Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu
Matematički odjel

Rogina Mladen

Nove rekurentne relacije za Čebiševljeve spline funkcije i njihove primjene

Disertacija

Zagreb, 1994.

Sadržaj

Uvod

Popularnost polinomnih spline–funkcija u raznim primjenama poput interpolacija, najmanjih kvadrata i numeričkog rješavanja inicijalnih i rubnih problema za diferencijalne jednadžbe ima mnogo uzroka. Među njima je jedan od važnijih svojstvo "lokalnosti": svaki spline može se prikazati kao linearna kombinacija funkcija relativno malog nosača, tzv. B–spline funkcija. Ovo svojstvo odmah povlači vrpčastu strukturu matrica koje se pojavljuju u interpolacijskim i kolokacijskim problemima; štoviše neka svojstva B–spline-ova povlače i totalnu pozitivnost. Matrice se stoga mogu efikasno pohraniti u računalu i invertirati Gauss-ovim eliminacijama bez pivotiranja. Problem stabilnog računanja polinomnih B–spline funkcija i njihovih derivacija u potpunosti je riješen sedamdesetih godina i igra važnu ulogu u gotovo svakom programu za aproksimaciju, interpolaciju i sl. [4]. Jedno od najljepših svojstava polinomnih B–spline-ova, da se svaki može izračunati kao konveksna kombinacija dva B–spline-a nižeg reda, motiviralo je široko istraživanje u ovom području. Najveći dio truda bio je usmjeren na pronalaženje drugih prostora funkcija za koji postoje slične baze, kao i na računanje tih baza stabilnim rekurentim formulama. Neke nepolinomne baze B–spline-ova konstruirane su dvočlanim rekurzijama vrlo sličnim onima u polinomnom slučaju, točnije baze trigonometrijskih [28] i hiperboličkih spline [53] funkcija. Ove baze su specijalni slučajevi nekih općenitijih L–spline-ova [56]. Negativni rezultat Schumakera [51] pokazuje da nema drugih dvočlanih rekurzija, barem ne s koeficijentima koji su analitičke funkcije. Ipak, moguće je naći, bar u teoriji, vrlo općenite dvočlane rekurzije za Čebiševljeve spline-ove [26]; problem je u tome da se ti koeficijenti nađu numerički, budući da su oni omjeri determinanti koje mogu biti i $0/0$ u čvorovima. Neke druge baze mogu se također konstruirati uz slabe pretpostavke na Čebiševljev sistem, ali ne nužno najmanjeg mogućeg nosača [54].

U disertaciji sam pokušao naći neke nove rekurentne relacije za Čebiševljeve i polinomne spline-ove i primijeniti ih na rješavanje rubnih problema, koji su motivirali cijelo istraživanje. Glavna ideja sadržana je u jednostavnom teoremu 1.1.3, koji povlači da su derivacije Čebiševljevih spline-ova po dijelovima u Čebiševljevom prostoru jednostavnije strukture (s jednom težinom manje). Stoga je moguće izvesti rekurentnu relaciju za derivacije potpuno općenitih Čebiševljevih spline-ova, koja za specijalne težine daje sve postojeće (2.4.1). Za spline-ove s jednom težinom derivacije su obični polinomni spline-ovi (2.3.1), koji se mogu upotrijebiti za računanje Čebiševljevih spline funkcija integracijom po mjeri koja nedostaje (2.3.2). Iako se integrali mogu stabilno izračunati odgovarajućim Gauss-ovim formulama, preostaje pitanje kako stabilno oduzimati integrale, a na to pitanje je vrlo teško odgovoriti.

Postoje slučajevi u kojima je integraciju moguće izvršiti analitički, što vodi na stabilnu rekurentnu relaciju za B–spline-ove. Jedan takav slučaj je naravno polinomni, tzv. deBoor–Cox-ova rekurzija. Postoji još jedan interesantan slučaj u kojem se "lijepe" skokovi derivacija u čvorovima umjesto samih derivacija. Takve sam spline-ove razmatrao kao Čebiševljeve s više težina u poglavlju o g–spline funkcijama. U klasičnoj teoriji g–spline-ovi se obično definiraju kao po dijelovima polinomi sa zadanim funkcionalima u čvorovima, pa se ime čini dobro odabranim iako spomenuti funkcionali nisu uobičajenog EHB tipa [21]. Razmatraju se dva važna slučaja. Prvi je hermitski g–spline, za koji se izvede deBoor–Cox-ova rekurzija i na taj način problem riješi u potpunosti (3.9). Drugi je slučaj potpunog kubičnog spline-a, koji se definira kao po dijelovima kubična funkcija sa zadanim skokovima drugih derivacija (prva derivacija može također imati skok). Budući da nisam uspio naći dvočlanu rekurziju, upotrijebio sam drugi pristup koji je sličan tehnikama koje su razvijene za diskretne spline-ove u polinomnom slučaju [11]. Potpuni kubični gB–spline može se reprezentirati kao linearna kombinacija hermitskih gB–spline-ova s poznatim koeficijentima. Budući da su ti koeficijenti pozitivni i mogu se lagano izračunati, to se računanje gB–spline-ova svodi na skalarne produkte pozitivnih vektora. Isti postupak moguće je poopćiti na g–spline-ove proizvoljnog reda ako se ne zahtijeva "lijepljenje" skokova derivacija većih od dva; općeniti algoritam za proizvoljne g–spline-ove nije još otkriven. Koeficijenti u razvoju potpunog kubičnog spline-a po hermitskim zanimljivi su i sami za sebe. Oni čine particiju jedinice i mogu se promatrati kao vrsta diskretnih kubičnih spline-ova; za njih sam upotrijebio naziv diskretni Čebiševljevi spline-ovi.

U poglavlju o kolokaciji primijenio sam neke od navedenih baza spline funkcija na numeričko rješavanje singularnih rubnih problema. Čebiševljevi spline-ovi pridruženi na prirodan način dominantnom dijelu diferencijalnog operatora najprikladniji su za aproksimaciju. Projektori koje sam upotrijebio poznati su od prije (v. [3] i pripadne reference). To se također odnosi na optimalni izbor točaka kolokacije koji povlači superkonvergenciju u čvorovima. Za fenomen superkonvergencije zna se da vrijedi kod kolokacije polinomnim [5], trigonometrijskim [24] i nekim singularnim [8, 9] splineovima. Postoji slučaj kod kojeg je moguće formulirati rubni problem u dvije točke, ali derivacija raste neograničeno u blizini kraja intervala, koji je dovoljno općenit da opravdava trud primjene aparata Čebiševljeve i kolokacione teorije. Nisam pokušavao naći generalnu teoriju za singularnu spline kolokaciju, djelomično stoga što je to već učinjeno u najvažnijim slučajevima, a djelomično i zbog nedostaka motivacije koju pruža fizika. Primjeri u radnji sugeriraju da spline-ovi pridruženi dominantnom dijelu operatora mogu biti nedovoljni za aproksimaciju rješenja. Također je interesantno da se i g–spline funkcije mogu upotrijebiti u kolokaciji, ako se vodeći koeficijent u diferencijalnoj jednadžbi aproksimira po dijelovima konstantom. Ideja aproksimacije diferencijalnog operatora aproksimacijom njegovih koeficijenata poznata je od prije [35], ali je interesantno da se ona može proširiti i na vodeći koeficijent, mada je konvergencija nezadovoljavajuća.

Pokušao sam konkretnim primjerima poduprijeti teoriju kad je to bilo moguće. Umjesto algoritama napisao sam FORTRAN programe i metodu objasnio u komentarima. Sve rutine nisu napisane u smislu postizanja najveće efikasnosti, nego da objasne i podrže teoriju. Programi su kompilirani Microsoftovim Fortranom 5.1 i izvedeni na PC-u; neki testovi koji uključuju red konvergencije za kolokacione metode izvedeni su i na računalima HP 700 serije.

Zahvaljujem se prof. J. Kozaku koji me upoznao sa spline funkcijama, prof. E. Coffou za dobre savjete u svakom pogledu, i prof. I Aganoviću koji mi je pokazao da elastični štapovi znače mnogo više nego što se čini.

Introduction

The popularity of polynomial splines in various applications like data fitting, interpolation, least squares, numerical solution of initial and boundary value problems in differential equations is due to u number of facts. One of the most important seems to be the "locality" property: each spline can be represented as a linear combination of functions with relatively small support, the so called B-splines. This feature immediately implies the band structure of matrices that appear in interpolation and collocation problems; moreover some of the properties of B-splines imply total positivity. In consequence, these matrices can be efficiently stored in a computer and inverted by Gaussian elimination without pivoting. The problem of stable calculation of polynomial B–splines and their derivatives has been completely solved since 1975 and plays an important part in almost every software concerned with data fitting, interpolation etc. [4]. The amazing fact that a polynomial B-spline can be computed as convex combination of two lower order B-splines has motivated an extensive research in this area. Most of the effort has gone in finding other spaces of functions for which similar basis exist, and to compute these basis via stable recurrence formulae. Some non-polynomial basis of B-splines have been succesfully constructed by two term recurrences resembling closely the polynomial ones, namely trigonometric [28] and hyperbolic spline [53] basis. They appear to be special cases of some more general L–splines [56]. The negative result by Schumaker [51] proves that no other two term recurrences exist, at least with analytic coefficients. It is possible, however, to find, at least in theory, quite general two-term recurrences for

Chebyshevian splines [26]; the problem is to find the coefficients numericaly, since they are certain quotients of determinants which can even be 0/0 at the knots. Some other basis can also be constructed with slight assumptions on the underlying Chebshev system, but not necessarily of the minimal support [54].

In the thesis I have tried to find some new recurrencies for Chebyshev and polynomial splines, and to illustrate their use in solving boundary value problems, which has motivated the whole research. The main idea is contained in a simple theorem 1.1.3, which implies that derivatives of Chebyshev splines are piecewisely in a certain Chebyshev space of a simpler structure (possessing one weight less). Thus it is possible to deduce a recurrence relation for derivatives of most general Chebyshev splines, which for special weights gives all the existing ones (2.4.1). For one–weight splines derivatives are ordinary polynomial splines (2.3.1), which can be used to calculate Chebyshev B-splines by integrating with respect to the missing weight (2.3.2). Though the integrals can be computed in a stable way by appropriate Gaussian formulae, the remaining question is how to subtract the integrals stably, and this can not be answered easily.

There are cases in which integration can be performed analyticaly, which leads to a stable recurrence for B-splines. One is of course the well known polynomial case, the so called deBoor–Cox recurrence. There is yet another interesting polynomial case in which jumps of derivatives are matched at the knots, instead of just derivatives. I have treated this splines like Chebyshevian multi-weighted splines in the chapter on g–splines. In classical theory, g–splines are usually defined to be piecewise polynomials with certain functionals prescribed at the knots, and so the name seems appropriate though the functionals dealt with are not of the common EHB–type [21]. Two important cases are discussed. The first is of hermitic g–splines, in which case a deBoor–Cox like recurrence is developed, and thus the problem solved completely (3.9). The other one is of complete cubic g–spline, which is defined to be a piecewise cubic with prescribed jumps in second derivatives (first derivative can have a jump as well). Since I have been unable to find any two–term recurrence relations, I have adopted another approach which is similar to discrete spline techniques in polynomal case [11]. The complete cubic gB–spline can be represented as a linear combination of hermitic gB–splines with known coefficients. Since these coefficients are positive, and can be easily computed, the computation of gB–splines amounts to taking scalar products of positive vectors. The same procedure can be generalized to g–splines of arbitrary order, if we do not require the mathcing of derivative jumps of order greater than two; the general algorithm for arbitrary g–splines has not yet been discovered. The coefficients in expansion of complete cubic splines in terms of hermitic ones are of interest in themselves. They form a partition of unity, and can be treated as a kind of discrete cubic splines; I have used the name Chebyshev discrete splines.

In the chapter on collocation I have applied some of the basis of spline functions mentioned above to numerical solution of singular boundary value problems. The Chebyshev splines associated in a natural way with the dominant part of the differential operator are best suited for approximation. The projectors I have used have been known before (see [3] and references therein). That is also true of the optimal choice of collocation points which imply superconvergence at the knots. The superconvergence phenomena were known to hold for collocation by polynomial [5], trigonometric [24] and some singular [8], [9] splines. There is a case when a two–point boundary value problem can be formulated, but the derivative grows boundlesly near the endpoint, which is sufficiently general to justify the effort of applying the apparatus of Chebyshev and collocation theory. No attempt has been made to find a general theory of singular spline collocation, partially because it has already been done in most important cases, and partially due to the lack of motivation provided by physics. The examples also suggest that splines associated with the dominant part of the operator can be insufficient to approximate the solution. It is also of interest that g–splines can be used in collocation, if the leading coefficient in differential equation is approximated by a piecewise constant. The idea of approximating the differential operator by approximating its coefficients has also been known before [35], but it is of interest that it can be extended to a dominant coefficient, even if the convergence is unsatisfactory.

I have tried to present the concrete examples of the theory whenever it was possible. Instead of writing algorithms I've chosen to write FORTRAN programs and explain the method in comments. Not all routines have been written in order to achieve maximum performance, but to illustrate and support the theory. The programs have been compiled by Microsoft Fortran 5.1 and run on a PC; some of the tests including the calculation of convergence order for various collocation methods have been run on HP 700 series.

I would like to thank prof. J. Kozak for introducing me to the spline functions; prof. E Coffou for advising me so well in every aspect, and to prof. I Aganović for showing me how elastic beams are much more than they appear to be.

Oznake

Simbol	str.	definicija
$\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p})$,$\mathcal{S}(n,d\boldsymbol{\sigma})$	1	CCT sistemi
D_i	1	operator dualnosti
S_i	1	operator suženja
R_i	1	operator redukcije
E_i	1	operator ekstenzuije
$\mathcal{S}(n-j,R_{n-j}\cdots R_{n-1}D_{n-1}\boldsymbol{\sigma})$	1	j-reducirani sistem
$\mathrm{L}\{u_1,\ldots,u_n\}$	1	linearni omotač
$[t_1,\ldots t_{n+1}]_{\mathcal{S}(n+1,d\boldsymbol{\kappa})}f$	6	podijeljena diferencija
$d\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{q}$	5	prošireni vektori težina
$\mathcal{P}(n)$	6	sistem potencija
$g_{n,\boldsymbol{p}}(x,y)$,$g_i(x,y)$	7	Green-ove funkcije CCT sistema
$H_0(s,u)$	82	Green-ova funkcija dif. operatora
$L^k[a,b]$	13	$\{f : \int f^k < \infty\}$
$C_\Delta[a,b]$	13	po dijelovima neprekidne funkcije
$\mathcal{S}(n,d\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{m},\Delta)$,$\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\Delta)$	17	prostor T-spline funkcija
$\mathcal{P}(n,\boldsymbol{m},\Delta)$	18	prostor polinomnih splineova
dim	18	dimenzija prostora
$B^n(x\|t_i,\ldots,t_{i+n})$	21	B-spline s nosačem $[t_i,t_{i+n}]$
$Q^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x)$	22	nenormalizirani B-spline
$T^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}$, $T^n_{i,\boldsymbol{p}}$, $T^n_{i,w,p\ldots}$	22	normalizirani B-spline
$H^k_p[a,b]$	30	prostor Soboljeva, $f^{(k)} \in L^p$
$\mathrm{Ker}(D^kDpD)$	46	jezgra operatora D^kDpD
$\mathcal{P}(n,\boldsymbol{m},\Gamma,\Delta)$,$\mathcal{P}(n,\boldsymbol{m},\Lambda,\Delta)$	47	prostor g-spline funkcija
$\delta_x f := f(x)$	47	funkcional izvrednjavanja u točki
Λ_i	47	vektor incidencije
Λ	47	$\bigcup_{i=1}^k\{\Lambda_i\}$
$\alpha^n_i(j)$	63	polinomni diskretni spline
$\\| \\|_\infty$	83	max–norma
dist	90	udaljenost

1. Čebiševljevi sistemi funkcija

1.1 Kanonski kompletni Čebiševljevi sistemi

Neka je u_1 ograničena, pozitivna funkcija na intervalu $[a,b]$ i neka su $\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ ograničene, monotono rastuće i neprekidne s desna. Slijedeća definicija potječe od Schumakera [50, 52].

DEFINICIJA **1.1.1** *Za svaki podinterval $\delta\subseteq[a,b]$ koji je izmjeriv obzirom na Stieltjes-ove mjere $d\sigma_2, d\sigma_3, \ldots d\sigma_n$ vektor $d\boldsymbol{\sigma}=(d\sigma_2(\delta), d\sigma_3(\delta), \ldots d\sigma_n(\delta))^T\in\mathcal{R}^{n-1}$ zove se vektor težina. Kanonski kompletni Čebiševljev sistem funkcija (skraćeno: CCT-sistem) $\mathcal{S}(n,d\boldsymbol{\sigma})$ reda n je familija funkcija $\{u_1,\ldots u_n\}$ koja se može napisati u obliku:*

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x)\int_a^x d\sigma_2(t_2)\\ &\vdots\\ u_n(x) &= u_1(x)\int_a^x d\sigma_2(t_2)\ldots\int_a^{t_{n-1}} d\sigma_n(t_n). \end{aligned}$$

Ako su sve mjere $d\sigma_i,\ \ i=2,\ldots n-1$ dominirane Lebesgue-ovom mjerom, one posjeduju gustoće koje ćemo označiti s $\frac{1}{p_i},\ \ i=2,\ldots n$. Za $x\in[a,b]$ vektor $\boldsymbol{p}=(p_2(x),p_3(x),\ldots p_n(x)$ zvat ćemo također vektorom težina. Ako su funkcije p_i glatke, tj. $\dfrac{1}{p_i}:=\dfrac{d\sigma_i}{dt}\in C^{n-i+1}$, onda je sistem $\{u_i\}_1^n$ tzv. *prošireni kompletni Čebiševljev sistem* funkcija (ECT-sistem) za koji postoji dobro razvijena teorija [13, 23, 50]. Ako postoje gustoće, za Čebiševljeve sisteme funkcija upotrebljavat ćemo oznaku $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p})$, bez obzira na to da li je riječ o ECT sistemu ili ne.

