

MATEMATIČKA LOGIKA

01. 09. 2006.

1. U sistemu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow R \vdash (\neg P \vee Q) \rightarrow R.$$

2. Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$\exists x(Q(x) \vee R(x, x)) \wedge \neg((\forall y(\exists x P(y, x) \rightarrow \forall x R(x, y))) \vee \neg(\exists x \forall y R(x, y))).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.

3. Neka je F zatvorena formula, $\{G_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ skup zatvorenih formula te S skup formula neke teorije prvog reda. Neka vrijedi da za svaki model \mathcal{M} od S postoji $k \in \mathbf{N}$ tako da je $\mathcal{M} \models F \rightarrow G_k$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{i_1, \dots, i_n\}$ od \mathbf{N} tako da vrijedi

$$S \models F \rightarrow (G_{i_1} \vee \dots \vee G_{i_n}).$$

4. Neka je $S = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 \mid i \leq j\}$. Neka je funkcija $f : S \rightarrow \mathbf{N}$ definirana sa $f(i, j) = i$, $\forall (i, j) \in S$. Napišite program za RAM-stroj koji računa funkciju f .
5. Neka je $S = \{ \langle a, b \rangle \mid \text{funkcije } \{a \cdot b\} \text{ i } \{b\} \text{ imaju istu domenu} \}$. Dokažite da S nije rekurzivan skup.

Zvonko Iljazović