1. ZADATAK

grupa A a) Odredite projekciju točke $(3, -5, 2)$ na ravninu $y = 4$.

odgovor: $(3, 4, 2)$

b) Napišite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2+y^2-4x+12y+23 = 0$ u jednoj (bilo kojoj) od njenih točaka s apscisom $x = 1$.

odgovor: Tangenta u točki $(1, -2)$ ima jednadžbu $-x + 4y + 9 = 0$, a u točki $(1, -10)$ jednadžbu $x + 4y + 39 = 0$.

c) Odredite udaljenost glavnog i sporednog tjemena elipse $7x^2 + 2y^2 = 14$.

odgovor: Udaljenost je $d = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$.

d) Odredite kut između asimptota hiperbole $x^2 - 4y^2 = 20$.

odgovor: Koeficijenti smjerova asimptota su $\pm\frac{b}{a} = \pm\frac{1}{2}$, pa je $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}$.

Ili: $\varphi = 2\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$.

e) Napišite jednadžbu parabole kojoj je tjeme $T(4, 1)$, a fokus $F(4, -2)$.

odgovor: Kako je $\dfrac{p}{2} = |TF| = 3$, jednadžba glasi $(x - 4)^2 = -12(y - 1)$.

grupa B a) Odredite projekciju točke $(-2, 3, 1)$ na ravninu $x = 5$.

odgovor: $(5, 3, 1)$

b) Napišite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2+y^2-2x+10y+9 = 0$ u jednoj (bilo kojoj) od njenih točaka s apscisom $x = 2$.

odgovor: $(2, -1)\ldots x + 4y + 2 = 0$; $(2, -9)\ldots -x + 4y + 38 = 0$

c) Odredite udaljenost glavnog i sporednog tjemena elipse $3x^2 + y^2 = 15$.

odgovor: $2\sqrt{5}$

d) Odredite kut između asimptota hiperbole $2x^2 - 7y^2 = 14$.

odgovor: $\operatorname{arctg}\dfrac{2\sqrt{14}}{5}$

e) Napišite jednadžbu parabole kojoj je tjeme $T(-2, -1)$, a fokus $F(-4, -1)$.

odgovor: $(y + 1)^2 = -8(x + 2)$

grupa C a) Odredite projekciju točke $(2, -4, -3)$ na ravninu $z = 3$.

odgovor: $(2, -4, 3)$

b) Napišite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2+y^2+12x-2y+24 = 0$ u jednoj (bilo kojoj) od njenih točaka s ordinatom $y = 3$.

odgovor: $(-3, 3)\ldots 3x + 2y + 3 = 0$; $(-9, 3)\ldots 3x - 2y + 33 = 0$

c) Odredite udaljenost glavnog i sporednog tjemena elipse $5x^2 + 3y^2 = 15$.

odgovor: $2\sqrt{2}$

d) Odredite kut između asimptota hiperbole $x^2 - 3y^2 = 18$.

odgovor: $\operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ$

e) Napišite jednadžbu parabole kojoj je tjeme $T(1, -3)$, a fokus $F(-2, -3)$.

odgovor: $(y + 3)^2 = -12(x - 1)$

grupa D a) Odredite projekciju točke $(-2,-1,3)$ na ravninu $y=-2$.

odgovor: $(-2,-2,3)$

b) Napišite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2+y^2+8x-6y-1=0$ u jednoj (bilo kojoj) od njenih točaka s apscisom $x=1$.

odgovor: $(1,2)\ldots 5x-y-3=0$; $(1,4)\ldots 5x+y-9=0$

c) Odredite udaljenost glavnog i sporednog tjemena elipse $4x^2+y^2=16$.

odgovor: $2\sqrt{5}$

d) Odredite kut između asimptota hiperbole $3x^2-8y^2=24$.

odgovor: $\operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$

e) Napišite jednadžbu parabole kojoj je tjeme $T(-2,3)$, a fokus $F(-2,5)$.

odgovor: $(x+2)^2=8(y-3)$

2. ZADATAK

Odredite zajedničku normalu pravaca

$$p_1\ldots\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}\qquad \text{i}\qquad p_2\ldots\frac{x-2}{0}=\frac{y+6}{1}=\frac{z-6}{-3}$$

i njihovu međusobnu udaljenost.

Rješenje. Iz jednadžbi danih pravaca vidimo da su $P_1(-1,0,2)$ i $P_2(2,-6,6)$ redom točke na pravcima p_1 i p_2, a vektori smjera tih pravaca su $\vec{s_1}=(2,-1,1)$ i $\vec{s_2}=(0,1,-3)$.