PRIMJER **1.1.1** *Neka je $u_1(x)=1$,$u_2(x)=2x^{1/2}$,$u_3(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}$, $u_4(x)=\frac{1}{5}x^{5/2}$,$a=0$,$b=1$. Tada je $\{u_i\}_1^4$ CCT-sistem obzirom na $\sigma_2(x)=2x^{1/2}$,$\sigma_3(x)=x$, $\sigma_4(x)=x$, ali nije ECT-sistem, jer npr. u_2 nema derivaciju u nuli.*

Schumaker [50] razvija teoriju reduciranih i dualnih Čebiševljevih sistema funkcija i poopćenih operatora deriviranja. Za razliku od [50] nigdje ne pretpostavljamo neprekidnost funkcija σ_i. Slijedećih nekoliko definicija ima za cilj uvođenje oznaka, u kojima se mogu zapisati Čebiševljevi sistemi funkcija vezani uz osnovni Čebiševljev sistem iz definicije 1.1.1. Definiramo slijedeće linearne operatore:

dualnost: $$D_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad D_i : \mathcal{R}^i \to \mathcal{R}^i \ , \ i = 1, \ldots n-1,$$

restrikcija(suženje): $$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad S_i : \mathcal{R}^i \to \mathcal{R}^{i-1}, \ i = 2, \ldots n-1,$$

redukcija: $$R_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \quad R_i : \mathcal{R}^i \to \mathcal{R}^{i-1}, \ i = 2, \ldots n-1,$$

ekstenzija: $$E_i = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_i : \mathcal{R}^i \to \mathcal{R}^{i+1}, \ i = 1, \ldots n-2.$$

Uvedena notacija omogućava jednostavni zapis raznih sistema funkcija koji se javljaju u svezi s osnovnim sistemom iz definicije 1.1.1.

DEFINICIJA **1.1.2** *Neka je $\{u_i\}_1^n$ CCT-sistem funkcija na $[a,b]$ kao u definiciji 1.1.1. Čebiševljev sistem funkcija*

$$\mathcal{S}(n-j, R_{n-j} \cdots R_{n-1} d\boldsymbol{\sigma}) = \{u_{j,1}, \ldots, u_{j,n-j}\}$$

zove se Čebiševljev j–reducirani sistem pridružen sistemu $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$.

Iz definicije je očito:

$$\begin{aligned} u_{j,1} &= 1 \\ u_{j,2}(x) &= \int_a^x d\sigma_{j+2}(t_{j+2}) \\ &\vdots \\ u_{j,n-j}(x) &= \int_a^x \int_a^{t_{j+2}} \cdots \int_a^{t_{n-1}} d\sigma_n(t_n) \ldots d\sigma_{j+2}(t_{j+2}). \end{aligned}$$

DEFINICIJA **1.1.3** *CCT-sistem $\mathcal{S}(n, D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma}) = \{u_i^*\}_1^n$ zove se dualni kanonski CCT-sistem sistema $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$. Vektor $D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{R}^{n-1}$ je dualni vektor.*

Iz definicije slijedi:

$$\begin{aligned} u_1^*(y) &= 1 \\ u_2^*(y) &= \int_a^y d\sigma_n(s_2) \\ &\vdots \\ u_n^*(y) &= \int_a^y \int_a^{s_{n-1}} \dots \int_a^{s_3} d\sigma_2(s_2) \dots d\sigma_n(s_n). \end{aligned}$$

DEFINICIJA **1.1.4** *Familija funkcija $\mathcal{S}(n-j, R_{n-j} \cdots R_{n-1} D_{n-1} \boldsymbol{\sigma}) = \{u_{j,i}^*\}_{i=1}^{n-j}$ zove se j-reducirani sistem dualnog sistema $\mathcal{S}(n, D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma})$.*

Eksplicitno, iz definicije slijedi:

$$\begin{aligned} u_{j,1}^*(y) &= 1 \\ u_{j,2}^*(y) &= \int_a^y d\sigma_{n-j}(s_{n-j}) \\ &\vdots \\ u_{j,n-j}^*(y) &= \int_a^y \int_a^{s_{n-j}} \dots \int_a^{s_3} d\sigma_2(s_2) \dots d\sigma_{n-j}(s_{n-j}). \end{aligned}$$

PRIMJER **1.1.2** *Ako je $\{u_1, \dots u_4\}$ CCT-sistem iz primjera 1.1.1, onda je dualni sistem $\{u_1^*, \dots u_4^*\}$ gdje je $u_1^*(y) = 1, u_2^*(y) = y, u_3^*(y) = y^2/2, u_4^*(y) = \dfrac{8}{15} y^{5/2}$.*

DEFINICIJA **1.1.5** *Familija funkcija $\mathcal{S}(n-j, S_{n-j} \cdots S_{n-1} d\boldsymbol{\sigma})$ zove se j-restringirani sistem CCT-sistema $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$.*

Iz definicije je jasno, da $\mathcal{S}(n-j, S_{n-j} \cdots S_{n-1} d\boldsymbol{\sigma})$ sačinjavaju prvih $n-j$ funkcija iz $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$. Ako je $f \in \mathrm{L}\{u_1, \dots, u_n\}$, definiramo:

$$\begin{aligned} D_0 f(x) &:= \frac{f(x)}{u_1(x)} \\ D_j f(x) &:= \lim_{\delta \to 0+} \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\sigma_{j+1}(x+\delta) - \sigma_{j+1}(x)} \quad j = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

i operatore *generaliziranih derivacija* $L_{j,d\boldsymbol{\sigma}} : \mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma}) \to \mathcal{S}(n-j, R_{n-j} \cdots R_{n-1} d\boldsymbol{\sigma})$:

$$L_{j,d\boldsymbol{\sigma}} := D_j \cdots D_1 D_0. \tag{1.1}$$

Ovi operatori djeluju na funkcijama CCT-sistema poput klasičnih derivacija na potencijama, tj. vrijedi:

$$L_{j,d\boldsymbol{\sigma}} u_i = \begin{cases} 0 & i = 1, 2, \dots j \\ u_{j,i-j} & i = j+1, \dots, n \end{cases}$$

Ako je $f^* \in \mathrm{L}\{u_1^*, \dots u_n^*\}$, za $j = 1, \dots, n$ možemo definirati:

$$D_j f^*(y) := \lim_{\delta \to 0+} \frac{f(y) - f(y-\delta)}{\sigma_{n-j+1}(y) - \sigma_{n-j+1}(y-\delta)} \quad j = 1, \dots, n-1,$$

i *dualne derivacije* $L_{j, D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma}} : \mathcal{S}(n, D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma}) \to \mathcal{S}(n-j, R_{n-j} \cdots R_{n-1} D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma})$:

$$L_{j, D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma}} := D_j^* \cdots D_1^* \quad j = 1, \dots, n.$$

Dualni operatori djeluju na dualnim CCT-sistemima poput klasičnih derivacija na potencijama:

$$L_{j, D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma}} u_i^* = \begin{cases} 0 & i = 1, 2, \dots j \\ u_{j, i-j}^* & i = j+1, \dots, n. \end{cases}.$$

Ako postoji vektor težina $\boldsymbol{p}$, odgovarajuće oznake su $L_{i, \boldsymbol{p}}$ itd. Za proizvoljni vektor težina $d\boldsymbol{\sigma}$ je

$$R_{n-i} \cdots R_{n-1} D_{n-1} d\boldsymbol{\sigma} \neq D_{n-i-1} R_{n-i} \cdots R_{n-1} d\boldsymbol{\sigma}$$

a to povlači činjenicu da je **dual reduciranog sistema različit od reduciranog dualnog sistema**. Postoje važni izuzeci (Čebiševljevi sistemi s istim težinama, specijalno sistem potencija).

Slijedeća lema je bitna karika u dokazu teorema 1.1.1, na kojem se zasniva cijela teorija Čebiševljevih sistema. Imajući u vidu eventualni diskontinuitet funcija σ_i, potreban je nešto drugačiji dokaz od dokaza analogne tvrdnje za ECT-sisteme [23].

LEMA **1.1.1** *Neka je $\{u_i\}_{i=1}^n$ CCT-sistem na $[a, b]$, $f \in \mathrm{L}\{u_1, \dots, u_n\}$ i $a \leq c \leq d \leq b$. Tada vrijedi:*

$$\frac{f(d)}{u_1(d)} - \frac{f(c)}{u_1(c)} = \int_c^d L_{1, d\boldsymbol{\sigma}} f(t) d\sigma_2(t). \tag{1.2}$$

DOKAZ: Dokažimo tvrdnju za $f = u_j$; (1.2) tada slijedi iz linearnosti. Neka je $j = 3$ radi kraćeg pisanja. Onda je:

$$\int_c^d D_1 D_0 u_3(t) d\sigma_2(t) = \int_c^d D_1 \frac{u_3}{u_1}(t) d\sigma_2(t) =$$

$$\int_c^d (D_1 \int_a^t \int_a^{t_2} d\sigma_3(t_3) d\sigma_2(t_2) d\sigma_2(t) =$$

$$\int_c^d \lim_{\delta \to 0+} \frac{\int_a^{t+\delta} \int_a^{t_2} d\sigma_3 d\sigma_2(t_2) - \int_a^t \int_a^{t_2} d\sigma_3(t_3) d\sigma_2(t_2)}{\sigma_2(t+\delta) - \sigma_2(t)} d\sigma_2(t) =$$

$$\int_c^d \lim_{\delta \to 0+} \frac{\int_t^{t+\delta} d\sigma_2(t_2) \int_a^{t_2} d\sigma_3(t_3)}{\sigma_2(t+\delta) - \sigma_2(t)} d\sigma_2(t) = \int_c^d \lim_{\delta \to 0+} \frac{\int_t^{t+\delta} (\sigma_3(t_2) - \sigma_3(a)) d\sigma_2(t_2)}{\sigma_2(t+\delta) - \sigma_2(t)} d\sigma_2(t) =$$

$$\int_c^d \lim_{\delta\to 0+}(-\sigma_3(a) + \frac{1}{\sigma_2(t+\delta)-\sigma_2(t)}\int_t^{t+\delta}\sigma_3(t_2)d\sigma_2(t_2)d\sigma_2(t) =$$

$$\int_c^d \{-\sigma_3(a) + \lim_{\delta\to 0+}\frac{1}{\sigma_2(t+\delta)-\sigma_2(t)}\xi(\delta)\int_t^{t+\delta} d\sigma_2(t_2)\}d\sigma_2(t)$$

gdje je $\sigma_3(t) \le \xi(\delta) \le \sigma_3(t+\delta)$.[1] Gornji izraz je nadalje jednak:

$$\int_c^d(-\sigma_3(a)+\sigma_3(t)d\sigma_2(t) = \int_c^d\int_a^{t_2} d\sigma_3(t_3)d\sigma_2(t_2) =$$

$$\int_a^d\int_a^{t_2} d\sigma_3(t_3)d\sigma_2(t_2) - \int_a^c\int_a^t d\sigma_3(t_3)d\sigma_2(t_2) = \frac{u_3(d)}{u_1(d)} - \frac{u_3(c)}{u_1(c)}. \qquad \blacksquare$$

Neka je $\{u_i\}_1^n$ CCT-sistem na $[a,b]$ i $\{t_i\}_1^n$ takvi da vrijedi:

$$a \le t_1 \le \cdots \le t_n \le b$$

gdje je

$$l_i = \max\{j:\ t_i = \cdots = t_{i-j}\}, \qquad i = 1,\ldots,n.$$

Standardna definicija *generalizirane determinante Wronskog* [22] je:

$$D\begin{pmatrix} t_1,\ldots,t_n \\ u_1,\ldots,u_n\end{pmatrix} := \det[\mathrm{L}_{l_i}u_j(t_i)] \qquad i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,n. \tag{1.3}$$

TEOREM **1.1.1** *CCT-sistem $\{u_i\}_1^n$ ima na $[a,b]$ pozitivan Wronskijan:*

$$D\begin{pmatrix} t_1,\ldots,t_n \\ u_1,\ldots,u_n\end{pmatrix} > 0.$$

DOKAZ: Dokaz u [50] oslanja se samo na lemu 1.1.1. $\blacksquare$

Teorem 1.1.1 omogućuje definiciju *Čebiševljevih podijeljenih diferencija.*

Svaki CCT-sistem $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ od n funkcija može se na mnogo načina produljiti do CCT-sistema od $n+1$ funkcije dodavanjem još jedne mjere u definiciji 1.1.1. To produljenje naravno nije jedinstveno, ali bitni rezultati ne ovise o proširenju. U daljnjem ćemo pretpostaviti da su proširenja prirodna; *prirodno proširenje* CCT-sistema $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ je CCT-sistem $\mathcal{S}(n+1, d\boldsymbol{\kappa})$ koji se dobiva dodavanjem jedne Lebesgue-ove mjere. Vektor $d\boldsymbol{\kappa} := E_{n-1}d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda\boldsymbol{e}_n \in \mathcal{R}^n$ je *prošireni vektor težina* a $\boldsymbol{e}_n = [0\ldots 0, 1]^T \in \mathcal{R}^n$ je jedinični vektor kanonske baze u $\mathcal{R}^n$.

Svrha proširenja je definicija linearnih funkcionala koji se poništavaju na $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$:

[1]Da je σ_3 neprekidna, vrijedilo bi:

$$\int_t^{t+\delta}\sigma_3(t_2)d\sigma_2(t_2) = \sigma_3(\xi)\int_t^{t+\delta} d\sigma_2(t_2)$$

za neko ξ, $t \le \xi \le t+\delta$

DEFINICIJA **1.1.6** *Neka je $a = t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n+1} = b$, gdje se svaki t_i pojavljuje l_i puta. Neka je f funkcija za koju postoje $L_{j-1,d\boldsymbol{\sigma}} f(t_i), j = 1, \ldots l_i$. Čebiševljeva podijeljena diferencija funkcije f reda n obzirom na CCT-sistem $\mathcal{S}(n+1, d\boldsymbol{\kappa})$ je linearni funkcional oblika:*

$$[t_1, \ldots t_{n+1}]_{\mathcal{S}(n+1,d\boldsymbol{\kappa})} f = \frac{D\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_{n+1} \\ u_1, \ldots, u_n, f \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} t_1, \ldots, t_{n+1} \\ u_1, \ldots, u_{n+1} \end{pmatrix}}.$$

U slijedećem teoremu nabrojena su neka svojstva podijeljenih diferencija.

TEOREM **1.1.2**

(i) Podijeljena diferencija je linearni funkcional oblika:

$$[t_1, \ldots, t_{n+1}]_{\mathcal{S}(n+1,d\boldsymbol{\kappa})} f = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{l_i} \alpha_{ij} L_{j-1,d\boldsymbol{\sigma}} f(t_i)$$

gdje su $\alpha_{ij} \in \mathcal{R}$, $\alpha_{il_i} \neq 0$ a funkcija f zadovoljava uvjete glatkoće iz definicije 1.1.6.

(ii)

$$[t_1, \ldots, t_{n+1}]_{\mathcal{S}(n+1,d\boldsymbol{\kappa})} u = 0 \qquad \text{za svako } u \in \mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma}).$$

(iii) Ako je $t_{1,\delta}, \ldots, t_{n+1,\delta}$ niz točaka za koje vrijedi $t_{i,\delta} \to t_i$ kada $\delta \to 0$, tada je za dovoljno glatke funkcije f (u smislu definicije 1.1.6) ispunjeno:

$$[t_{1,\delta}, \ldots, t_{n+1,\delta}]_{\mathcal{S}(n+1,d\boldsymbol{\kappa})} f \to [t_1, \ldots, t_{n+1}]_{\mathcal{S}(n+1,d\boldsymbol{\kappa})} f$$

za $\delta \to 0$.

