

## Drugi kolokvij

6. veljače 2008.

1. a) Definirajte sljedeće pojmove:

- (a) označeno stablo (ne morate definirati pojam stabla)
- (b) term neke teorije prvog reda
- (c)  $\sigma$ -struktura i  $\sigma$ -interpretacija
- (d) istinitost formule oblika  $\forall x F$  za neku  $\sigma$ -interpretaciju
- (e) konzistentan skup formula u nekoj teoriji prvog reda

b) Iskažite sljedeće tvrdnje:

- (a) teorem o adekvatnosti sistema prirodne dedukcije
- (b) teorem o vezi sistema  $RS$  i  $PD$
- (c) teorem dedukcije za teorije prvog reda
- (d) dva svojstva vezana uz konzistentnost u teorijama prvog reda
- (e) Gödelov teorem potpunosti za teorije prvog reda

2. Primjenom glavnog testa ispitate oborivost formule

$$\exists x \exists y \left( \left( R(x, y) \rightarrow \exists z P(x, z) \right) \vee \exists z \left( R(z, y) \leftrightarrow P(y, y) \right) \right) \vee \left( \exists x \exists y \left( Q(x, y) \rightarrow P(x, y) \right) \rightarrow \forall z R(z, z) \right).$$

Ako je formula oboriva, odredite neku strukturu koja nije njen model.

3. U sustavu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$P \vee (Q \wedge P) \vdash (P \vee Q) \wedge P.$$

4. U sustavu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow P \vdash P.$$

5. Neka je  $Q$  dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da je svaka konačna  $\{Q\}$ -struktura model za formulu

$$\forall x Q(x, x) \rightarrow \exists x \left( \forall y \forall z \left( Q(x, z) \rightarrow \left( Q(x, y) \vee Q(y, z) \right) \right) \rightarrow \forall y Q(x, y) \right),$$

te da ta formula nije valjana.

6. Za skup interpretacijâ  $T$  kažemo da je *karakterističan* ako postoji skup formulâ  $S$  takav da je  $T = I_S$  (dakle,  $T = \{I \text{ interpretacija} : I(S) = 1\}$ ). Postoji li konačan skup interpretacijâ koji nije karakterističan? Detaljno obrazložite odgovor.