Neka je tražena zajednička normala pravac n. Vektor smjera $\vec{s_n}$ tog pravca dobijemo iz uvjeta okomitosti na $\vec{s_1}$ i $\vec{s_2}$. Kako je

$$\vec{s_1}\times\vec{s_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=2\vec{i}+6\vec{j}+2\vec{k}=(2,6,2),$$

to možemo uzeti $\vec{s_n}=(1,3,1)$.

Neka je π_1 ravnina koja sadrži pravac p_1 i ujedno vektor $\vec{s_n}$. Analogno, neka je π_2 ravnina koja sadrži pravac p_2 i vektor $\vec{s_n}$. Tada pravac n mora ležati u ravninama π_1 i π_2, pa je $n=\pi_1\cap\pi_2$.

Nije teško izračunati jednadžbe ravnina π_1 i π_2:

$$\pi_1\ldots\quad\begin{vmatrix}x+1 & y & z-2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\quad\Leftrightarrow\quad 4x+y-7z+18=0,$$

$$\pi_2\ldots\quad\begin{vmatrix}x-2 & y+6 & z-6\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\quad\Leftrightarrow\quad 10x-3y-z-32=0.$$

Sada izračunamo jednadžbu pravca n:

$$n\ldots\quad\begin{cases}4x+y-7z+18=0\\ 10x-3y-z-32=0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow\qquad\frac{x+1}{1}=\frac{y+14}{3}=\frac{z}{1}$$

Udaljenost pravaca p_1 i p_2 je jednaka udaljenosti točaka $T_1 = p_1 \cap n = p_1 \cap \pi_2$ i $T_2 = p_2 \cap n = p_2 \cap \pi_1$. Lako se dobije da je $T_1(3,-2,4)$ i $T_2(2,-5,3)$, pa je $\mathrm{d}(p_1,p_2) = \mathrm{d}(T_1,T_2) = \sqrt{11}$. $\square$

Malo drugačije rješenje. Kao i u prvom načinu dobijemo vektor smjera $\vec{s_n} = (1,3,1)$ pravca n, zatim jednadžbu ravnine $\pi_1 \ldots 4x+y-7z+18=0$ i konačno točku $T_2 = p_2 \cap \pi_1 = (2,-5,3)$. Znamo da je točka T_2 na pravcu n i da je vektor smjera toga pravca $\vec{s_n}$, pa je $n \ldots \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-3}{1}$ (što smo dobili i prvim načinom).

Ako su $\vec{r_1} = (-1,0,2)$ i $\vec{r_2} = (2,-6,6)$ radijvektori nekih dvaju točaka na pravcima p_1 i p_2 redom, onda udaljenost među pravcima računamo po sljedećoj formuli
(visina paralelepipeda $= \dfrac{\text{volumen}}{\text{povrsina baze}}$):

$$d = \frac{|(\vec{s_1},\vec{s_2},\vec{r_1}-\vec{r_2})|}{|\vec{s_1}\times\vec{s_2}|} = \frac{|\vec{s_n}\cdot(\vec{r_1}-\vec{r_2})|}{|\vec{s_n}|} = \frac{|(1,3,1)\cdot(-3,6,-4)|}{|(1,3,1)|} = \frac{|-3+18-4|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}} = \sqrt{11}.$$

$\square$

Potpuno drugačije rješenje. Kao i u prvom načinu dobijemo vektor smjera $\vec{s_n} = (1,3,1)$ pravca n koji je zajednička normala (okomica) danih pravaca.

Prebacimo li jednadžbe pravaca p_1 i p_2 u parametarski oblik vidimo da točke na pravcu p_1 imaju koordinate $(-1+2t,-t,2+t)$, $t \in \mathbb{R}$, a točke na pravcu p_2 imaju koordinate $(2,-6+s,6-3s)$, $s \in \mathbb{R}$. Ako je točka $A(-1+2t,-t,2+t)$ presjek pravaca p_1 i n, a točka $B(2,-6+s,6-3s)$ presjek pravaca p_2 i n, onda su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{s_n}$ kolinearni, pa postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takvo da je $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{s_n}$. Zapišemo li ovo kooordinatno

$$(3-2t,-6+s+t,4-3s-t) = \lambda(1,3,1),$$

dobivamo sustav od tri linearne jednadžbe s tri nepoznanice:

$$\begin{cases} 3-2t = \lambda \\ -6+s+t = 3\lambda \\ 4-3s-t = \lambda. \end{cases}$$

Rješenje tog sustava je $t=2$, $s=1$, $\lambda=-1$, pa je $A(3,-2,4)$, $B(2,-5,3)$.