(iv) Ako je $t_1 \neq t_{n+1}$, podijeljene diferencije zadovoljavaju rekurzivne formule:

$$[t_1, \ldots, t_{n+1}]_{\mathcal{S}(n+1,d\boldsymbol{\kappa})} f = \frac{[t_2, \ldots, t_{n+1}]_{\mathcal{S}(n,d\boldsymbol{\sigma})} f - [t_1, \ldots, t_n]_{\mathcal{S}(n,d\boldsymbol{\sigma})} f}{[t_2, \ldots, t_{n+1}]_{\mathcal{S}(n,d\boldsymbol{\sigma})} u_{n+1} - [t_1, \ldots, t_n]_{\mathcal{S}(n,d\boldsymbol{\sigma})} u_{n+1}}.$$

DOKAZ: Dokaz (i) - (iii) je analogan dokazu za ECT-sisteme (v. [52, 33]); rekurzija za podijeljene diferencije je rezultat Mülbach-a [29] i lagano se poopći na CCT-sisteme [43]. ∎

Posebno, ako je $\boldsymbol{p} = [1, \ldots, 1]^T \in \mathcal{R}^{n-1}$ i $u_1(x) = 1$ u 1.1.1 tada je Čebiševljev sistem funkcija *sistem potencija*, u oznaci $\mathcal{P}(n)$, a L$\{u_1, \ldots u_n\} =: \mathcal{P}_n$ je *prostor* *polinoma reda* n (stupnja $n-1$). Čebiševljeva podijeljena diferencija proporcionalna je polinomnoj podijeljenoj diferenciji. Radi jednostavnosti uvedimo oznaku

$$< t_1, \ldots, t_l > f \, := [t_1, \ldots, t_l]_{\mathcal{P}(l)}$$

za polinomnu podijeljenu diferenciju reda $l-1$. Uobičajeno je da se polinomni slučaj identificira sa Čebiševljevim sistemom funkcija $\{\frac{x^i}{i!}\}_{i=0}^{n-1}$ koji odgovara slučaju jednakih težina:

$$d\sigma_2 = d\sigma_3 = \cdots = d\sigma_n = d\lambda$$

gdje je $d\lambda$–Lebesgue-ova mjera, pa se standardna definicija polinomne podijeljene diferencije poklapa s Mülbach-ovom do na multiplikativni faktor koji sadrži faktorijele.

DEFINICIJA **1.1.7** *Neka je $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ CCT-sistem s mjerama koje imaju gustoće, i neka je $\boldsymbol{p}$ vektor gustoća. Funkcija $g_{n,\boldsymbol{p}}(x,y) : [a,b] \times [a,b] \to \mathcal{R}$ definirana s*

$$g_{n,\boldsymbol{p}}(x,y) := \begin{cases} \int_y^x \frac{1}{p_2(s_2)} \int_y^{s_2} \cdots \int_y^{s_{n-1}} \frac{1}{p_n(s_n)} ds_n & x \geq y \\ 0 & \textit{inače} \end{cases}$$

zove se Green-ova funkcija CCT-sistema $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{p})$ obzirom na vektor težina $\boldsymbol{p}$.

TEOREM **1.1.3** *Za $1 \leq i < n$ generalizirane derivacije $L_{i,\boldsymbol{p}}$ preslikavaju $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{p})$ u $\mathcal{S}(n-i, R_{n-i} \cdots R_{n-1}\boldsymbol{p})$ pri čemu vrijedi:*

$$L_{i,\boldsymbol{p}} g_{n,\boldsymbol{p}}(x, \cdot) = g_{n-i, R_{n-i} \ldots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x, \cdot), \qquad \text{za} \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

DOKAZ: Ako je $x > y$ tada je prema [50, p.285]:

$$g_{n,\boldsymbol{p}}(x,y) = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{n-l} u_l(x) u^*_{n+1-l}(y)$$

odakle zaključujemo da vrijedi:

$$L_{i,\boldsymbol{p}} g_{n,\boldsymbol{p}}(x,y) = \sum_{l=i+1}^{n} (-1)^{n-l} u_{i,l-k}(x) u^*_{n+1-l}(y).$$

Član na desnoj strani možemo prepoznati kao $g_{n-i, R_{n-i} \ldots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x,y)$. ∎
U definiciji 1.1.7 odstupili smo od klasičnih definicija Green-ove funkcije CCT-sistema, jer se $g_i(x,y)$ **ne definira kao Green-ova funkcija u CCT-sistemu** $\mathcal{S}(i, S_i \cdots S_{n-2} S_{n-1}\boldsymbol{p})$ koji se sastoji od prvih i funkcija u $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{p})$. Za $i < n$ i $\boldsymbol{p} \in \mathcal{R}^{n-1}$ oznaka $g_{i,\boldsymbol{p}}$ nema smisla.

Teorem 1.1.3 opravdava definiciju 1.1.7 [44].

Iz teorema 1.1.3 izlazi da je $g_{n,\boldsymbol{p}}$ linearna kombinacija funkcija u $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p})$ i da vrijedi $g_{n,\boldsymbol{p}}(x,y) = u_n(x) + \ldots$. Za Green-ove funkcije restringiranih sistema $\mathcal{S}(j, S_j \cdots S_{n-1}\boldsymbol{p})$, $j \leq n-1$ vrijedi ista definicija i razvoj

$$g_{j,S_j \cdots S_{n-1}\boldsymbol{p}}(x,y) = \sum_{i=1}^{j}(-1)^{j-i}u_i(x)u^*_{n-j,j-i+1}(y) \; = \; u_j(x) + \ldots \qquad (1.4)$$

Iz navedenog je jasno, da su i Green-ove funkcije reduciranih/restringiranih sistema u linearnom prostoru razapetom reduciranim/restringiranim CCT-sistemom. Slijedeći teorem daje reprezentaciju Green-ovih funkcija reduciranih sistema, koristeći pritom na prirodan način vezu između reduciranih i restringiranih CCT-sistema.

TEOREM **1.1.4** *Za $i = 1, \ldots n-1$ dual i-reduciranog CCT-sistema može se identificirati s i-restringiranim dualnim CCT-sistemom, tj.*

$$\mathcal{S}(n-i, D_{n-i-1}R_{n-i} \cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}) \equiv \mathcal{S}(n-i, S_{n-i} \cdots S_{n-1}D_{n-1}\boldsymbol{p}),$$

i za $x \geq y$ vrijedi reprezentacija Green-ove funkcije

$$g_{n-i,R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x,y) = \sum_{l=1}^{n-i}(-1)^{n-i-l}u_{i,l}(x)u^*_{n-i-l+1}(y).$$

DOKAZ: Prva tvrdnja slijedi iz

$$D_{n-i-1}R_{n-i} \cdots R_{n-1}[p_2 \ldots p_n]^T = [p_n \ldots p_{i+2}]^T$$

i definicije 1.1.5, dok je druga direktna posljedica teorema 1.1.3. ∎

PRIMJER **1.1.3** *Za CCT-sistem za koji je $\boldsymbol{p} = [x^{-1/2}, 1, 1]^T$ (v. primjer 1.1.1) je*

$$g_{4,\boldsymbol{p}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < y \\ \int_y^x \frac{1}{\sqrt{t_2}} \int_y^{t_2} \int_y^{t_3} dt_4 dt_3 dt_2 & x \geq y \end{cases}$$

odakle slijedi nakon integracije

$$g_{4,\boldsymbol{p}}(x,y) = -\frac{8}{15}y^{2.5} + x^{0.5}y^2 - \frac{2}{3}x^{1.5}y + \frac{1}{5}x^{2.5}$$

za $x \geq y$. Teorem 1.1.3 omogućuje identifikaciju dualnog sistema:

$$\mathcal{S}(4, D_3\boldsymbol{p}) \; = \; \{1, y, \frac{1}{2}y^2, \frac{8}{15}y^{2.5}\}.$$

Kako je $\mathcal{S}(3, S_3\boldsymbol{p}) = \{1, 2x^{0.5}, \frac{2}{3}x^{1.5}\}$, Green-ova funkcija restringiranog sistema (sistema od prve tri funkcije u $\mathcal{S}(4,\boldsymbol{p})$) vrijedi

$$g_{3,S_3\boldsymbol{p}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x < y \\ \int_y^x \frac{1}{\sqrt{t_2}} \int_y^{t_2} dt_3 & x \geq y \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < y \\ \frac{2}{3}x^{1.5} - 2yx^{0.5} + \frac{4}{3}y^{1.5} & x \geq y \end{cases}.$$

Teorem 1.1.3 primijenjen na $g_{3,S_3\boldsymbol{p}}$ *omogućuje identifikaciju sistema* $\mathcal{S}(3, D_2S_3\boldsymbol{p}) \not\equiv \mathcal{S}(3, S_3D_3\boldsymbol{p})$*:*

$$\mathcal{S}(3, D_2S_3\boldsymbol{p}) = \{1, y, \frac{4}{3}y^{1.5}\}.$$

Budući da $L_{1,\boldsymbol{p}} = \sqrt{x}\frac{d}{dx}$ *preslikava* $\mathcal{S}(4, \boldsymbol{p})$ *na* $\mathcal{S}(3, R_3\boldsymbol{p})$*:*

$$\{1, 2x^{0.5}, \frac{2}{3}x^{1.5}, \frac{1}{5}x^{2.5}\} \longrightarrow \{1, x, \frac{1}{2}x^2\} = \mathcal{P}(3),$$

zaključujemo da vrijedi

$$g_{3,R_3\boldsymbol{p}}(x, y) = \frac{1}{2}(x - y)_+^2.$$

Prema teoremu 1.1.4 za $x \geq y$ *je*

$$g_{3,R_3\boldsymbol{p}}(x, y) = \sum_{l=1}^{3}(-1)^{3-l}u_{1,l}(x)u_{4-l}^*(y) = \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}x^2y^2$$

pa je reprezentacija iz teorema 1.1.4 ekvivalentna s binomnim poučkom.

1.2 Čebiševljevi sistemi s istim težinama

Osim polinomnog, postoji još jedan jednostavan slučaj, kada su sve mjere jednake. Pokazuje se, da su u tom slučaju funkcije iz definicije 1.1.1 potencije u novoj varijabli, točnije vrijedi slijedeći

TEOREM **1.2.1** *Ako je* $\sigma_2 = \cdots = \sigma_n =: \sigma$ *gdje je* σ *ograničena, monotono rastuća i neprekidna s desna na* $[a, b]$*, onda za CCT-sistem iz definicije 1.1.1 vrijedi:*

$$u_i(x) = u_1(x)\frac{(\int_a^x d\sigma(t))^{i-1}}{(i-1)!} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

DOKAZ: Za $i = 1, 2$ tvrdnja je očito ispunjena. Pokažimo da za $i = 3, \ldots, n$, i $r_i := \dfrac{u_i}{u_1}$ vrijedi:

$$r_i(x) = \frac{1}{i-1}(\int_a^x d\sigma)r_{i-1}(x). \tag{1.5}$$

Ako (1.5) vrijedi za $i - 1$, onda je:

$$r_i(x) = \int_a^x r_{i-1}(t)d\sigma(t) = \int_a^x d\sigma(t)\int_a^t r_{i-2}(s)d\sigma(s) =$$
$$\int_a^x d\sigma(t)\int_a^x r_{i-2}(s)d\sigma(s) - \int_a^x d\sigma(t)\int_t^x r_{i-2}(s)d\sigma(s).$$

Nakon zamjene poretka integracije (Fubinijev Teorem), drugi integral se svodi na:

$$\int_a^x d\sigma(t) r_{i-2}(t) \int_a^t d\sigma(s),$$

pa pretpostavka indukcije povlači da je

$$r_i(x) = \int_a^x d\sigma(t) \int_a^x r_{i-2}(s) d\sigma(s) - \int_a^x (i-2) r_{i-1}(t) d\sigma(t).$$

Zadnji integral je upravo $(i-2)r_i(x)$, pa slijedi:

$$(i-1) r_i(x) = \int_a^x d\sigma(t) \int_a^x r_{i-2}(s) d\sigma(s) = r_{i-1}(x) \int_a^x d\sigma(t)$$

Tvrdnja teorema slijedi uzastopnom primjenom (1.5). ∎

Čebiševljevi sistemi gornjeg oblika pojavljuju i u radu Schumakera [51], s time da je $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma}) = \{u_i\}_1^n$ i

$$u_i(x) = \frac{[\int_a^x w(t)dt]^{i-1}}{(i-1)!} \qquad i = 1, \dots n,$$

a w je pozitivna funkcija u $C^{n-2}[a,b]$. CCT-sistemi iz teorema 1.2.1 mogu se dobiti iz potencija zamjenom varijabli. Njihova primjena je vrlo ograničena, iako se dadu konstruirati lokalne baze pridruženih spline-funkcija. U izuzetnim slučajevima, moguće ih je upotrijebiti za numeričko rješavanje singularnih rubnih problema oblika:

$$D(p(x)Du(x)) - q(x)u(x) = f(x) \qquad x \in (a,b) \tag{1.6}$$

gdje je $p(a) = 0$.

PRIMJER **1.2.1** *CCT-sistem $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{p})$ za koji je $\boldsymbol{p} = x^{-1/2} \cdot [1 \dots 1]^T$ i $u_1(x) = 1$ na $[0,1]$ sastoji se od funkcija:*

$$\{1, 2x^{1/2}, 4x, 8x^{3/2} \dots 2^{n-1} x^{\frac{n-1}{2}}\}.$$

Ovaj sistem različit je od CCT-sistema iz primjera 1.1.1 kod kojeg u definiciji postoje dvije različite težine; vidjet ćemo da postojanje različitih težina bitno otežava konstrukciju lokalnih baza, kao i mnoga druga svojstva.

PRIMJER **1.2.2** *Schumakerov primjer [51]:*

$$\{x^{1/2}, x^{3/2}, \dots x^{n-1/2}\}$$

koji se dobiva množenjem $\mathcal{P}(n)$ s $\sqrt{x}$ razlikuje se od primjera 1.1.1 i 1.2.1; i ovaj je slučaj u biti jednostavna generalizacija potencija. Gornji sistem je CCT-sistem u kojem je $u_1(x) = x^{1/2}$ i $\boldsymbol{p} = [1, \dots, 1]^T$.

Za rješavanje rubnih problema oblika

$$D\sqrt{x}Du(x) - q(x)u(x) = f(x)$$

u kojima je f "glatka" upotrebljiv je samo CCT-sistem iz primjera 1.1.1. Heuristički, "dominantni dio" diferencijalnog operatora $D\sqrt{x}D$ svojim djelovanjem na funkcije u primjeru 1.6 daje iracionalne funkcije koje slabo aproksimiraju f, dok sistem u primjeru 1.6 ne sadrži konstantu 1[2]. Za metode projekcionog tipa (momentne i kolokacione, koje ćemo jedine razmatrati) važni su sistemi s **različitim težinama** kao u primjeru 1.1.1.

1.3 Čebiševljevi sistemi s $i < n$ netrivijalnih težina

DEFINICIJA **1.3.1** *Neka je vektor težina definiran sa:*

$$d\boldsymbol{\sigma} = [\underbrace{d\sigma_2, \ldots, d\sigma_{i+1}}_{i} \underbrace{d\lambda, \ldots, d\lambda}_{n-(i+1)}]^T \in \mathcal{R}^{n-1}$$

gdje su $d\lambda$ Lebesgue-ove mjere na $[a, b]$ i $d\sigma_i$ kao u definiciji 1.1.1. CCT-sistem $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ zove se Čebiševljev sistem funkcija s i netrivijalnih težina reda n.

PRIMJER **1.3.1** *U definiciji 1.3.1 važan je položaj težina u kanonskoj reprezentaciji. Ako su $1/p, 1/w \in L^1[0, 1]$, tada je*

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 \\ u_2(x) &= \int_0^x \frac{dt_2}{p(t_2)} \\ u_3(x) &= \int_0^x \frac{dt_2}{p(t_2)} \int_0^x \frac{dt_3}{w(t_3)} \\ u_4(x) &= \int_0^x \frac{dt_2}{p(t_2)} \int_0^x \frac{dt_3}{w(t_3)} \int_0^x dt_4 \end{aligned} \tag{1.7}$$

kanonska reprezentacija CCT-sistema s dvije netrivijalne težine; vektor težina je $[1/p, 1/w, 1]^T$. Stavimo li $p \equiv 1$, tj. $\boldsymbol{p} = [1, 1/w, 1]^T$ opet govorimo o CCT-sistemu s

[2]Schumaker u [51] kaže: "This unusal type of spline space can be of numerical importance; e.g. see [8] (kod nas: [40]) where it arises in connection with the solution of singular two-point boundary value problems." Međutim, navedeni primjer ne može se riješiti upotrebom tog prostora funkcija jer ne sadrži konstantu 1, koja se ne može dodati na takav način da sistem i dalje bude CCT. Konstanta 1 je važna, jer diferencijalni operator dopušta rubni uvjet tipa $u(0) = 1$

dvije težine. Međutim, ako je $w \equiv 1$ tada CCT-sistem ima samo jednu netrivijalnu težinu.

