MATEMATIČKA LOGIKA 1

21. 06. 2006.

1. U sistemu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$(\neg P \vee Q) \to R \vdash (P \to Q) \to R.$$

2. Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$(\forall x \exists y R(x,y) \vee \forall y(\exists x P(y,x) \to (\neg \forall x R(x,y)))) \to (\exists x \forall y R(x,y) \wedge \forall y(\exists x P(y,x) \to \forall x R(x,y))).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.

3. Dokažite da svaki konačan skup formula S sadrži podskup S' koji je nezavisan i koji je skup aksioma za S.

4. Neka je S skup formula logike sudova te neka je $(B_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz formula takav da je $\{B_n \mid n \in \mathbf{N}\} \subseteq S$ te takav da za svaki $F \in S$ postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da je $B_k \Rightarrow F$. Neka je niz formula $(C_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definiran sa $C_1 \equiv B_1$, $C_{n+1} \equiv B_n \to B_{n+1}$, $n \geq 1$. Dokažite da je $\{C_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ skup aksioma za S.

5. Neka je S ispunjiv skup formula sa svojstvom da za svaku formulu F logike sudova vrijedi $F \in S$ ili $\neg F \in S$. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih ispunjivih skupova formula S' takvih da je $S \subseteq S'$. Neka je T unija svih elemenata familije $\mathcal{F}$. Dokažite da je T ispunjiv skup.

Zvonko Iljazović