Zato je jednadžba pravca $n \ldots \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{3} = \dfrac{z-3}{1}$ (uzeli smo točku B), a udaljenost pravaca p_1 i p_2 je

$$\mathrm{d}(p_1,p_2) = \mathrm{d}(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = |(-1,3,-1)| = \sqrt{1^2+3^2+1^2} = \sqrt{11}.$$

$\square$

Kratka rješenja za sve grupe.

grupa	pravci p_1 i p_2	zajednička normala	udaljenost p_1 i p_2
A	$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{1}$ $\frac{x-2}{0}=\frac{y+6}{1}=\frac{z-6}{-3}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+5}{3}=\frac{z-3}{1}$	$\sqrt{11}$
B	$\frac{x+5}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{2}$ $\frac{x+2}{0}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-4}{-3}$	$\frac{x+2}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-1}{2}$	$\sqrt{14}$
C	$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-6}{2}$ $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{-1}$	$\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{3}$	$\sqrt{14}$
D	$\frac{x-4}{-3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+3}{1}$ $\frac{x}{1}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}$	$\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{3}$	$\sqrt{11}$

□

3. ZADATAK

A Dana je parabola $y^2 = 8x$ i točka $A(-4, 2)$. Odredite udaljenost fokusa parabole od pravca koji spaja dirališta tangenata povučenih iz točke A na parabolu.

Rješenje: Iz jednadžbe parabole možemo očitati parametar $p = 4$, a onda je fokus $F = (2, 0)$. Pravac u zadatku je polara točke A s obzirom na parabolu, koja ima jednadžbu $y \cdot 2 = 4\big(x + (-4)\big)$, odnosno $p_A \ldots 2x - y - 8 = 0$. Uvrštavanjem u formulu za udaljenost točke od pravca, dobivamo

$$d(F, p_A) = \frac{|2 \cdot 2 - 0 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} .$$

Može se i postepeno: iz uvjeta tangencijalnosti $2kl = 4$ i uvjeta prolaska točkom A, $2 = k \cdot (-4) + l$, možemo dobiti jednadžbe tangenata,

$$t_1 \ldots y = \frac{x}{2} + 4 \quad \text{i} \quad t_2 \ldots y = -x - 2 .$$

Kao sjecišta tangenata i parabole dobiju se dirališta, $D_1 = (2, -4)$ i $D_2 = (8, 8)$, a onda je polara pravac $D_1 D_2 \ldots y = 2x - 8$. Ostalo kao i gore.

B Parabola je $y^2 = 4x$, a točka je $A = (-4, 3)$. Parametar je $p = 2$, jednadžbe tangenata su $y = -1 - x$ i $y = 4 + \frac{x}{4}$, dirališta su $(1, -2)$ i $(16, 8)$, polara ima jednadžbu $2x - 3y - 8 = 0$, fokus je točka $(1, 0)$, a njihova udaljenost je $\frac{6\sqrt{13}}{13}$.

C Parabola je $y^2 = 4x$, a točka je $A = (-6, 5)$. Parametar je $p = 2$, jednadžbe tangenata su $y = -1 - x$ i $y = 6 + \frac{x}{6}$, dirališta su $(1, -2)$ i $(36, 12)$, polara ima jednadžbu $2x - 5y - 12 = 0$, fokus je točka $(1, 0)$, a njihova udaljenost je $\frac{10\sqrt{29}}{29}$.

D Parabola je $y^2 = 8x$, a točka je $A = (-1, 1)$. Parametar je $p = 4$, jednadžbe tangenata su $y = -1 - 2x$ i $y = x + 2$, dirališta su $(\frac{1}{2}, -2)$ i $(2, 4)$, polara ima jednadžbu $4x - y - 4 = 0$, fokus je točka $(2, 0)$, a njihova udaljenost je $\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

4. zadatak

- Tangenta elipse s diralištem u točki D siječe glavnu os u točki A, a ortogonalna projekcija točke D na tu os je točka B. Ako je O središte elipse, a a duljina glavne poluosi, dokažite da vrijedi $|OA| \cdot |OB| = a^2$.