Obzirom na značaj nekih od tih CCT-sistema u primjenama, napišimo i kanonske reprezentacije svih CCT-sistema koji se iz gornjeg mogu dobiti djelovanjem operatora redukcije i dualnosti na vektor težina. Vrijedi:

$$\begin{aligned} L_{1,d\boldsymbol{\sigma}} &= pD & L_{1,D_3 d\boldsymbol{\sigma}} &= D \\ L_{2,d\boldsymbol{\sigma}} &= (wD)(pD) & L_{2,D_3 d\boldsymbol{\sigma}} &= wD^2 \\ L_{3,d\boldsymbol{\sigma}} &= D(wD)(pD) & L_{3,D_3 d\boldsymbol{\sigma}} &= (pD)(wD^2) \\ L_{4,d\boldsymbol{\sigma}} &= D^2(wD)(pD) & L_{4,D_3 d\boldsymbol{\sigma}} &= D(pD)wD^2 \,. \end{aligned}$$

Dualni sistem $\mathcal{S}(4, D_3 d\boldsymbol{\sigma})$ je

$$\begin{aligned} u_1^* &= 1 \\ u_2^*(y) &= \int_0^y dt_4 \\ u_3^*(y) &= \int_0^y dt_4 \int_0^{t_4} \frac{dt_3}{w(t_3)} \\ u_4^*(y) &= \int_0^y dt_4 \int_0^{t_4} \frac{dt_3}{w(t_3)} \int_0^{t_3} \frac{dt_2}{p(t_2)} \,, \end{aligned}$$

a preostali su redom:

$\mathcal{S}(3, R_3 d\boldsymbol{\sigma})$:

$$\begin{aligned} u_{1,1} &= 1 \\ u_{1,2} &= \textstyle\int_0^x \frac{dt_3}{w(t_3)} \\ u_{1,3} &= \textstyle\int_0^x \frac{dt_3}{w(t_3)} \int_0^{t_3} dt_4 \end{aligned}$$

$\mathcal{S}(3, R_3 D_3 d\boldsymbol{\sigma})$

$$\begin{aligned} u_{1,1}^* &= 1 \\ u_{1,2}^* &= \textstyle\int_0^y \frac{dt_3}{w(t_3)} \\ u_{1,3}^* &= \textstyle\int_0^y \frac{dt_3}{w(t_3)} \int_0^{t_3} \frac{dt_2}{p(t_2)} \end{aligned}$$

$\mathcal{S}(2, R_2 R_3 d\boldsymbol{\sigma})$:

$$\begin{aligned} u_{2,1} &= 1 \\ u_{2,2} &= \textstyle\int_0^x dt_4 \end{aligned}$$

$\mathcal{S}(2, R_2 R_3 D_3 d\boldsymbol{\sigma})$:

$$\begin{aligned} u_{2,1}^* &= 1 \\ u_{2,2}^* &= \textstyle\int_0^y \frac{dt_2}{p(t_2)} \end{aligned}$$

$\mathcal{S}(1, R_1 R_2 R_3 d\boldsymbol{\sigma})$:

$$u_{3,1} = 1$$

$\mathcal{S}(1, R_1 R_2 R_3 D_3 d\boldsymbol{\sigma})$:

$$u_{3,1}^* = 1.$$

PRIMJER **1.3.2** *Stacionarne deformacije elastičnog štapa dane su jednadžbom*

$$\frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{EI}(x)\frac{d^2}{dx^2}u(x)) = f(x)$$

gdje je $\mathrm{I}(x)$ *moment inercije presjeka štapa oko osi,* E–*Young-ov modul elastičnosti i* $f(x)$ *gustoća vanjske sile. CCT-sistem iz primjera 1.3.1 vezan je uz elastični štap promjenljivog presjeka, za koji je* $w(x) = \mathrm{EI}(x)$, $p(x) = 1$ *i* $f(x) \equiv 0$.

Ako je $\mathrm{I}(x)$ *po dijelovima konstantan, CCT-sistem čine potencije na svakom intervalu na kojem je* $w(x)$ *konstanta, s time da druga derivacija ima zadan skok u točki prekida* x_i*:*

$$w(x_i+)u''(x_i+) - w(x_i-)u''(x_i-) = 0.$$

1.4 Čebiševljevi sistemi s jednom netrivijalnom težinom

Prvi netrivijalni slučaj CCT-sistema, koji se ne može transformirati na potencije, nastupa kada je jedna od mjera u definiciji 1.1.1 drugačija od ostalih. O položaju te mjere u odnosu na integrale u kanonskoj reprezentaciji bitno ovise svojstva CCT-sistema. Jednadžba (1.6) motivira nas za proučavanje Čebiševljevih sistema koji se nalaze u nul–potprostoru operatora $D^{n-1}pD$, kao prirodnog izbora za razne numeričke metode projekcionog tipa.

Neka je $d\sigma$ mjera s gustoćom $1/p$, tj. $d\sigma(x) := \frac{dx}{p(x)}$. Sistem $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ u kojem je vektor težina $d\boldsymbol{\sigma} = [d\sigma, 1, \ldots, 1]^T$ je *Čebiševljev sistem funkcija s jednom težinom.* Eksplicitno,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2(x) &= \int_a^x d\sigma(t_2) \\ &\vdots \\ u_i(x) &= \int_a^x d\sigma(t_2) \int_a^{t_2} dt_3 \cdots \int_a^{t_{i-1}} dt_i \qquad \text{za} \quad i = 3, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Ako je p po dijelovima neprekidna, $p \in C_\Delta[a,b]$ i $1/p \in L^1[a,b]$ tada uvjet $p \geq 0$ osigurava da je $\sigma(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{p(t)}$ monotono rastuća, a kako je broj točaka diskontinuiteta funkcije $p(x)$ konačan, $\sigma(x)$ se može tako definirati da bude neprekidna s desna. $\{u_i\}_1^n$ je dakle CCT-sistem po definiciji 1.1.1.

PRIMJER **1.4.1** *Sistem potencija* $\mathcal{P}(n)$ *je ECT-sistem s jednom težinom* $d\sigma = d\lambda$*, a u isto vrijeme i ECT-sistem sa svim istim težinama. Zgodnije je promatrati* $\mathcal{P}(n)$ *kao reprezentanta ove druge familije CCT-sistema, tj. pod jednom težinom se misli na jednu netrivijalnu, od* $d\lambda$ *raličitu težinu.*

PRIMJER **1.4.2** *CCT-sistem reda 4 iz primjera 1.1.1 je sistem s jednom (netrivijalnom) težinom, zapravo poseban slučaj (1.8) s*

$$\boldsymbol{p} = [x^{-\frac{1}{2}}, 1, 1]^T \in \mathcal{R}^3,$$

ili, u drugim oznakama

$$d\boldsymbol{\sigma} = [d(2\sqrt{x}), dx, dx]^T \qquad dx := d\lambda.$$

PRIMJER **1.4.3** *Neka je* $\boldsymbol{p} = [1/p(x), 1 \ldots, 1]^T \in \mathcal{R}^{n-1}$ *gdje je* $p(x) > 0$ *po dijelovima konstantna funkcija, i* $x \in [0,1]$. *Ako je* $x_i = i/(m-1)$ *za* $i = 0, \ldots, m-1$ *i*

$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{p_i} \qquad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1})$$

tada je CCT-sistem $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{p}) = \{1, u_k : k = 2, \ldots, n\}$, *gdje je*

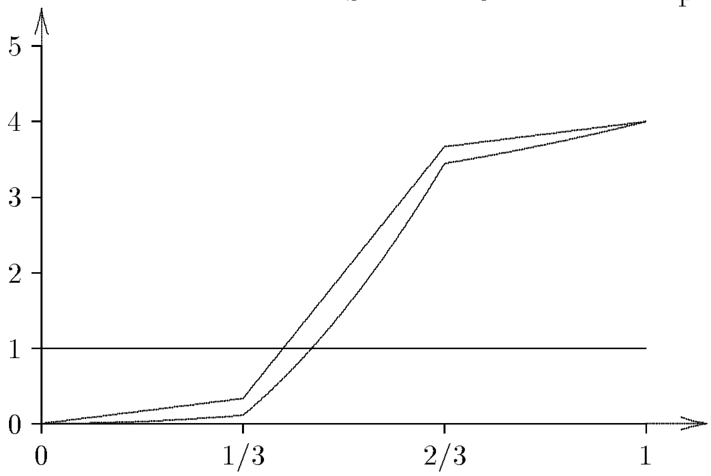
$$u_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\{\sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{p_{i+1}}[(\frac{i+1}{m-1})^{k-1} - (\frac{i}{m-1})^{k-1}] + \frac{x^{k-1} - (\frac{j}{m-1})^{k-1}}{p_{j+1}}\}$$

za $k = 2, \ldots n$; j *je indeks za koji je ispunjeno*

$$x_j \le x < x_{j+1}.$$

Ako je npr. $m = 4$ *i* $p_1 = 1$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 1$, *tada je* $\mathcal{S}(3, \boldsymbol{p})$ *sistem prikazan na slici 1.1.*

Slika 1.1 Generalizirane potencije



Definicija 1.3.1 ima smisla i ako je $1/p$ funcija ograničene varijacije i $p(x)$ mijenja znak, ali teorem 1.1.1 očito ne vrijedi.

Za sisteme s jednom težinom generalizirane derivacije i pridruženi CCT-sistemi dobivaju jednostavniji oblik. Neka je u daljnjem $\boldsymbol{p} = [1/p(x), 1, \dots 1]^T$ gdje je $1/p$ gustoća neke zadane mjere $d\sigma$. Operatori generaliziranih derivacija su:

$$L_i := L_{i,\boldsymbol{p}} = D^{i-1}p(x)D \qquad \text{za} \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.9}$$

Ako primjenimo L_i operatora na funkcije u (1.8) dolazimo do reduciranih sistema:

$$\mathcal{S}(n-i, \boldsymbol{p}) = \{u_{i,j} : j = 1, \dots, n-i\} \tag{1.10}$$

gdje je

$$u_{i,j-i}(x) := L_i u_j(x) = (x-a)^{j-i-1} \qquad \text{za} \quad j = i+1, \dots, n;\ i = 1, \dots, n\,.$$

Dualni sistem funkcija $\mathcal{S}(n, D_{n-1}\boldsymbol{p})$ svodi se na:

$$\begin{aligned} u_i^*(y) &= (y-a)^{i-1} \qquad i = 1, \dots, n-1 \\ u_n^*(y) &= \textstyle\int_a^y ds_2 \int_a^{s_2} ds_3 \cdots \int_a^{s_{n-1}} d\sigma(s_n), \end{aligned} \tag{1.11}$$

gdje je $D_{n-1}\boldsymbol{p} = [1, \dots 1, 1/p]^T$ dualni vektor, a odgovarajuće dualne derivacije su $L_{i,D_{n-1}\boldsymbol{p}} =: L_i^*$, odn.

$$\begin{aligned} L_i^* &:= L_{i,D_{n-1}\boldsymbol{p}} = D^i \qquad \text{za} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ L_{n-1}^* &:= pD^{n-1} \\ L_n^* &:= DpD^{n-1}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

U skladu s tim, odgovarajući reducirani dualni sistemi su:

$$\mathcal{S}(n-i, R_{n-i} \cdots R_{n-1} D_{n-1}\boldsymbol{p}) = \{u_{i,j}^* : j = 1, \dots, n-i\}, \tag{1.13}$$

gdje je:

$$u_{i,j-i}^*(y) := L_i^* u_j^*(y) \qquad \text{za} \quad j = i+1, \dots, n; \qquad i = 1, \dots, n$$

ili, eksplicitno:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^*(y) &= y^i \qquad j = 1, \dots, n-i-1 \\ u_{i,n-i}^*(y) &= \int_0^y ds_{2-i} \int_0^{s_{2-i}} \dots \int_0^{s_{n-1}} d\sigma(s_n). \end{aligned}$$

Slijedeća definicija zapravo je specijalan slučaj opće definicije Green-ove funkcije CCT-sistema. Za sisteme s jednom težinom oznaka $\boldsymbol{p}$ može se i ne pisati, budući da za $i < n$ nema ovisnosti težini p. Funkcija $g_n : [a,b] \times [a,b] \to \mathcal{R}$ zadana formulom:

$$g_n(x,y) := \begin{cases} \int_y^x \frac{1}{p(t_2)} \int_y^{t_2} \dots \int_y^{t_{n-1}} dt_n & x \geq y \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

je *Green-ova funkcija CCT-sistema* $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p})$. Green-ove funkcije reduciranih sistema imaju za $i<n$ posebno jednostavan oblik:

$$g_i(x,y) := g_{i,R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^{i-1}}{(i-1)!} & x \geq y \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

TEOREM **1.4.1** *Neka je* $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p})$ *CCT-sistem s jednom težinom. Tada je za* $1 \leq i < n$

$$L_i : \mathcal{S}(n,\boldsymbol{p}) \to \mathcal{S}(n-i, R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}) \equiv \mathcal{P}(n-i)$$

i vrijedi:

$$L_i g_n(x,y) = g_{n-i}(x,y) = \frac{(x-y)_+^{n-i}}{(n-i)!}, \quad i=1,\ldots,n-1,$$

gdje se derivacija uzima po prvoj varijabli.

DOKAZ: Direktna posljedica teorema 1.1.3. ∎

2. Čebiševljevi spline-ovi

2.1 Definicije i oznake

Prostore spline-funkcija definiramo u skladu s radovima Schumakera [50] i Schumakera i Scherera [48], iako se definicije razlikuju "u detaljima", pogotovo tamo gdje se koriste derivacije Green-ovih funkcija. U daljnjem ćemo pretpostaviti, da za sve CCT-sisteme vrijedi:

$$u_1(x) = 1 \tag{2.1}$$

što omogućuje simetriju osnovnih i dualnih CCT-sistema (v. definicije 1.1.1 i 1.1.3). Vidjet ćemo, da pretpostavka (2.1) ne smanjuje općenitost razmatranja o konstrukcijama lokalnih baza.

Neka je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_k < x_{k+1} = b \tag{2.2}$$

particija intervala $[a,b]$ na $k+1$ podintervala $\Delta_i = [x_i, x_{i+1})$ za $i = 0, \ldots k-1$, $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$. Skup $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{k+1}$ je *mreža* a njegovi elementi *čvorovi mreže.* Za dani *vektor multipliciteta* $\boldsymbol{m} = (n_1, \ldots, n_k)^T$ definiramo *proširenu particiju* $t_1, \ldots, t_{2n+k}$ tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} t_1 = \ldots = t_n &= a \\ t_{n+k+1} = \ldots = t_{2n+k} &= b \\ t_{n+1} \le \ldots \le t_{n+k} &= \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{n_1}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{n_k} \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdje $n_i \in \mathcal{Z}$ zadovoljavaju uvjet $1 \le n_i \le n$.

DEFINICIJA **2.1.1** *Neka je $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ CCT-sistem kao u definiciji 1.1.1. Skup $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$ ograničenih funkcija na $[a,b]$ takvih da vrijedi:*

(i) za svaki $s \in \mathcal{S}(n, \boldsymbol{m}, d\boldsymbol{\sigma}, \Delta)$ i svaki $i = 0, \ldots, k$ postoji $s_i \in \mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ takav da je $s|_{\Delta_i} = s_i|_{\Delta_i}$,

(ii) $L_{j,d\boldsymbol{\sigma}} s_{i-1}(x_i) = L_{j,d\boldsymbol{\sigma}} s_i(x_i)$ za $j = 0, \ldots n-1-n_i$, $i = 1, \ldots, k$

zove se prostor Čebiševljevih spline funkcija na mreži Δ.

Ako je $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p})$ CCT-sistem s jednom netrivijalnom težinom u smislu definicije 1.3.1, upotrijebit ćemo oznaku $\mathcal{S}(n,p,\boldsymbol{m},\Delta)$ i pripadni prostor zvati *prostor Čebiševljevih spline funkcija s jednom netrivijalnom težinom.* Ako je $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p}) = \mathcal{P}(n)$ prostor polinoma reda n tada je $\mathcal{P}(n,\boldsymbol{m},\Delta)$ prostor *polinomnih spline-ova.* Lagano se pokaže da je $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\Delta)$ vektorski prostor dimenzije $n+\sum_{i=1}^{k} n_i$ [50].

Nije teško konstruirati tzv. *jednostrane baze* prostora $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\Delta)$ ([43]).

TEOREM **2.1.1** *Neka je* $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\Delta)$ *prostor CCT-spline funkcija kao u definiciji 2.1.1,* $\boldsymbol{m}=(n_1,\ldots,n_k)^T$ *i* $n_0 := n$. *Tada Green-ove funkcije*

$$g_{n-j+1,S_{n-j+1}\cdots S_{n-1}\boldsymbol{p}}(x,x_i) \qquad j=1,\ldots,n_i, \quad i=0,\ldots,k$$

čine jednu bazu prostora $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\Delta)$.

DOKAZ: v. [50] ∎

PRIMJER **2.1.1** *Neka je* $n = 3$, $\boldsymbol{p}=[\frac{1}{\sqrt{x}},1]^T$, $\boldsymbol{m} = [1,1]^T$ *i* $\Delta=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$. *Kako je*

$$g_{3,\boldsymbol{p}}(x,y) = \begin{cases} 0 & x<y \\ \frac{2}{3}x^{1.5} - 2yx^{0.5} + \frac{4}{3}y^{1.5} & x \geq y \end{cases}$$

(v. primjer 1.1.3), bazu čini 5 *funkcija*

$$\begin{array}{lll} g_{3,\boldsymbol{p}}(x,0) & g_{3,\boldsymbol{p}}(x,\frac{1}{3}) & g_{3,\boldsymbol{p}}(x,\frac{2}{3}) \\ g_{2,S_2\boldsymbol{p}}(x,0) & & \\ g_{1,S_1S_2\boldsymbol{p}}(x,0). & & \end{array}$$

PRIMJER **2.1.2** *Ako izmijenimo samo vektor multipliciteta u gornjem primjeru:*

$$\boldsymbol{m} = [1,2]^T$$

tada je $\dim \mathcal{S}(3,\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\Delta) = 6$ *i bazu čine:*

$$\begin{array}{lll} g_{3,\boldsymbol{p}}(x,0) & g_{3,\boldsymbol{p}}(x,\frac{1}{3}) & g_{3,\boldsymbol{p}}(x,\frac{2}{3}) \\ g_{2,S_2\boldsymbol{p}}(x,0) & & g_{2,S_2\boldsymbol{p}}(x,\frac{2}{3}) \\ g_{1,S_1S_2\boldsymbol{p}}(x,0) & & \end{array}$$

gdje je npr. $g_{3,\boldsymbol{p}}(x,\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}[\sqrt{x}(x-1)+\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Slijedeći teorem daje interpretaciju koeficijenata u razvoju spline-a po Greenovim funkcijama iz teorema 2.1.1.

