

MATEMATIČKA LOGIKA
POPRAVNI KOLOKVIJ
19. VELJAČE 2008.

- (1)
- (a) Definirajte sljedeće pojmove:
- (i) konzistentan skup formula (u logici sudova)
 - (ii) savršena konjunktivna normalna forma
 - (iii) formula logike prvog reda
 - (iv) term je slobodan za neku varijablu u formuli
 - (v) σ -struktura i σ -interpretacija
- (b) Iskažite sljedeće tvrdnje:
- (i) Craigova interpolaciona lema
 - (ii) generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova
 - (iii) teorem kompaktnosti
 - (iv) teorem o preneksnoj normalnoj formi
 - (v) teorem dedukcije za teorije prvog reda
- (2) Pomoću tablice istinitosti odredite disjunktivnu normalnu formu za formulu
- $$(P \rightarrow Q) \rightarrow P .$$
- (3) Glavnim testom za logiku sudova odredite je li formula
- $$(P \vee (P \leftrightarrow Q)) \wedge (Q \rightarrow (P \wedge Q))$$
- valjana.
- (4) Za proizvoljnu interpretaciju K , sa S_K označimo skup svih formula logike sudova F takvih da je $K(F) = 1$. Neka su I i J interpretacije takve da je $S_I \subseteq S_J$. Dokažite da je $S_I = S_J$.

- (5) Je li skup formula logike sudova

$$\{P, \neg Q, P \vee Q\}$$

logički nezavisan?

- (6) Neka su N i J interpretacije zadane s $N(P_i) = 0$ i $J(P_i) = 1$ za sve propozicionalne varijable P_i . Postoji li skup formula logike sudova S takav da je $I_S = \{N, J\}$? Ako postoji, nađite jedan takav.

- (7) Odredite izvod u sustavu prirodne dedukcije

$$\neg P \vdash P \rightarrow Q .$$

- (8) Glavnim testom za logiku prvog reda ispitajte je li formula

$$\exists x \exists y \forall z \left((P(x) \leftrightarrow P(z)) \rightarrow P(y) \right)$$

ispunjiva.

- (9) Neka je $\sigma = \{R, f\}$, gdje je R dvomjesni relacijski, a f dvomjesni funkcijski simbol. Interpretirajte (napišite riječima ili uobičajenim matematičkim oznakama) što formula

$$\forall x \exists y Q(f(y, y), x)$$

znači u σ -strukturi (\mathbb{R}, φ) , pri čemu je $\varphi(Q)$ relacija “ $<$ ” na \mathbb{R} , a $\varphi(f)$ množenje realnih brojeva. Je li (\mathbb{R}, φ) model za tu formulu?

- (10) Dokažite da formula $\exists x R(x, x)$ nije logička posljedica skupa formula

$$\left\{ \forall x \forall y \forall z \left((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z) \right), \forall x \exists y R(x, y) \right\} .$$

Uputa: struktura koju tražite je beskonačna!

Rezultati (zadaci 2.–10.): srijeda, 20. veljače 2008., u 12 sati.