Teorija skupova

1. kolokvij

13. prosinca 2005.

(1) (0)

a) Definirajte sljedeće pojmove: uređeni par, ekvipotentni skupovi, te minimalni i najmanji element u parcijalno uređenom skupu.

b) Iskažite sljedeće aksiome teorije ZF: aksiom ekstenzionalnosti i aksiom dobre utemeljenosti.

c) Iskažite sljedeće teoreme: Cantor, Schröder, Bernsteinov teorem, te teorem o uređanoj karakteristici skupa racionalnih brojeva.

(2) (10) Koliko ima periodičkih funkcijâ s $\mathbb{R}$ u $[0,1]$?

(3) (10) Izračunajte $(\mathfrak{c}^{\aleph_0})^{\aleph_0} + {\aleph_0}^{\aleph_0} + \aleph_0$.

(4) (10) Neka je $A \neq \emptyset$. Ispitajte odnos skupova (koje inkluzije vrijede uvijek, koje ne vrijede nikad,...) $\big(\mathcal{P}(A)\big)^2$ i $\mathcal{P}(A^2)$.

(5) (10) Neka je $(A,<)$ TUS. Dokažite da postoji TUS oblika $(B,\subset)$, sličan s $(A,<)$.

(6) (10) Koji su od sljedećih skupova, uz standardni uređaj, međusobno slični, a koji nisu? Obrazložite.

$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \setminus [0,1\rangle$$

Vedran Čačić

Teorija skupova

1. kolokvij

13. prosinca 2005.

(1) (0)

a) Definirajte sljedeće pojmove: familija skupova, neprebrojiv skup, te dobro uređen skup.

b) Iskažite sljedeće aksiome teorije ZF: aksiom praznog skupa i aksiom beskonačnosti.

c) Iskažite sljedeće teoreme: teorem o fiksnoj točki i Cantorov osnovni teorem teorije skupova.

(2) (10) Koliko ima strogo konveksnih funkcijâ s $[0, 1]$ u $\mathbb{R}$? (Strogo konveksna funkcija je neprekidna funkcija f za koju vrijedi univerzalno $f(\frac{x+y}{2}) < \frac{f(x)+f(y)}{2}$.)

(3) (10) Izračunajte $(2^{\mathfrak{c}})^{\aleph_0} + (\mathfrak{c}^{\aleph_0})^2 + \mathfrak{c}$.

(4) (10) Neka je $A \neq \emptyset$. Ispitajte odnos skupova (koje inkluzije vrijede uvijek, koje ne vrijede nikad,...) $\mathcal{P}(\bigcap A)$ i $\bigcap \mathcal{P}(A)$.

(5) (10) Neka je $R \subseteq A^2$ simetrična i tranzitivna relacija na A. Dokažite da postoji skup B takav da je $R \subseteq B^2$ relacija ekvivalencije na B. (Nije dozvoljeno mijenjati relaciju, već samo skup!)

(6) (10) Koji su od sljedećih skupova, uz standardni uređaj, međusobno slični, a koji nisu? Obrazložite.

$$[0, 1\rangle, \quad [0, +\infty\rangle, \quad \mathbb{Q} \cap [0, +\infty\rangle$$

Vedran Čačić

Teorija skupova

1. kolokvij

13. prosinca 2005.

(1) (0)
   a) Definirajte sljedeće pojmove: relacija ekvivalencije, prebrojiv skup, te linearno uređen skup.
   b) Iskažite sljedeće aksiome teorije ZF: aksiom partitivnog skupa i aksiom para.
   c) Iskažite teorem o uređanoj karakteristici skupa realnih brojeva.

(2) (10) Koliko ima monotonih konačnih nizova racionalnih brojeva?

(3) (10) Izračunajte $\aleph_0^{\mathfrak{c}} + (\aleph_0 \cdot \mathfrak{c})^3$.

(4) (10) Neka je $A \neq \emptyset$. Ispitajte odnos skupova (koje inkluzije vrijede uvijek, koje ne vrijede nikad,...) A i $\mathcal{P}(\bigcup A)$.

(5) (10) Neka je $(A, <)$ PUS u kojem svaki podskup ima supremum. Dokažite da tada u $(A, <)$ svaki podskup ima i infimum.

(6) (10) Koji su od sljedećih skupova, uz standardni uređaj, međusobno slični, a koji nisu? Obrazložite.

$$\mathbb{P}, \quad \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}^2$$

($\mathbb{P}$ označava skup prostih prirodnih brojeva. Standardni uređaj na $\mathbb{N}^2$ je antileksikografski.)

Vedran Čačić

Teorija skupova

1. kolokvij

13. prosinca 2005.

(1) (0)
   a) Definirajte sljedeće pojmove: particija skupa, konačan i beskonačan skup, parcijalno uređen skup.
   b) Iskažite sljedeće aksiome teorije ZF: aksiom unije i aksiom izbora.
   c) Iskažite sljedeće teoreme: teorem o invarijantama sličnosti, te Knaster–Tarskijev teorem.

(2) (10) Koliko ima surjekcijâ s $\langle -1, 1\rangle$ na $\mathbb{R}$?

(3) (10) Izračunajte $3^{\mathfrak{c}} + ({\aleph_0}^3)^{\aleph_0}$.

(4) (10) Neka je $A \neq \emptyset$. Ispitajte odnos skupova (koje inkluzije vrijede uvijek, koje ne vrijede nikad,...) A i $\bigcup \mathcal{P}(A)$.

(5) (10) Neka je A skup, i $(U(A), \subset)$ PUS svih parcijalnih uređaja na A. Dokažite da su maksimalni elementi u $(U(A), \subset)$ upravo totalni uređaji na A.

(6) (10) Koji su od sljedećih skupova, uz standardni uređaj, međusobno slični, a koji nisu? Obrazložite.

$$\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, \quad \mathbb{A}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$$

($\mathbb{A}$ označava skup algebarskih realnih brojeva.)

Vedran Čačić