TEOREM **2.1.2** *Neka je $s \in \mathcal{S}(n, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, \Delta)$, $\boldsymbol{m} = [n_1, \ldots n_k]^T$ i $n_0 = n$. Ako L^x (L^y) označava deriviranje po x (y) tada s ima po dijelovima Čebiševljevu (PT) reprezentaciju:*

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} L^y_{j-1, D_{n-1}\boldsymbol{p}} g_{n,\boldsymbol{p}}(x, x_0) L^x_{n-j,\boldsymbol{p}} s(x_0) +$$

$$\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} (-1)^{j-1} [L^x_{n-j,\boldsymbol{p}} s(x_i)] L^y_{j-1, D_{n-1}\boldsymbol{p}} g_{n,\boldsymbol{p}}(x, x_i)$$

gdje je s $[L^x_{n-j,\boldsymbol{p}} s(x_i)]$ označen skok generalizirane derivacije u $x = x_i$:

$$[L^x_{k,\boldsymbol{p}} s(x_i)] = L^x_{k,\boldsymbol{p}} s(x_i+) - L^x_{k,\boldsymbol{p}} s(x_i-)$$

za $k = n - n_i, \ldots n$ (v. definiciju 2.1.1).

DOKAZ: Prema teoremu 2.1.1 postoje koeficijenti c_{ij}, $j = 1, \ldots, n_i$, $i = 0, \ldots, k$ za koje je

$$s(x) = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} g_{n-j+1, S_{n-j+1} \cdots S_{n-1}\boldsymbol{p}}(x, x_i). \tag{2.4}$$

Za $x \in \Delta_0$ je prema definiciji 2.1.1

$$s(x) = s_0(x) = \sum_{j=1}^{n} c_{0j} g_{n-j+1, S_{n-j+1} \cdots S_{n-1}\boldsymbol{p}}(x, x_0). \tag{2.5}$$

Kako je za $i = 0, \ldots n-1$

$$L^x_{i,\boldsymbol{p}} g_{n-j+1, S_{n-j+1} \cdots S_{n-1}\boldsymbol{p}}(x, x_0) = L^x_{i,\boldsymbol{p}}\, u_{n-j+1}(x) + \ldots$$

slijedi:

$$L^x_{i,\boldsymbol{p}}\, u_{n-j+1}(x) \mid_{x=x_0} = \delta_{i,n-j}.$$

(2.5) povlači da vrijedi

$$L^x_{i,\boldsymbol{p}} s_0(x) = c_{0\,n-i} \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

Za $x \in \Delta_i$ analogno slijedi

$$c_{ij} = L^x_{n-j,\boldsymbol{p}} s_i(x_i) - L^x_{n-j} s_{i-1}(x_i) \qquad j = 1, \ldots, n_i \quad i = 1, \ldots, k$$

odnosno

$$c_{ij} = L^x_{n-j,\boldsymbol{p}} s(x_i+) - L^x_{n-j} s(x_i-) \qquad j = 1, \ldots, n_i \quad i = 1, \ldots, k.$$

Budući da je

$$L^y_{n-j,D_{n-1}\boldsymbol{p}} g_{n,\boldsymbol{p}}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} u_i(x) L^y_{n-j,D_{n-1}\boldsymbol{p}} u^*_{n-i+1}(y) =$$

$$\sum_{i=1}^{j} (-1)^{n-j} (-1)^{j-i} u_i(x) u^*_{n-j,j-i+1}(y) = (-1)^{n-j} g_{j,S_j \cdots S_{n-1}\boldsymbol{p}}(x,y),$$

prema (1.4), tvrdnja teorema slijedi. ∎

2.2 Lokalne baze

Matrica c_{ij} iz teorema 2.1.2 može se koristiti za efektivnu reprezentaciju spline funkcije na računalu. Iskustvo s polinomnim spline-ovima navodi nas međutim na zaključak o lošoj uvjetovanosti PT-reprezentacije; funkcije $g_{n-j+1,S_{n-j+1}\cdots S_{n-1}\boldsymbol{p}}$ postaju "skoro" linearno zavisne za male udaljenosti među čvorovima (v. npr. [14] i pripadnu listu referenci za polinomni slučaj).

Apstraktno se može pokazati egzistenija *lokalnih baza,* tj. baza koje se sastoje od funkcija s kompaktnim nosačem ([50]), koje ćemo općenito zvati B-spline-ovima. Sasvim je drugačija situacija s efektivnom konstrukcijom (ili stabilnim algoritmom) za generiranje takvih baza. Taj je problem do danas[1] riješen u potpunosti u slijedećim slučajevima:

(1) polinomni ([6], [4]),

(2) trigonometrijski [28], [24],

(3) hiperbolički [53],

(4) Čebiševljevi spline-ovi, kod kojih su težine jednake [51].

Slučajevi (2) i (3) mogu se također razmatrati i kao specijalni slučaj jedinstvenih rekurzija u kompleksnom području [56], [47]. Negativan rezultat Schumakera [51] pokazuje da osim navedenih četiri (u trigonometrijskom slučaju ECT-svojstvo vrijedi samo na intervalima duljine manje od π) ne postoje ECT-sistemi kod kojih se B-splineovi mogu generirati rekurentnim formulama oblika

$$B_i^k(x) = \frac{\phi_k(x-t_i)B_i^{k-1}(x) + \phi_k(t_{i+k}-x)B_{i+1}^{k-1}(x)}{\phi_k(t_{i+k}-t_i)}$$

ili

$$B_i^k(x) = \frac{(\psi_k(x)-\psi_k(t_i))B_i^{k-1}(x) + (\psi_k(t_{i+k})-\psi_k(x))B_{i+1}^{k-1}(x)}{\psi_k(t_{i+k})-\psi_k(t_i)}$$

[1] koliko je autoru poznato

za $t_i < t_{i+k}$, gdje su ϕ_k i ψ_k za $k = 1, \ldots n$ funkcije u $C^{n-2}[0, b-a]$. To naravno ne isključuje mogućnost postojanja alternativnih algoritama za generiranje B-spline-ova. Jedna od mogućnosti je i relaksacija uvjeta glatkoće za funkcije ϕ i ψ u gornjim rekurzijama. Takav pristup pokazao se uspješnim u konstrukciji baza za tzv. g-spline-ove [44]. Lyche je pokazao [26] metodom ubacivanja čvorova ("knot insertion") da se B-spline-ovi vezani uz ECT-sistem reda n mogu rekurzivno izraziti pomoću funkcija u ECT-sistemu reda $n-1$, točnije, pokazao je da postoje $\lambda_i^{k,n}$ takvi da vrijedi

$$B_i^{k+1,n}(x) = \lambda_i^{k,n} B_i^{k,n}(x) + (1 - \lambda_{i+1}^{k,n}) B_{i+1}^{k,n}(x) \tag{2.6}$$

gdje je:

$$B_i^{k,n}(x) = \begin{cases} B^n(x|t_i, \ldots, \underbrace{x, \ldots, x}_{n-k}, \ldots, t_{i+k}) & x \in [t_i, t_{i+k}] \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Oznaka $B^n(x|t_i, \ldots, t_{i+k})$ označava B-spline u kojem je važno označiti čvorove unutar njegovog nosača. Koeficijenti $\lambda_i^{k,n}$ u rekurziji su razlike determinanti, koje se teško mogu računati. Lyche je prvi, koji je nakon negativnog rezultata Schumakera pokazao, da je ipak moguće konstruirati (bar u teoriji) Čebiševljeve B-spline-ove rekurzijama tipa deBoor–Cox. Na osnovu Lyche-ovog izvoda se ne vidi, kako bi se računale generalizirane derivacije B-spline-ova. U daljnem ćemo pokazati, da je u potpuno općenitom slučaju spline-ova iz $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, \Delta)$ moguće računati generalizirane derivacije, te da se njihovo računanje svodi na linearne kombinacije B-spline-ova u reduciranim sistemima. Za ECT-sisteme to povlači i računanje "običnih" derivacija. Budući da $L-$derivacije djeluju na CCT-sistemu tako da reduciraju vektor težina (v. teorem 1.1.3), razmotrit ćemo prvo Čebiševljeve spline funkcije s jednom težinom, kod kojih se L_1-derivacije mogu računati vrlo slično kao i u polinomnom slučaju kao linearne kombinacije polinomnih B-spline-ova. Zatim dokazujemo da su formule za L_1- derivacije spline-ova s jednom težinom samo specijalni slučaj općenite situacije: L_1-derivacije spline-ova s j težina mogu se izraziti kao linearne kombinacije splineova s $j-1$ težina. Odavde se odmah vidi da se lako računaju i L_k-derivacije spline-ova s proizvoljnim težinama. Na kraju ćemo vidjeti u kojoj mjeri je moguće izračunati same spline-ove integracijom po odgovarajućoj mjeri.

Slijedi nekoliko preglednih definicija, koje se oslanjaju na (1.3) i teorem 1.1.1.

DEFINICIJA **2.2.1** *Nenormalizirani Čebiševljev B-spline na mreži Δ pridružen vektoru težina $d\boldsymbol{\sigma}$ i CCT-sistemu $S(n, d\boldsymbol{\sigma})$ je podijeljena diferencija Green-ove funkcije obzirom na prošireni dualni sistem, odnosno:*

$$Q_{i,d\boldsymbol{\sigma}}^n(x) = (-1)^n [t_i, \ldots t_{i+n}]_{\mathcal{S}(n+1, d\boldsymbol{\kappa})} g_{n,d\boldsymbol{\sigma}}(x, \cdot)$$

gdje je $d\boldsymbol{\kappa}$ produljeni vektor težina (definicija 1.1.6). Ako postoji vektor težina, ili *ako je $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{p})$ ECT-sistem, tada je*

$$Q^n_{i,\boldsymbol{p}}(x) = (-1)^n [t_i, \ldots t_{i+n}]_{\mathcal{S}(n+1,\boldsymbol{q})} g_{n,\boldsymbol{p}}(x, \cdot)$$

gdje je

$$\boldsymbol{q} = E_{n-1} D_{n-1} \boldsymbol{p} + \boldsymbol{e}_n.$$

Definicija 2.2.1 ne određuje $Q^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}$ na jedinstven način, već čini definiciju ovisnu o operatoru ekstenzije. Može se pokazati, da je definicija takva za integraciju po Lebesgue-ovoj mjeri vrijedi

$$\int_{t_i}^{t_{i+n}} Q^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}} d\lambda = 1.$$

TEOREM **2.2.1** *Spline-ovi $Q^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}$, $i = 1, \ldots, n + \sum_{i=1}^k n_i$, čine bazu prostora funkcija razapetog sistemom $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, \Delta)$, i vrijedi*

$$Q^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = 0 \qquad x < t_i \; i \; x > t_{i+n}$$

i

$$Q^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) > 0 \qquad t_i < x < t_{i+n}.$$

DOKAZ: v. [50, 52]. ∎

Poznato je, da se $Q^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}$ mogu normalizirati tako da čine particiju jedinice, tj. vrijedi slijedeći

TEOREM **2.2.2** *Neka je $T^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) := \alpha^n_i(d\boldsymbol{\sigma})\, Q^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x)$ gdje je*

$$\alpha^n_i(d\boldsymbol{\sigma}) = \frac{D\begin{pmatrix} t_i, \ldots, t_{i+n} \\ u_1^*, \ldots, u_{n+1}^* \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} t_{i+1}, \ldots, t_{i+n-1} \\ u_1^*, \ldots, u_{n-1}^* \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} t_{i+1}, \ldots, t_{i+n} \\ u_1^*, \ldots, u_n^* \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} t_i, \ldots, t_{i+n-1} \\ u_1^*, \ldots, u_n^* \end{pmatrix}}$$

Tada je $\alpha^n_i(d\boldsymbol{\sigma}) > 0$ i vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n+K} T^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = 1$$

za svaki $x \in [a, b]$.

DOKAZ: v. [52]. ∎

T-spline iz teorema 2.2.2 zvat ćemo *normalizirani Čebiševljev B-spline*, ili kraće *T-spline*. Za CCT-sisteme s težinama i ECT-sisteme označimo ih s $T^n_{i,\boldsymbol{p}}$.

LEMA **2.2.1** *Definicija T-spline-a neovisna je o operatoru ekstenzije E_{n-1}.*

DOKAZ: Iz definicije 1.1.6 i teorema 2.2.2 slijedi

$$T^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = \frac{D\begin{pmatrix} t_i, \ldots, t_{i+n} \\ u_1^*, \ldots, u_{n+1}^* \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} t_{i+1}, \ldots, t_{i+n-1} \\ u_1^*, \ldots, u_{n-1}^* \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} t_{i+1}, \ldots, t_{i+n} \\ u_1^*, \ldots, u_n^* \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} t_i, \ldots, t_{i+n-1} \\ u_1^*, \ldots, u_n^* \end{pmatrix}} \cdot \frac{D\begin{pmatrix} t_i, & \ldots, & & t_{i+n} \\ u_1^*, & \ldots, & u_n^*, & g_{n,d\boldsymbol{\kappa}} \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} t_i, \ldots, t_{i+n} \\ u_1^*, \ldots, u_{n+1}^* \end{pmatrix}}, \tag{2.7}$$

pa se determinante koje ovise o u_{n+1}^* krate. ∎

Za T-spline vrijedi još jedna zanimljiva formula, koja će u daljnjem biti od velikog značenja; iz nje se vidi eksplicitno neovisnost T-spline-a o operatoru ektenzije. Donju lemu implicitno koristi Lyche [26] u sklopu dokaza rekurzije (2.15).

LEMA **2.2.2** *T-spline je razlika podijeljenih diferenci Green-ove funkcije:*

$$\begin{aligned} T^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) &= (-1)^n([t_{i+1}, \cdots, t_{i+n}]_{\mathcal{S}(n,D_{n-1}d\boldsymbol{\sigma})} g_{n,d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot) - \\ &\quad [t_i, \cdots, t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n,D_{n-1}d\boldsymbol{\sigma})} g_{n,d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot). \end{aligned} \tag{2.8}$$

DOKAZ: Poznati Sylvesterov identitet, koji igra važnu ulogu u teoriji totalne pozitivnosti [22, str.8], povlači:

$$\begin{aligned} D\begin{pmatrix} t_{i+1}, \ldots, t_{i+n-1} \\ u_1^*, \ldots, u_{n-1}^* \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} t_i, & \ldots, & & t_{i+n} \\ u_1^*, & \ldots, & u_n^*, & g_{n,d\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} &= \\ D\begin{pmatrix} t_{i+1}, & \ldots, & & t_{i+n} \\ u_1^*, & \ldots, & u_{n-1}^*, & g_{n,d\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} t_i, \ldots, t_{i+n-1} \\ u_1^*, \ldots, u_n^* \end{pmatrix} &- \\ D\begin{pmatrix} t_i, & \ldots, & & t_{i+n-1} \\ u_1^*, & \ldots, & u_{n-1}^*, & g_{n,d\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} t_{i+1}, \ldots, t_{i+n} \\ u_1^*, \ldots, u_n^* \end{pmatrix}&, \end{aligned}$$

pa dokaz teorema slijedi iz (2.7) i definicije 2.2.1 kada podijelimo lijevu i desnu stranu s produktom (pozitivnih) determinanti

$$D\begin{pmatrix} t_{i+1}, \ldots, t_{i+n} \\ u_1^*, \ldots, u_n^* \end{pmatrix} \cdot D\begin{pmatrix} t_i, \ldots, t_{i+n-1} \\ u_1^*, \ldots, u_n^* \end{pmatrix}$$

i iskoristimo definiciju podijeljene diference (definicija 1.1.6). ∎

Računanje T-spline-ova "po definiciji" nije samo numerički nestabilno, nego je i inače vrlo neugodno i dolazi u obzir samo za male redove CCT-sistema ($n = 2$ ili $n = 3$). Računati T-spline po formuli (2.7) ili (2.8) u *floating point* aritmetici bilo bi lošije uvjetovano nego da se koristi PT-reprezentacija spline-a, budući da treba računati determinante. Ponekad se T-spline može izračunati formulom po intervalima od kojih se sastoji nosač, ako težinske funkcije omogućuju analitičku integraciju i ako su dobivene formule stabilne za računanje. Vidjet ćemo, da to uglavnom nije slučaj.