  Rješenje. Postavimo elipsu u Kartezijev koordinatni sustav na standardni način (glavna os na x-osi, a sporedna na y-osi). Tada je jednadžba elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Neka su koodinate točke $D(x_0, y_0)$. Koordinate točke B su očito $(x_0, 0)$, a tangenta na elipsu u točki D ima jednadžbu $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$, pa siječe x-os u točki $A(a^2/x_0, 0)$. Sada je $|OA| \cdot |OB| = x_0 \cdot \dfrac{a^2}{x_0} = a^2$. □

- U sporednim tjemenima elipse M i N povučene su tangente koje neku treću tangentu sijeku redom u točkama P i Q. Dokažite da je umnožak $|MP| \cdot |NQ|$ jednak kvadratu duljine glavne poluosi.

  Rješenje. Postavimo elipsu u Kartezijev koordinatni sustav na standardni način (glavna os na x-osi, a sporedna na y-osi).Tada je jednadžba elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Ako su koodinate točke $D(x_0, y_0)$, onda vrijedi $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ jer je točka D na elipsi. Tangente u točkama $M(0, b)$ i $N(0, -b)$ na danu elipsu su redom pravci $y = b$ i $y = -b$. Tangenta na elipsu u točki D ima jednadžbu $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$, pa siječe pravac $y = b$ u točki $P\Big(\dfrac{a^2(b - y_0)}{bx_0}, b\Big)$, a pravac $y = -b$ u točki $Q\Big(\dfrac{a^2(b + y_0)}{bx_0}, -b\Big)$. Sada vrijedi

$$|MP| \cdot |NQ| = \frac{a^2(b - y_0)}{bx_0} \cdot \frac{a^2(b + y_0)}{bx_0} = \frac{a^4(b^2 - y_0^2)}{b^2x_0^2} = \frac{a^2(a^2b^2 - a^2y_0^2)}{b^2x_0^2} = \frac{a^2b^2x_0^2}{b^2x_0^2} = a^2,$$

  pri čemu smo predzadnju jednakost dobili iz činjenice da točka D leži na elipsi. □

Napomena. U druge dvije grupe rješenja su potpuno analogna prethodnima samo što se na potrebnim mjestima zamijeni mala/sporedna (polu)os sa velika/glavna (polu)os i obratno. □

5. ZADATAK

grupa A Neka je $M = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$. Svojstvene vrijednosti matrice M su -9 i 4. Pripadni svojstveni vektori su oblika $(-2t, 3t)$ i $(3t, 2t)$ za $t \in \mathbb{R}$. Odaberemo jedinične vektore $\vec{i}' = \frac{1}{\sqrt{13}}(-2, 3)$ i $\vec{j}' = \frac{1}{\sqrt{13}}(-3, -2)$. Tada matrica $Q = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ima determinantu 1. Uvodimo novi koordinatni sustav $(0; x'y')$ s vezom koordinata

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Iz $6xy + 8y^2 = 9$ dobivamo $-9x'^2 + 4y'^2 = 36$, tj.

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1.$$

Sada vidimo da je riječ o hiperboli s poluosima $a = 3$ i $b = 2$. Koordinate fokusa u koordinatnom sustavu $(O; x', y')$ su $(0, \pm\sqrt{13})$. Računanjem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{13} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 3 \\ \pm 2 \end{bmatrix}$$

vidimo da su fokusi točke $F_1(3, 2)$ i $F_2(-3, -2)$.

Asimptote dane hiperbole su pravci $x' = \pm\frac{b}{a}y' = \pm\frac{2}{3}y'$. Kako je

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^\tau \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

asimptote su pravci

$$\frac{-2x + 3y}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2}{3}\frac{-3x - 2y}{\sqrt{13}},$$

tj. $y = 0$ i $y = -\frac{3}{4}x$.

grupa B Riječ je o hiperboli s poluosima $a = 2$ i $b = 4$. Fokusi hiperbole su točke $F_1(4, -2)$ i $F_2(-4, 2)$. Asimptote su pravci $y = \frac{3}{4}x$ i $x = 0$.

grupa C Riječ je o hiperboli s poluosima $a = 1$ i $b = 3$. Fokusi hiperbole su točke $F_1(1, 3)$ i $F_2(-1, -3)$. Asimptote su pravci $y = -\frac{3}{4}x$ i $y = 0$.

grupa D Riječ je o hiperboli s poluosima $a = 1$ i $b = 4$. Fokusi hiperbole su točke $F_1(4, 1)$ i $F_2(-4, -1)$. Asimptote su pravci $y = -\frac{15}{8}x$ i $x = 0$.