

Teorija skupova – prvi kolokvij, 29. travnja 2009.

Ime i prezime: _____ JMBAG: _____

1. Definirajte sljedeće pojmove:

- [1] (a) uređeni par
- [1] (b) konačan i beskonačan skup
- [1] (c) najveći i maksimalni element u parcijalno uređenom skupu

2. Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:

- [1] (a) aksiom ekstenzionalnosti
- [1] (b) torem o karakterizaciji beskonačnih skupova
- [1] (c) Knaster-Tarskijev teorem

[4] 3. Dokažite da svaka relacija ekvivalencije definira jednu particiju.

[5] 4. Neka su a , b i c skupovi. Odredite odnos među skupovima

$$(a \cap c) \Delta (b \cap c) \quad \text{i} \quad c \setminus (a \cap b).$$

[5] 5. Neka je $R \subseteq A \times B$ tranzitivna i antisimetrična relacija. Definirajmo relaciju $Q \subseteq A \times B$ pomoću

$$xQy : \iff xRy \wedge x \neq y.$$

Dokažite da je Q također tranzitivna i antisimetrična relacija.

[5] 6. Neka su a i b skupovi takvi da je $a \neq \emptyset$ i postoji injekcija s a u b . Dokažite da tada postoji surjekcija s b na a . Da li je pretpostavka $a \neq \emptyset$ nužna? Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

[5] 7. Dokažite da je kardinalnost skupa svih konvergentnih redova realnih brojeva kojima je niz parcijalnih suma strogo rastući jednaka \mathfrak{c} . Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

[5] 8. Odredite kardinalnost skupa svih periodičkih surjekcijâ sa \mathbb{R} na \mathbb{R} .

Napomene:

- Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.
- U zadacima u kojima se traži “detaljno obrazlaganje tvrdnji” posebno obratite pozornost da ako tvrdite da je $f: X \rightarrow Y$ surjekcija/injekcija, osim surjektivnosti/injektivnosti, obavezno dokažete da f je funkcija s domenom X i da joj slika je podskup od Y .
- Prilikom rješavanja zadataka 7. i 8. bez dokaza se smijete pozvati na teoreme navedene na predavanjima i vježbama, no ne i na primjere zadataka riješene na vježbama. Ukoliko ste u nedoumici smijete li nešto koristiti ili ne, pitajte nekog od prisutnih asistenata ili profesora.

Rezultati i uvid u zadaće: petak, 8. svibnja, u 12:00 sati.

Teorija skupova – prvi kolokvij, 29. travnja 2009.

Ime i prezime: _____ JMBAG: _____

1. Definirajte sljedeće pojmove:

- [1] (a) familija skupova,
- [1] (b) ekvipotentni skupovi,
- [1] (c) najmanji i minimalni element u parcijalno uređenom skupu.

2. Iskažite sljedeće teoreme, odnosno aksiome:

- [1] (a) aksiom partitivnog skupa,
- [1] (b) Banachova lema,
- [1] (c) osnovni Cantorov teorem teorije skupova o kardinalnosti skupa i pripadnog partitivnog skupa.

[4] 3. Dokažite da vrijedi $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

[5] 4. Neka su a , b i c skupovi. Odredite odnos među skupovima

$$a \setminus (b \cap c) \quad \text{i} \quad (b \cap a) \Delta (c \cap a).$$

[5] 5. Neka je $R \subseteq A \times B$ tranzitivna i antisimetrična relacija. Definirajmo relaciju $Q \subseteq A \times B$ pomoću

$$xQy : \iff xRy \vee x = y.$$

Dokažite da je Q također tranzitivna i antisimetrična relacija.

[5] 6. Neka su a i b skupovi takvi da postoji surjektivna funkcija s b na a . Dokažite da tada postoji injektivna funkcija s a u b . Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

[5] 7. Dokažite da je kardinalnost skupa svih nizova racionalnih brojeva kojima je skup prirodnih brojeva podskup slike jednaka \mathfrak{c} . Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

[5] 8. Odredite kardinalnost skupa svih periodičkih surjektivâ sa \mathbb{Q} na \mathbb{Q} .

Napomene:

- Rješenje svakog zadatka pišite na poseban papir.
- Na kolokviju nije dopušteno korištenje nikakvih pomagala osim pribora za pisanje.
- U zadacima u kojima se traži “detaljno obrazlaganje tvrdnji” posebno obratite pozornost da ako tvrdite da je $f: X \rightarrow Y$ surjektivna/injektivna, osim surjektivnosti/injektivnosti, obavezno dokažete da f je funkcija s domenom X i da joj slika je podskup od Y .
- Prilikom rješavanja zadataka 7. i 8. bez dokaza se smijete pozvati na teoreme navedene na predavanjima i vježbama, no ne i na primjere zadataka riješene na vježbama. Ukoliko ste u nedoumici smijete li nešto koristiti ili ne, pitajte nekog od prisutnih asistenata ili profesora.

Rezultati i uvid u zadaće: petak, 8. svibnja, u 12:00 sati.