2.3 Čebiševljevi spline-ovi s jednom težinom

Neka je $\mathcal{S}(n,p)$ CCT-sistem s jednom netrivijalnom težinom u smislu (1.8) i neka je $d\sigma$ mjera s gustoćom $1/p$. B-spline-ove u $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\Delta)$ koji imaju nosač $[t_i,t_{i+n}]$ označavat ćemo s T_i^n, a polinomne B-spline-ove iz $\mathcal{P}(n,\boldsymbol{m},\Delta)$ s B_i^n. I jedni i drugi normalizirani su tako da čine particiju jedinice (teorem 2.2.2).

Promotrimo prvo jedan primjer *iracionalnih spline-ova* s jednom težinom u kojem možemo sve izračunati "po definiciji" (usp. primjer 1.1.1). Neka je $n=3$, $\boldsymbol{p}=[x^{-\frac{1}{2}},1]^T$, $\boldsymbol{m}=[1,\ldots,1]^T$. Izračunajmo sve T-spline-ove na $[a,b]$ ako je proširena particija zadana čvorovima $x_0,\ldots,x_{k+1}$ općenito kao u (2.3). Izostavimo privremeno oznaku $\boldsymbol{p}$ u $T^3_{i,\boldsymbol{p}}$, $g_{3,\boldsymbol{p}}\ldots$ T_i^3-spline sastoji se po dijelovima od funkcija CCT-sistema

$$\{1, 2x^{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\},$$

Green-ova funkcija je

$$g_3(x,y)=\begin{cases}0 & x<y\\ \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}y+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} & x\geq y.\end{cases}$$

Bazu CCT-prostora razapetog s $\mathcal{S}(3,\boldsymbol{p},\boldsymbol{m},\Delta)$ čini $3+k$ funkcija, od kojih su četiri "rubna" spline-a T_1^3,T_2^3 i T_{k+2}^3,T_{k+3}^3 nešto drugačiji od ostalih. Poznato je, da se T-spline može uvijek lagano izračunati na prvom i zadnjem intervalu svojeg nosača. Iz (2.7) slijedi

$$T_1^3(x)=(-1)^3\frac{D\begin{pmatrix}a & a & a & x_1\\ u_1^* & u_2^* & u_3^* & g_3(x,\cdot)\end{pmatrix}D\begin{pmatrix}a & a\\ u_1^* & u_2^*\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}a & a & x_1\\ u_1^* & u_2^* & u_3^*\end{pmatrix}D\begin{pmatrix}a & a & a\\ u_1^* & u_2^* & u_3^*\end{pmatrix}},$$

pa nakon računanja dobijemo

$$T_1^3(x)=\begin{cases}\frac{g_3(x,x_1)}{g_3(a,x_1)} & a\leq x<x_1\\ 0 & \text{inače.}\end{cases}$$

Analogno je

$$T_{k+3}^3(x)=\begin{cases}\frac{g_3(x,x_k)}{g_3(b,x_k)} & x_1\leq x<b\\ 0 & \text{inače.}\end{cases}$$

Neka je

$$\Delta_2(u,v,w):=\begin{vmatrix}1 & u & u^{\frac{3}{2}}\\ 1 & v & v^{\frac{3}{2}}\\ 1 & w & w^{\frac{3}{2}}\end{vmatrix}.$$

Očito je

$$\Delta_2(u,v,w) = D\begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & y & y^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = < u,v,w > y^{\frac{3}{2}} \cdot D\begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & y & y^2 \end{pmatrix}$$

gdje je

$$D\begin{pmatrix} u & v & w \\ 1 & y & y^2 \end{pmatrix} = (w-v)(w-u)(v-u)$$

Vandermonde-ova determinanta. Laplace-ov razvoj deteminante u (2.7) daje za $T_i^3(x)$, $i = 2, \ldots, k+1$ formulu:

$$\frac{1}{c(i)}\begin{cases} -g_3(x,x_i)\Delta_2(x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}) & x_i \le x < x_{i+1} \\ -g_3(x,x_i)\Delta_2(x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}) + g_3(x,x_{i+1})\Delta_2(x_i,x_{i+2},x_{i+3}) & x_{i+1} \le x < x_{i+2} \\ -g_3(x,x_i)\Delta_2(x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}) + g_3(x,x_{i+1})\Delta_2(x_i,x_{i+2},x_{i+3}) & \\ -g_3(x,x_{i+2})\Delta_2(x_i,x_{i+1},x_{i+3}) & x_{i+2} \le x < x_{i+3} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

gdje je

$$c(i) := \frac{9}{16}\frac{x_{i+1} - x_{i+2}}{\Delta_2(x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3})\Delta_2(x_i,x_{i+1},x_{i+2})}.$$

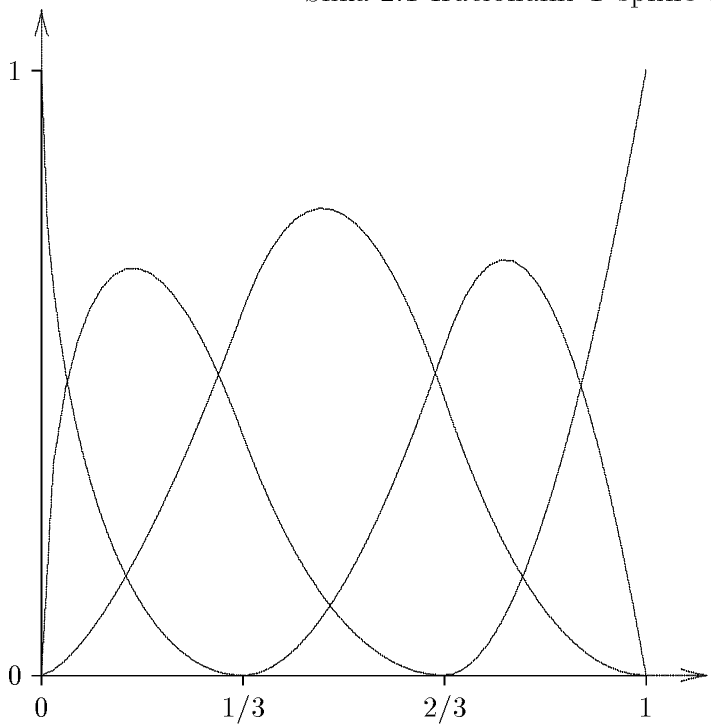
Slično se izračunaju i rubni spline-ovi T_2^3, T_{k+2}^3. Iracionalni T-spline-ovi naizgled su slični polinomnim. Na slici 2.1 prikazano je 5 T-spline-ova reda 3 na mreži $\Delta = \{0, 1/3, 2/3, 1\}$. Primijetimo da $T_1^3(x)$ nema klasičnu derivaciju u $x = 0$, ali je

$$L_1 \frac{g_3(x,0)}{g_3(0,x_1)}|_{x=0} = \frac{3}{4}x_1^{-\frac{1}{2}} < \infty.$$

Podaci za sliku 2.1 generirani su slijedećim potprogramom:

```
      subroutine IRBSPLD(i,k,x,a,b,c,d,xni,dxni,iflag)
      implicit double precision (a-h,o-z)
c
c      calculates values of irational B-splines and
c      their second derivatives at point x in (a,d);
c      to be used in collocation for  difequ
c
c*****INPUT*****
c            I = i-th  spline
c            K = number of splines
c            X = evaluation point
c            A,B,C,D = knots for i-th T-spline
c*****OUPUT*****
c            XNI = T-spline value at x
c            DXNI = second gen.derivative at x
```

Slika 2.1 Iracionalni T-spline-ovi reda 3




```
c            IFLAG = 0 or 1;
c                    0 - ok.
c                    1 - a>=d (error)
c
c     W A R N I N G: numerically unstable for close knots;
c              to be used as demo only
c
      if(a.lt.d) go to 1
      iflag=1
      return
1     iflag=0
      if((x.lt.a).or.(x.gt.d)) then
         xni=0.
         dxni=0.
         return
      endif
      if(i.eq.1) go to 98
      if (i.eq.2) go to 99
      if (i.eq.k-1) go to 100
      if (i.eq.k) go to 101
      a1=div2(b,c,d)
      b1=div2(a,c,d)
```

```
      c1=div2(a,b,d)
      d1=div2(a,b,c)
      const=-0.75d0*(c-b)/(a1*d1)
      pom=-green(x,a)*a1+green(x,b)*b1-green(x,c)*c1+green(x,d)*d1
      xni=const*pom
      if ((x.ge.a).and.(x.lt.b)) then
          dxni=-const*a1
          return
      else if ((x.ge.b).and.(x.lt.c)) then
           dxni=const*(-a1+b1)
           return
      else if ((x.ge.c).and.(x.le.d)) then
           dxni=const*(-a1+b1-c1)
      endif
      return
98    const=-0.75d0/(d*dsqrt(d))
      sqrtx=dsqrt(x)
      xni=const*(-2.d0/3.d0*x*sqrtx+2.d0*sqrtx*d-4.d0/3.d0*d*dsqrt(d))
      dxni=-const
      return
99    sqrc=dsqrt(c)
      sqrd=dsqrt(d)
      const=-0.75d0/(c*sqrc*d*(sqrd-sqrc))
      xni=const*(2.d0/3.d0*x*dsqrt(x)*(d*sqrd-c*sqrc)-
     *    2.d0*dsqrt(x)*c*d*(sqrd-sqrc)-d*sqrd*green(x,c))
      if ((x.ge.a).and.(x.lt.c)) then
          dxni=const*(d*sqrd-c*sqrc)
          return
      else if ((x.ge.c).and.(x.le.d)) then
          dxni=-const*c*sqrc
      endif
      return
100   const=-0.75d0*(d-b)/(green(d,b)*div2(a,b,d))
      sqrta=dsqrt(a)
      sqrtb=dsqrt(b)
      sqrtc=dsqrt(c)
      xni=const*(-green(x,a)*green(d,b)+green(x,b)*green(d,a))
      if((x.ge.a).and.(x.lt.b)) then
         dxni=-const*green(d,b)
         return
      else if ((x.ge.b).and.(x.le.d)) then
         dxni=const*(-green(d,b)+green(d,a))
      endif
      return
101   xni=green(x,a)/green(d,a)
```

```
      dxni=1.0d0/(green(d,a))
      return
      end
      double precision function green(x,y)
      implicit double precision (a-h,o-z)
c
c     Calculates Green's function for CCT-system
c     consisting of the functions in
c     the null-space of DD(sqrt(x)D
c
      if(x.lt.y) then
         green=0.d0
                 else
         c=2.d0/3.d0
         xsqrt=dsqrt(x)
         green=2.d0*c*y*dsqrt(y)-2.d0*xsqrt*y+c*x*xsqrt
      endif
      return
      end
      double precision function DIV2(a,b,c)
      implicit double precision (a-h,o-z)
c
c     calculates third generalized divided difference
c
      f(x)=x*dsqrt(x)
      div2=f(a)*(c-b)-f(b)*(c-a)+f(c)*(b-a)
      return
      end
```

Prve generalizirane derivacije iracionalnih spline-ova su kombinacije linearnih polinomnih spline-ova. Pokazat ćemo da je to općenito svojstvo Čebiševljevih sistema s jednom težinom, te da se koeficijenti u linearnoj kombinaciji daju analitički odrediti.

Neka je $\mathcal{S}(n,p)$ Čebiševljev sistem s jednom netrivijalnom težinom p,$1/p \in L^1[a,b]$ i $d\sigma$ mjera s gustoćom $1/p$. Izostavimo u daljnjem oznaku težine $\boldsymbol{p}$, tj. upotrijebimo jednostavnije oznake za CCT-sisteme s jednom težinom kao u (1.9)–1.13).

T-spline-ove u $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{m},\Delta)$ koji imaju nosač $[t_i,t_{i+n}]$ označavat ćemo s T_i^n i analogno polinomne spline-ove u $\mathcal{P}(n,\boldsymbol{m},\Delta)$ s B_i^n. U daljnjem tekstu pretpostavljamo da i jedni i drugi čine particiju jedinice, tj. da vrijedi:

$$\sum_i T_i^n(x) = 1$$

$$\sum_i B_i^n(x) = 1$$

za svako $x \in [a,b]$. Znamo, da particija jedinice određuje polinomne i Čebiševljeve B-spline-ove na jedinstven način. Na osnovu teorema 1.4.1 zaključujemo da prva generalizirana derivacija spline-a T_i^n mora biti element prostora $\mathcal{P}(n-1, \boldsymbol{m}, \Delta)$, i stoga linearna kombinacija polinomnih B-spline-ova u tom prostoru. Slijedeći teorem povezuje prostore $\mathcal{S}(n, \boldsymbol{m}, \Delta)$ i $\mathcal{P}(n-1, \boldsymbol{m}, \Delta)$ preko njihovih baza (usp. također [44]).

TEOREM **2.3.1** *Neka je L_1 kao u (1.9), i neka vektor multipliciteta $\boldsymbol{m}$ zadovoljava uvjet $n_i < n$. Tada za svaki $x \in [a,b]$ i $i = 1, \ldots, n + \sum_{i=1}^k n_i$ vrijedi:*

$$L_1 T_i^n(x) = \frac{B_i^{n-1}(x)}{C_n(i)} - \frac{B_{i+1}^{n-1}(x)}{C_n(i+1)}, \tag{2.9}$$

gdje je $C_n(i)$ definiran kao:

$$C_n(i) := (n-2)!\,(t_{i+n-1} - t_i) < t_i, \ldots, t_{i+n-1} > u_n^*. \tag{2.10}$$

DOKAZ: Prema lemi 2.2.2 je

$$\begin{aligned} T_i^n(x) = {} & (-1)^n([t_{i+1}, \cdots, t_{i+n}]_{\mathcal{S}(n, D_{n-1}\boldsymbol{p})} g_n(x, \cdot) - \\ & [t_i, \cdots, t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n, D_{n-1}\boldsymbol{p})} g_n(x, \cdot). \end{aligned}$$

Teorem 1.4.1 povlači da je

$$L_1 T_i^n(x) = (-1)^n([t_{i+1}, \cdots, t_{i+n}]_{\mathcal{S}(n, D_{n-1}\boldsymbol{p})} g_{n-1}(x, \cdot) - \tag{2.11}$$

$$[t_i, \cdots, t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n, D_{n-1}\boldsymbol{p})} g_{n-1}(x, \cdot)) \tag{2.12}$$

gdje je $g_{n-1}(x, \cdot) = \frac{(x-\cdot)_+^{n-2}}{(n-2)!}$.

Diference se mogu izraziti pomoću diferenci nižeg reda koristeći Mülbach-ovu rekurziju iz teorema 1.1.2 (*iv*). Tako npr. prvi član u (2.11) postaje:

$$(-)^n \frac{[t_{i+2}, \cdots, t_{i+n}]_{\{1, \cdots, \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\}} g_{n-1}(x, \cdot) - [t_{i+1}, \cdots, t_{i+n-1}]_{\{1, \cdots, \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\}} g_{n-1}(x, \cdot)}{[t_{i+2}, \cdots, t_{i+n}]_{\{1, \cdots, \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\}} u_n^* - [t_{i+1}, \cdots, t_{i+n-1}]_{\{1, \cdots, \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\}} u_n^*}.$$

Sada u brojniku možemo upotrijebiti rekurziju za polinomne podijeljene diferencije, nakon čega je prvi član:

$$(-)^n \frac{(t_{i+n} - t_{i+1}) < t_{i+1}, \cdots, t_{i+n} > (x - \cdot)_+^{n-2}}{(n-2)!(t_{i+n} - t_{i+1}) < t_{i+1}, \cdots, t_{i+n} > u_n^*}. \tag{2.13}$$

Pri tom smo implicitno koristili činjenicu, da je $\mathcal{P}(l+1)$ prirodno proširenje sistema potencija $\mathcal{P}(l)$.

Drugi član je isti kao i prvi, do na pomak u indeksu i, pa tvrdnja teorema slijedi iz činjenice da su brojnici u (2.13) polinomni B-spline-ovi. ∎

Konstante $C_n(i)$ mogu se izračunati integracijom po mjeri $d\sigma$, na što ukazuje slijedeća lema:

LEMA **2.3.1**

$$C_n(i) = \int_{t_i}^{t_{i+n-1}} B_i^{n-1} d\sigma. \tag{2.14}$$

DOKAZ: Prema Peanovom Teoremu o reprezentaciji [50, p.128] za svaku funkciju $f \in H_1^{m-j}[t_i, t_{i+n}]$ vrijedi

$$< t_i, \ldots, t_{i+n} > f = \int_{t_i}^{t_{i+n}} \frac{(-1)^j D_+^j Q_i^n(x) D^{n-j} f(x) dx}{(n-1)!}.$$

Kako je prema (1.11)

$$D^{n-1} u_n^* dx = d\sigma,$$

i $1/p \in L^1[t_i, t_{i+n}] \subseteq L^1[a, b]$ vrijedi

$$< t_i, \cdots, t_{i+n-1} > u_n^* = \int_{t_i}^{t_{i+n-1}} \frac{B_i^{n-1}(x) D^{n-1} u_n^*(x) dx}{(n-2)!}.$$

odakle slijedi tvrdnja. ∎

Dokaz leme 2.3.1 ne stoji za CCT-sisteme koji nemaju težinu, bez dodatnih pretpostavki o odnosu $d\sigma$ i $d\lambda$. Peanova reprezentacija primjenjena je "na samom rubu njene primjene", tj. za funkciju iz prostora Soboleva. Slijedi dokaz koji ne koristi Peanovu reprezentaciju.

