Drugi kolokvij 6. veljače 2008.

1. a) Definirajte sljedeće pojmove:
   (a) stablo
   (b) formula logike prvog reda
   (c) term je slobodan za neku varijablu u formuli
   (d) teorija prvog reda (navedite čime je po dogovoru zadana)
   (e) preneksna normalna forma formule logike prvog reda

   b) Iskažite sljedeće tvrdnje:
   (a) teorem potpunosti za sistem prirodne dedukcije
   (b) teorem o preneksnoj normalnoj formi
   (c) lema o proširenju valuacije na skup svih terma
   (d) De Morganova pravila za kvantifikatore (tj. pravila prijelaza za formule oblika $\neg\forall xF$ i $\neg\exists xF$)
   (e) teorem dedukcije za teorije prvog reda

2. Primjenom glavnog testa ispitajte valjanost formule

$$\exists x\exists y\Big(\big(R(x,y) \to P(x,y)\big) \to \forall z P(z,z)\Big) \to \forall x\forall y\Big(\big(R(x,y) \to \exists z P(x,z)\big) \vee \forall z\big(R(z,y) \leftrightarrow P(y,y)\big)\Big) .$$

   Ako formula nije valjana, odredite neku strukturu koja nije njen model.

3. U sustavu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$P \to Q \vdash P \leftrightarrow (P \wedge Q) .$$

4. U sustavu prirodne dedukcije odredite izvod za

$$\{P \vee Q, P \vee \neg Q\} \vdash P .$$

5. Neka je P dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da je svaka konačna $\{P\}$-struktura model za formulu

$$\exists x\Big(\forall y\forall z\Big(\big(P(x,y) \wedge P(y,z)\big) \to P(x,z)\Big) \to \Big(\exists y P(x,y) \to P(x,x)\Big)\Big) ,$$

   te da je ta formula oboriva.

6. Postoji li skup formulâ S takav da je skup I_S (skup svih interpretacijâ I sa svojstvom $I(S) = 1$) prebrojiv? (Konačne skupove ovdje ne smatramo prebrojivima.) Detaljno obrazložite odgovor.