pokušat ćemo vas u istinitost Goodsteinovog teorema uvjeriti navodeći niz broja 3.

$$
\begin{array}{llrl}
\textit{superbaza } 2 & (3)_1 = & 3 & = 2 + 1 \\
2 \mapsto 3 & & & \quad 3 + 1 = 4 \\
& & 4 & \\
-1 & (3)_2 = & 3 & \\
\textit{superbaza } 3 & & 3 & \\
3 \mapsto 4 & & 4 & \\
-1 & (3)_3 = & 3 & \\
\textit{superbaza } 4 & & 3 & \\
4 \mapsto 5 & & 3 & \\
-1 & (3)_4 = & 2 & \\
\textit{superbaza } 5 & & 2 & \\
5 \mapsto 6 & & 2 & \\
-1 & (3)_5 = & 1 & \\
\textit{superbaza } 6 & & 1 & \\
6 \mapsto 7 & & 1 & \\
-1 & (3)_6 = & 0 &
\end{array}
$$

Uočite da je u jednom trenutku član Goodsteinovog niza manji od superbaze (u ovom slučaju to je $(3)_3$).

Nakon toga članovi Goodsteinovog niza strogo padaju, pa pošto se radi o prirodnim brojevima niz mora završiti s nulom.
Za neke prirodne brojeve član Goodsteinovog niza koji je manji od trenutne superbaze može biti vrlo velik.
(Npr. duljina Goodsteinovog niza za broj **4** je broj koji ima više od 121 210 700 znamenaka).

Za strogi dokaz Goodsteinovog teorema koristi se transfinitna indukcija do ordinalnog broja ϵ_0.
Ideja dokaza je vrlo jednostavna. Svakom članu Goodsteinovog niza se pridružuje beskonačni redni broj manji od rednog broja ϵ_0.
Tada se dokaže da pridruženi redni brojevi strogo padaju.
Primjenom transfinitne indukcije do rednog broja ϵ_0 tada slijedi da svaki strogo padajući niz rednih brojeva mora završiti s nulom (sjetite se tvrdnje ekvivalentne aksiomu matematičke indukcije!)
Promotrimo pridruživanje ordinalnih brojeva članovima Goodsteinovog niza broja 4
(umjesto superbaze uvrštavamo ordinali broj ω).

$$
\begin{array}{rl}
4 = & 2^2 \\
 & \omega^\omega \\
 & \\
2 \mapsto 3 & 3^3 \\
-1 & 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \\
 & \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 2 + 2 \\
 & \\
\text{(1+3 koraka)} & 2 \cdot 6^2 + 6 + 5 \\
 & \omega^2 \cdot 2 + \omega + 5 \\
 & \\
(1 + 3 + 6) & 2 \cdot 12^2 + 11 \\
 & \omega^2 \cdot 2 + 11 \\
 & \\
(1 + 3 + 6 + 12) & 24^2 + 23 \cdot 24 + 23 \\
 & \omega^2 + \omega \cdot 23 + 23 \\
 & \\
(1 + 3 + 6 + 12 + 24) & 48^2 + 22 \cdot 48 + 47 \\
 & \omega^2 + \omega \cdot 22 + 47 \\
 & \\
 & \vdots
\end{array}
$$

Pošto Goodsteinov teorem govori o prirodnim brojevima, prirodno se nameće pitanje može li se provesti dokaz tog teorema u kojem se neće koristiti beskonačni redni brojevi.
Godine 1982. je dokazano da se Goodsteinov teorem ne može dokazati primjenom samo prirodnih brojeva (točnije pomoću Peanovih aksioma).
To znači da je za dokaz tog teorema nužna primjena beskonačnih rednih brojeva.
To je zapravo najvažnije u vezi Goodsteinovog teorema.
Time je taj teorem u direktnoj vezi s Gödelovim teoremima nepotpunosti.

Literatura:

1. L. D. Beklemishev, Worm Principle, preprint 219, Utrecht, 2003.
2. R. L. Goodstein, On the restricted ordinal theorem, Journal of Symbolic Logic, 9 (1944), 33–41
3. **J. M. Henle, An outline of set theory**, Springer–Verlag, 1986.
4. W. Just, M. Weese, Discovering Modern Set Theory I, AMS, 1996.
5. M. D. Potter, Mengentheorie, Spektrum Akademischer Verlag, 1990.
6. M. Vuković, Matematička indukcija i Goodsteinov teorem, Poučak – Časopis za metodiku i nastavu matematike, 13 (2003), 5–13
7. M. Vuković, Gödelovi teoremi nepotpunosti, MFL, 2002.