DOKAZ: Neka je $k = 3$ radi jednostavnosti. Tada je

$$C(l) = (t_{l+2} - t_l) < t_l, t_{l+1}, t_{l+2} > u_3^*$$

što je prema rekurziji za polinomne diference

$$< t_{l+1}, t_{l+2} > u_3^* - < t_l, t_{l+1} > u_3^*$$

odnosno, prema definiciji u_3^*:

$$\frac{\int_0^{t_{l+2}} du \int_0^u d\sigma - \int_0^{t_{l+1}} du \int_0^u d\sigma}{t_{l+2} - t_{l+1}} - \frac{\int_0^{t_{l+1}} du \int_0^u d\sigma - \int_0^{t_l} du \int_0^u d\sigma}{t_{l+1} - t_l} =$$

$$\frac{\int_{t_{l+1}}^{t_{l+2}} du \int_0^u d\sigma}{t_{l+2} - t_{l+1}} - \frac{\int_{t_l}^{t_{l+1}} du \int_0^u d\sigma}{t_{l+1} - t_l}$$

pa je prema Fubinijevom teoremu

$$\frac{(t_{l+2}-t_{l+1})\int_0^{t_{l+1}} d\sigma + \int_{t_{l+1}}^{t_{l+2}}(t_{l+2}-\eta)d\sigma(\eta)}{t_{l+2}-t_{l+1}} - \frac{(t_{l+1}-t_l)\int_0^{t_l} d\sigma + \int_{t_l}^{t_{l+1}}(t_{l+1}-\eta)d\sigma(\eta)}{t_{l+1}-t_l}$$

$$= \int_{t_l}^{t_{l+1}} d\sigma + \frac{1}{t_{l+2}-t_{l+1}}\int_{t_{l+1}}^{t_{l+2}}(t_{l+2}-\eta)d\sigma(\eta) - \frac{1}{t_{l+1}-t_l}\int_{t_l}^{t_{l+1}}(t_{l+1}-\eta)d\sigma(\eta).$$

Kako je za $\eta \in (t_{l+1}, t_{l+2})$

$$B_l^2(\eta) = \frac{t_{l+2}-\eta}{t_{l+2}-t_{l+1}}, \qquad B_{l+1}^2(\eta) = \frac{\eta - t_{l+1}}{t_{l+2}-t_{l+1}}$$

slijedi

$$C(l) = \int_{t_l}^{t_{l+1}}(1-B_{l-1}^2)d\sigma + \int_{t_{l+1}}^{t_{l+2}} B_l^2 d\sigma.$$

Zbog particije jedinice je za $t \in (t_l, t_{l+1})$ ispunjeno $1 - B_{l-1}^2 = B_2^l$ odakle dobivamo

$$C(l) = \int_{t_l}^{t_{l+1}} B_2^l d\sigma + \int_{t_{l+1}}^{t_{l+2}} B_2^l d\sigma = \int_{t_l}^{t_{l+2}} B_2^l d\sigma. \qquad \blacksquare$$

L_k derivacije T-spline-ova s jednom netrivijalnom težinom za $k > 1$ mogu se sada lagano izračunati koristeći standardne formule za derivacije polinomnih B-spline-ova. U glavi o kolokaciji od važnosti je slijedeći

TEOREM **2.3.2** *Neka su L_1 i L_2 definirani kao u (1.9) gdje su derivacije u čvorovima $x_0, \ldots, x_k$ uzete s desna za $n_i \geq (n-2)$, odnosno s lijeva u x_{k+1}. Onda je:*

$$\begin{aligned}
T_i^n(x) &= \frac{1}{C_n(i)}\int_{t_i}^{x} B_i^{n-1} d\sigma - \frac{1}{C_n(i+1)}\int_{t_{i+1}}^{x} B_{i+1}^{n-1} d\sigma \\
L_1 T_i^n(x) &= \frac{1}{C_n(i)} B_i^{n-1}(x) - \frac{1}{C_n(i+1)} B_{i+1}^{n-1}(x) \\
L_2 T_i^n(x) &= \frac{(n-2)B_i^{n-2}(x)}{C_n(i)(t_{i+n-2}-t_i)} - \frac{(n-2)B_{i+1}^{n-2}(x)}{t_{i+n-1}-t_{i+1}} \cdot \\
&\quad (\frac{1}{C_n(i+1)} + \frac{1}{C_n(i)}) + \frac{(n-2)B_{i+2}^{n-2}(x)}{C_n(i+1)(t_{i+n}-t_{i+2})}
\end{aligned}$$

DOKAZ: Prva jednadžba je trivijalna posljedica Teorema 2.3.1, stoga moramo dokazati samo zadnju jednadžbu. Kako je $L_2 = DL_1$, potrebno je samo uzeti derivaciju druge jednadžbe i nakon toga primijeniti rekurentne relacije za derivacije B-spline-ova:

$$DB_j^k(x) = (k-1)(-\frac{B_{j+1}^{k-1}(x)}{t_{j+k}-t_{j+1}} + \frac{B_j^{k-1}(x)}{t_{j+k-1}-t_j})$$

za $j = i, i+1$ i $k = n-1$ [4, str.138],[10]. ∎

Na osnovu gornjeg moguće je razraditi algoritam za računanje L-derivacija koji je sličan deBoor-ovom BSPLVD [6], [4]. Ako se izostavi pretpostavka $p \geq 0$, algoritam daje lokalnu bazu za klasu L-spline-ova, ali se mora voditi posebna briga o nul-točkama funkcije $p(x)$. Neka svojstva T-spline-ova se gube, kao npr.

$$B_i^n(x) > 0, \qquad x \in (t_i, t_{i+n}). \tag{2.15}$$

Teorem 2.3.2 omogućuje računanje generaliziranih derivacija, ali ne i samih T-spline-ova, za koje treba oduzimati integrale B-spline-ova nižeg reda. I normalizacione konstante $C_n(i)$ također su integrali polinomnih B-spline-ova po mjeri $d\sigma$. I dok se računanje integrala može pojednostaviti Gauss-ovom integracijom, oduzimanje integrala ostaje problem koji može dovesti do numeričke nestabilnosti. Razmotrimo primjer iracionalnih spline-ova za $k = 3$. Gauss-ova formula

$$\int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx \approx 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) f(\frac{a + \sqrt{ab} + a}{3})$$

je egzaktna na $\mathcal{P}(2)$. Slijedeći potprogram računa na drugi način iracionalni "parabolički" T-spline i njegove derivacije nego program IRBSPLD (usp.[45]):

```
      subroutine DTB3(t,k,x,left,biatx,dbiatx,ddbiatx)
c
c     calculates non-trivial T-splines of order 3 and its
c     L1 and L2 deriv's
c
c*****INPUT*****
c            T = knot sequence
c            K = number of splines
c            X = evaluation point
c            LEFT  = ouput from INTERV;
c                    y(left) <= x < y(left+1)
c*****OUPUT*****
c            BIATX   = T-spline value at x
c            DBIATX  = first  gen.derivative at x
c            DDBIATX = second gen.derivative at x
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      double precision t(1)
      double precision biatx(3),dbiatx(3),ddbiatx(3),xleng(3),g(3)
      double precision c(2),b(6),bb(4),d(2)
      data g/3*0.d0/,biatx/3*0.d0/,dbiatx/3*0.d0/,ddbiatx/3*0.d0/
c
c     Gaussian point:
```

```
c
      gaus(u,v)=(u+v+dsqrt(u*v))/3.d0
c
      xlg=t(left+1)-t(left)
c
c     coeff's c(left-1) and c(left) (c(1) i c(2))
c
      do 55 i=1,3
          g(i)=gaus(t(left+i-2),t(left+i-1))
55    continue
      first=0.d0
      secnd=0.d0
      do 66 i=1,2
        if ((left.eq.3).and.(i.eq.1)) go to 56
        first =(g(i)-t(left-2+i))/(dsqrt(t(left+i-1))+dsqrt(t(left+i-2)))
56      secnd=(t(left+i)-g(i+1))/(dsqrt(t(left+i))+dsqrt(t(left+i-1)))
        c(i)=2.d0*(first+secnd)
66    continue
c
c     L2-deriv's of T-spline at x
c
      ddbiatx(1)=1.d0/(c(1)*xlg)
      ddbiatx(2)=-1.d0/xlg*(1.d0/c(1)+1.d0/c(2))
      ddbiatx(3)=1.d0/(c(2)*xlg)
c
c     L1-deriv's of T-spline at x
c
      dbiatx(1)= (x-t(left+1))/(xlg*c(1))
      dbiatx(2)= (t(left)-x)/(xlg*c(2))+(t(left+1)-x)/(xlg*c(1))
      dbiatx(3)=  (x-t(left))/(xlg*c(2))
c
c     non-trivial T-splines at x
c
      glp1x=gaus(t(left+1),x)
      glx  =gaus(t(left),x)
      biatx(1)=(2.d0*(dsqrt(t(left+1))-dsqrt(x))*(t(left+1)-glp1x))/
     *         (c(1)*xlg)
      biatx(3)=(2.d0*(dsqrt(x)-dsqrt(t(left)))*(glx-t(left)))/
     *         (c(2)*xlg)
      biatx(2)=1.d0-(biatx(1)+biatx(3))
      return
      end
```

Za $x \in [t_l, t_{l+1})$ je npr.

$$T_l^3(x) = \frac{1}{C(l)} \int_{t_l}^x B_l^2(u) \frac{du}{\sqrt{u}} = 2(\sqrt{x} - \sqrt{t_l}) B_l^2(\frac{t_l + \sqrt{x t_l} + x}{3}).$$

Zadnja izvršna naredba čini računanje baznih funkcija nestabilnim budući da `(biatx(1)+biatx(3))` može biti blisko 1 za t_l blisko t_{l+1}. Povoljnije je stoga umjesto particije jedinice izračunati $T_{l-1}^3(x)$ direktno formulom iz teorema 2.3.2:

$$T_{l-1}^3(x) = \frac{1}{C(l-1)} \int_{t_{l-1}}^x B_{l+1}^2(u) \frac{du}{\sqrt{u}} - \frac{1}{C(l)} \int_{t_l}^x B_l^2(u) \frac{du}{\sqrt{u}} =$$

$$\frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{t_{l-1}})}{C(l-1)} \frac{t_{l+1} - g_{l-1,x}}{t_{l+1} - t_l} - \frac{2(\sqrt{x} - \sqrt{t_l})}{C(l)} \frac{x - g_{l,x}}{t_{l+1} - t_l}.$$

Pri tom je $g_{l,x}$ Gauss-ova točka u intervalu (t_l, x).

Slično se mogu izračunati i "kubični" iracionalni T-spline-ovi, pa i T-spline-ovi reda n. Ovisnost o težini ulazi samo preko formula integracije. Za $k = 4$ potrebna je Gauss-ova formula s tri točke; ako je npr. težina $p(x) = \sqrt{x}$ kao u potprogramu `DTB3`, T-spline-ove i njihove L-derivacije možemo računati potprogramom:

```
      subroutine DTB4(y,k,x,left,index,biatx,dbiatx,ddbiatx)
c
c     calls INTERV,BSPLVB
c
c*****INPUT****
c            Y     = knot sequence
c            K     = number of splines
c            X     = evaluation point
c            LEFT  = ouput from INTERV;
c                    y(left) <= x < y(left+1)
c            INDEX = 1, normalization constants already calculated
c                    0, otherwise
c****OUPUT****
c            BIATX   = T-spline value at x
c            DBIATX  = first  gen.derivative at x
c            DDBIATX = second gen.derivative at x
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension y(1), bspl(3,3),c(100),biatx(4),dbiatx(4),ddbiatx(4)
      dimension w(3),gaus(3),z(3),xz(3),polb(3)
      common /normal/ c
      data z   /-0.774596669241483d0,.d0,0.774596669241483d0/
      data   w / 0.555555555555556d0,0.888888888888889d0,
     *           0.555555555555556d0/
```

```
      if (index.eq.1) go to 33
c
c     Gaussian points on each subinterval of partition;
c     needed to calculate normalization constants c(j), j=2,3,...,k
c
      do 8 i=1,k
         c(i)=0.d0
8     continue
      do 3 l=4,k
         fact=dsqrt(y(l+1))-dsqrt(y(l))
         do 4 i=1,3
            xz(i)=fact*(z(i)+1.d0)/2.d0+dsqrt(y(l))
            xz(i)=xz(i)*xz(i)
            call interv(y,k+4,xz(i),ileft,mflag)
            call bsplvb(y,3,1,xz(i),ileft,bspl(1,i))
4        continue
         do 5 i=1,3
            suma=0.d0
            do 6 j=1,3
               suma=suma+bspl(i,j)*w(j)
6           continue
         suma=suma*fact
         c(l+i-3)=c(l+i-3)+suma
5        continue
3     continue
c
c     calculating L1-deriv's of T-splines  (4 non-trivial)
c
33    call interv(y,k+4,x,ileft,mflag)
      call bsplvb(y,3,0,x,ileft,biatx)
      dbiatx(1)=-biatx(1)/c(left-2)
      dbiatx(2)=-biatx(2)/c(left-1)+biatx(1)/c(left-2)
      dbiatx(3)=-biatx(3)/c(left)+biatx(2)/c(left-1)
      dbiatx(4)=biatx(3)/c(left)
c
c     calculating L2-deriv's of T-splines
c
      call bsplvb(y,2,0,x,left,biatx)
      biatx(1)=biatx(1)/(y(left+1)-y(left-1))
      biatx(2)=biatx(2)/(y(left+2)-y(left))
      ddbiatx(1)=2.d0*biatx(1)/c(left-2)
      ddbiatx(2)=2.d0*(biatx(2)/c(left-1)-
     *           biatx(1)*(1.d0/c(left-1)+1.d0/c(left-2)))
      ddbiatx(3)=2.d0*(-biatx(2)*(1.d0/c(left)+
     *           1.d0/c(left-1))+biatx(1)/c(left-1))
```

```
      ddbiatx(4)=2.d0*biatx(2)/c(left)
c
c     calculating T-splines (4 nontrivial)
c
c     Gaussian points in (y(left),x)
c
      c1=0.d0
      d1=0.d0
      fact=dsqrt(x)-dsqrt(y(left))
      do 12 i=1,3
         xz(i)=fact*(z(i)+1.d0)/2.d0+dsqrt(y(left))
         xz(i)=xz(i)*xz(i)
         call bsplvb(y,3,1,xz(i),left,polb)
         c1=c1+polb(2)*w(i)
         d1=d1+polb(3)*w(i)
12    continue
      c1=c1*fact
      d1=d1*fact
c
c     Gaussian points in (x,y(left+1))
c
      a1=0.d0
      fact=dsqrt(y(left+1))-dsqrt(x)
      do 13 i=1,3
         xz(i)=fact*(z(i)+1.d0)/2.d0+dsqrt(x)
         xz(i)=xz(i)*xz(i)
         call bsplvb(y,3,1,xz(i),left,polb)
         a1=a1+polb(1)*w(i)
13    continue
      a1=a1*fact
c
c     Gaussian points in (y(left-1),y(left))
c
      b1=0.d0
      fact=dsqrt(y(left))-dsqrt(y(left-1))
      if (fact.le.1.d-30) go to 24
      do 14 i=1,3
         xz(i)=fact*(z(i)+1.)/2.d0+dsqrt(y(left-1))
         xz(i)=xz(i)*xz(i)
         call bsplvb(y,3,1,xz(i),left-1,polb)
         b1=b1+polb(3)*w(i)
14    continue
      b1=b1*fact
c
c     T-splines at x
```

```
c
24    first=a1/c(left-2)
      second=1.d0-first
      third=(b1+c1)/c(left-1)
      fourth=d1/c(left)
      biatx(1)=first
      biatx(2)=second-third
      biatx(3)=third-fourth
      biatx(4)=fourth
      return
      end
```

Budući da je:

$$\int_a^b f(x)\frac{dx}{\sqrt{x}} = (\sqrt{b}-\sqrt{a})\int_{-1}^1 g(z)dz$$

gdje je

$$g(z) := f(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}(z+1)+\sqrt{a})^2)$$

polinom stupnja $4 \leq 5$, zgodno je upotrijebiti Gauss-ovu formulu s tri točke:

$$\int_a^b f(x)\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}\sum_{i=1}^3 w_i f(x_i)$$

gdje je

$$x_i := (\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{2}(z_i+1)+\sqrt{a})^2, \qquad z_i \text{ – nule Legendreovog polinoma st. 3}$$

i w_i težinski faktori kao u programu.

Potprogrami INTERV i BSPLVB su poznate deBoor-ove rutine za binarno traženje i računanje netrivijalnih polinomnih B-spline-ova u točki x (v. [6], [4]). Normalizacijske konstante $C(l)$ su u `COMMON` bloku i računaju se samo kod prvog poziva; druga je mogućnost korištenje `ENTRY` instrukcije, `SAVE` ili sl.; usp. upotrebu `SAVE` instrukcije u deBoor-ovoj rutini `INTERV`.

Oduzimanje u zadnjim linijama zapravo je indirektna posljedica leme 2.2.2; članovi `first` do `fourth` su pozitivni i jednaki determinantama u (2.8).

Svaki je spline linearna kombinacija T-spline-ova, što znači da ga možemo računati preko *T-reprezentacije*:

```
      subroutine DTB4DER(x,y,coef,n,s,xl1s,xl2s)
c
c     calculates spline of order 4 from its t-representation
```

```
c
c     calls  INTERV,DTB4
c
c*****INPUT*****
c            X    = point of evaluation
c            Y    = knot sequence
c            COEF = coeff's in t-representation
c            N    = dimension of spline space
c*****OUTPUT*****
c            S     = spline at x
c            XL1S  = L1-derivative at x
c            XL2S  = L2-derivative at x
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension coef(n),y(1)
      dimension biatx(4),dbiatx(4),ddbiatx(4)
      s=0.d0
      xl1s=0.d0
      xl2s=0.d0
      call interv(y,n+4,x,left,mflag)
      if (mflag.eq.1)left=n
      call dtb4(y,n,x,left,1,biatx,dbiatx,ddbiatx)
      do 1 i=1,4
         s  =s+coef(left-4+i)*biatx(i)
         xl1s=xl1s+coef(left-4+i)*dbiatx(i)
         xl2s=xl2s+coef(left-4+i)*ddbiatx(i)
1     continue
      return
      end
```

Čini se da konverzija T-reprezentacije u PT reprezentaciju nema smisla, budući da za Green-ove funkcije CCT-sistema općenito ne postoji Hornerova shema koja se može zgodno iskoristiti za brzo računanje, kao što je to slučaj u polinomnom slučaju.

2.4 Čebiševljevi spline-ovi s više težina

Iako je stabilna rekurzija za računanje Čebiševljevih spline-ova vrlo težak problem, pokazat ćemo da potpuno općenito vrijedi generalizacija teorema 2.3.1, tj. da je moguće računati generalizirane derivacije Čebiševljevih spline-ova s n težina kao linearne kombinacije Čebiševljevih spline-ova s $n-1$ težina. Slijedeći teorem je generalizacija autorovog rezultata za ECT-sisteme s jednom težinom na CCT-sisteme s više težina [44].

TEOREM **2.4.1** *Neka je $L_{1,d\boldsymbol{\sigma}}$ prva generalizirana derivacija obzirom na CCT-sistem $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ s vektorom težina $\boldsymbol{p}$ i neka vektor multipliciteta $\boldsymbol{m}$ zadovoljava $n_i < n-1$ za $i = 1, \ldots k$. Ako su $T^n_{i,d\boldsymbol{\sigma}}$ T-spline-ovi iz teorema 2.2.2, tada za svaki $x \in [a,b]$ i $i = 1, \ldots, n + \sum_{i=1}^{k} n_i$ vrijedi:*

$$L_{1,\boldsymbol{p}} T^n_{i,\boldsymbol{p}}(x) = \frac{T^{n-1}_{i,R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x)}{C_{n-1}(i)} - \frac{T^{n-1}_{i+1,R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x)}{C_{n-1}(i+1)} \tag{2.16}$$

gdje je

$$C_{n-1}(i) := \int_{t_i}^{t_{i+n-1}} T^{n-1}_{i,R_{n-1}\boldsymbol{p}}(u) \frac{du}{p_2(u)}. \tag{2.17}$$

DOKAZ: Na osnovu leme 2.2.2 je

$$T^n_{i,\boldsymbol{p}}(x) = (-1)^n([t_{i+1}, \cdots, t_{i+n}]_{\mathcal{S}(n,D_{n-1}\boldsymbol{p})} g_{n,\boldsymbol{p}}(x,\cdot) - [t_i, \cdots, t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n,D_{n-1}\boldsymbol{p})} g_{n,\boldsymbol{p}}(x,\cdot). \tag{2.18}$$

Uzimanjem $L_{1,\boldsymbol{p}}$ derivacije u (2.18) zaključujemo da je

$$L_{1,\boldsymbol{p}} T^n_{i,\boldsymbol{p}}(x) = -(\omega_{i+1} - \omega_i), \tag{2.19}$$

gdje je (v. teorem 1.1.3)

$$\omega_i := (-1)^{n-1} [t_i, \ldots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n,D_{n-1}\boldsymbol{p})} g_{n-1,R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x,\cdot). \tag{2.20}$$

Red podijeljene diference možemo smanjiti pomoću Mülbach-ove rekurzije (teorem 1.1.2 (*iv*)):

$$\omega_i = \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_i} \{ [t_{i+1}, \ldots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n-1,S_{n-1}D_{n-1}\boldsymbol{p}} g_{n-1,R_{n-1}\boldsymbol{p}} - [t_i, \ldots t_{i+n-2}]_{\mathcal{S}(n-1,S_{n-1}D_{n-1}\boldsymbol{p}} g_{n-1,R_{n-1}\boldsymbol{p}} \},$$

$$\gamma_i := [t_{i+1}, \ldots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n-1,S_{n-1}D_{n-1}\boldsymbol{p}} u^*_n - [t_i, \ldots t_{i+n-2}]_{\mathcal{S}(n-1,S_{n-1}D_{n-1}\boldsymbol{p}} u^*_n. \tag{2.21}$$

Teorem 1.1.4 povlači

$$\omega_i = \frac{(-1)^{n-1}}{\gamma_i} \{ [t_{i+1}, \ldots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})} g_{n-1,R_{n-1}\boldsymbol{p}} - [t_i, \ldots t_{i+n-2}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})} g_{n-1,R_{n-1}\boldsymbol{p}} \},$$

i

$$\gamma_i = [t_{i+1}, \ldots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})} u^*_n - [t_i, \ldots t_{i+n-2}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})} u^*_n. \tag{2.22}$$

Kao i u (2.18), zaključujemo da vrijedi:

$$\omega_i = \frac{T^{n-1}_{i,R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x)}{\gamma_i},$$

pa preostaje dokazati da je $\gamma_i = C_{n-1}(i)$. Neka je $\boldsymbol{q} := E_{n-2}D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p} + \boldsymbol{e}_{n-1}$ (v. definiciju 1.1.6). Rekurzija za podijeljene diference u $\mathcal{S}(n,\boldsymbol{q})$ primijenjena na u_n^* daje

$$[t_i, \dots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n,\boldsymbol{q})}u_n^* = \frac{[t_{i+1}, \dots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})}u_n^* - [t_i, \dots t_{i+n-2}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})}u_n^*}{[t_{i+1}, \dots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})}v_n^* - [t_i, \dots t_{i+n-2}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})}v_n^*} \tag{2.23}$$

gdje je v_n^* element proširenog dualnog reduciranog sistema:

$$v_n^*(y) = \int_a^y \frac{1}{p_n(s_n)} ds_n \dots \int_a^{s_4} \frac{1}{p_3(s_3)} ds_3 \int_a^{s_3} ds_2\,. \tag{2.24}$$

Jednadžbe (2.22) i (2.23) povlače

$$\begin{aligned}\gamma_i = {} & [t_i, \dots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n,\boldsymbol{q})}u_n^* \cdot \\ & \{[t_{i+1}, \dots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})}v_n^* - [t_i, \dots t_{i+n-2}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})}v_n^*\}.\end{aligned}$$

Koristeći Peanovu reprezentaciju Čebiševljeve podijeljene diference [52, p.382] zaključujemo, da vrijedi:

$$[t_i, \dots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n,\boldsymbol{q})}u_n^* = \int_{t_i}^{t_{i+n-1}} Q^{n-1}_{i,R_{n-1}\boldsymbol{p}}(s) L_{n-1,\boldsymbol{q}} u_n^*(s) ds,$$

gdje je $Q^{n-1}_{i,R_{n-1}\boldsymbol{p}}$ nenormalizirani Čebiševljev B-spline iz definicije 2.2.1. Stoga je

$$L_{n-1,\boldsymbol{q}} u_n^*(y) = D(p_3D)(p_4D)\dots(p_nD)u_n^*(y) = \frac{1}{p_2(y)}\,.$$

Još jedna upotreba Sylvester-ovog identiteta povlači

$$\alpha_i(R_{n-1}\boldsymbol{p}) = \{[t_{i+1}, \dots t_{i+n-1}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})}v_n^* - [t_i, \dots t_{i+n-2}]_{\mathcal{S}(n-1,D_{n-2}R_{n-1}\boldsymbol{p})}v_n^*\}$$

gdje je $\alpha_i(R_{n-1}\boldsymbol{p})$ normalizacijska konstanta iz teorema 2.2.2. ∎

Teorem 2.4.1 može se sada upotrijebiti, barem u teoriji, za računanje svih $L-$derivacija Čebiševljevog spline-a.

LEMA **2.4.1** *Generalizirane derivacije mogu se faktorizirati prema formuli:*

$$L_{i+1,\boldsymbol{p}} = L_{i-k+1,R_{n-k}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}} L_{k,\boldsymbol{p}} \quad \text{za} \quad k = 1, \dots i; \quad i = 1, \dots n-2. \tag{2.25}$$

DOKAZ: Tvrdnja slijedi iz definicije generaliziranih derivacija (1.1) i operatora redukcije. ∎

Lema 2.4.1 može se upotrijebiti induktivno za računanje viših derivacija kao linearnih kombinacija spline-ova nižeg reda.

TEOREM **2.4.2** *Neka je* $s(x) = \sum_{j=r-n+1}^{l-1} \delta_j T^n_{j,\boldsymbol{p}}(x)$ *T–reprezentacija Čebiševljevog spline-a* $s \in \mathcal{S}(n, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, \Delta)$ *za* $x \in [t_r, t_l]$, $0 < r < l < k+1$. *Tada je T–reprezentacija derivacije* $L_{i,\boldsymbol{p}}s(x) \in \mathcal{S}(n-i, R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}, \Delta)$ *dana formulom:*

$$L_{i,\boldsymbol{p}}s(x) = \sum_{j=r-n+i+1}^{l-1} \delta^i_j T^{n-i}_{j,R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x) \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots n-1-\max_i\{n_i\}. \tag{2.26}$$

Koeficijenti δ^i_j *mogu se izračunati rekurzivno:*

$$\begin{aligned} \delta^0_j &= \delta_j, \\ \delta^i_j &= \frac{\delta^{i-1}_j - \delta^{i-1}_{j-1}}{C_{n-i}(j)} \end{aligned}$$

gdje je

$$C_{n-i}(j) = \int_{t_j}^{t_{j+n-i}} T^{n-i}_{j,R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(s)\frac{ds}{p_{i+1}(s)}.$$

DOKAZ: Znamo da (2.26) vrijedi za $i = 1$. Pretpostavimo da

$$L_{i,\boldsymbol{p}}s(x) = \sum_j \delta^i_j T^{n-i}_{j,R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x). \tag{2.27}$$

Jednadžba (2.25) za $k = i$ daje

$$L_{i+1,\boldsymbol{p}} = L_{1,R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}} L_{i,\boldsymbol{p}}$$

pa je stoga zbog (2.27)

$$L_{i+1,\boldsymbol{p}}s(x) = L_{1,R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}\,(\sum_j \delta^i_j T^{n-i}_{j,R_{n-i}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x)). \tag{2.28}$$

Teorem 2.4.1 može se sada primijeniti na T^{n-i}–spline-ove u (2.28), nakon čega dobivamo

$$L_{i+1,\boldsymbol{p}}s(x) = \sum_j \frac{\delta^i_j - \delta^i_{j-1}}{C_{n-i-1}(j)} T^{n-i-1}_{j,R_{n-i-1}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x) = \sum_j \delta^{i+1}_j T^{n-i-1}_{j,R_{n-i-1}\cdots R_{n-1}\boldsymbol{p}}(x). \quad ∎$$

Postoji i drugačiji način da se dokaže teorem 2.4.1, koji zaobilazi operatore produljenja i Peanovu reprezentaciju za Čebiševljeve sisteme, a oslanja se na teorem 2.3.1 i klasičnu Peanovu reprezentaciju polinomnih diferenci. Zbog kompleksnosti algebarskih manipulacija ograničimo se na primjer spline-ova reda 4 vezanih uz elastični štap promjenljivog presjeka (usp. primjere 1.3.1 i 1.3.2).

PRIMJER **2.4.1** *Neka je $k=4$ i $\mathcal{S}(4,d\boldsymbol{\sigma})$ CCT-sistem iz primjera 1.3.1. Odmah vidimo da je*

$$\mathcal{S}(2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma})\equiv\mathcal{S}(2,S_2S_3d\boldsymbol{\sigma}),$$

što je također posljedica teorema 1.1.4. Kako je

$$L_{2,d\boldsymbol{\sigma}}g_{4,d\boldsymbol{\sigma}}(x,y)=g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,y)$$

(v. teorem 1.1.3), slijedi da je

$$L_{2,d\boldsymbol{\sigma}}T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x)=$$
$$[t_{i+1},\ldots,t_{i+4}]_{\mathcal{S}(4,D_3d\boldsymbol{\sigma})}g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot)-[t_i,\ldots,t_{i+3}]_{\mathcal{S}(4,D_3d\boldsymbol{\sigma})}g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot).$$

Mülbach-ova rekurzija (teorem 1.1.2 (iv)) povlači:

$$L_{2,d\boldsymbol{\sigma}}T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x)=$$
$$\frac{[t_{i+2},t_{i+3},t_{i+4}]_{\mathcal{S}(3,S_3D_3d\boldsymbol{\sigma})}g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot)-[t_{i+1},t_{i+2},t_{i+3}]_{\mathcal{S}(3,S_3D_3d\boldsymbol{\sigma})}g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot)}{D(i+2)-D(i+1)}$$
$$-\frac{[t_{i+1},t_{i+2},t_{i+3}]_{\mathcal{S}(3,S_3D_3d\boldsymbol{\sigma})}g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot)-[t_i,t_{i+1},t_{i+2}]_{\mathcal{S}(3,S_3D_3d\boldsymbol{\sigma})}g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot)}{D(i+1)-D(i)}$$

gdje je

$$D(l):=[t_l,t_{l+1},t_{l+2}]_{\mathcal{S}(3,S_3D_3d\boldsymbol{\sigma})}u_4^* \qquad l=i,i+1,i+2.$$

Iz teorije Čebiševljevih spline-ova s jednom težinom znamo, da je (v. (2.13), teorem 2.3.1):

$$[t_{i+2},t_{i+3},t_{i+4}]_{\mathcal{S}(3,S_3D_3d\boldsymbol{\sigma})}g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot)=\frac{<t_{i+2},t_{i+3},t_{i+4}>g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot)}{<t_{i+2},t_{i+3},t_{i+4}>u_3^*}.$$

Budući je $g_{2,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x,\cdot)=(x-\cdot)^1_+$, dokazali smo da je

$$L_{2,d\boldsymbol{\sigma}}T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x)=\frac{\frac{1}{C(i+2)}B^2_{i+2}(x)-\frac{1}{C(i+1)}B^2_{i+1}(x)}{D(i+2)-D(i+1)}-\frac{\frac{1}{C(i+1)}B^2_{i+1}(x)-\frac{1}{C(i)}B^2_i(x)}{D(i+1)-D(i)},$$

gdje je

$$C(l):=(t_{l+2}-t_l)<t_l,t_{l+1},t_{l+2}>u_3^*,$$

odn. poradi Peanove (klasične) reprezentacije podijeljene polinomne diference:

$$C(l)=\int_{t_l}^{t_{l+2}}B^2_l(\eta)\frac{1}{w(\eta)}d\eta.$$

Normalizacijska konstanta $D(l)$ može se također dobiti iz Peanove reprezentacije; kako je

$$\frac{d^2}{dy^2}u_4^*(y)=\frac{d}{dy}\frac{d}{dy}\int_0^y dt_1\int_0^{t_4}\frac{dt_3}{w(t_3)}\int_0^{t_3}\frac{dt_2}{p(t_2)}=\frac{1}{w(y)}\int_0^y\frac{dt_2}{p(t_2)},$$

slijedi

$$< t_l, t_{l+1}, t_{l+2} > u_4^* = \int_{t_l}^{t_{l+2}} Q_l^2(y) \frac{1}{w(y)} \int_0^y \frac{d\eta}{p(\eta)} dy,$$

gdje je Q_l^2*–nenormalizirani polinomni B-spline. Zaključujemo, da je*

$$(t_{l+2} - t_l) < t_l, t_{l+1}, t_{l+2} >= \int_{t_l}^{t_{l+2}} B_2^l(y) \frac{1}{y} \int_0^y \frac{d\eta}{p(\eta)} dy,$$

gdje je B_l^2*–normalizirani polinomni B-spline. Dokazali smo, da vrijedi:*

$$L_{2,d\boldsymbol{\sigma}} T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) =$$
$$\frac{B_i^2(x)}{C(i)}[\frac{1}{(D(i+1) - D(i)}] - \frac{B_{i+1}^2(x)}{C(i+1)}[\frac{1}{D(i+2) - D(i+1)} + \frac{1}{D(i+1) - D(i)}] +$$
$$\frac{B_{i+2}^2(x)}{C(i+2)}[\frac{1}{(D(i+2) - D(i+1)}].$$

Nadalje je

$$D(l+1) - D(l) = \frac{\int_{t_{l+1}}^{t_{l+3}} B_{l+1}^2 \frac{d\xi}{w(\xi)} \int_0^\xi \frac{d\eta}{p(\eta)}}{C(l+1)} - \frac{\int_{t_l}^{t_{l+2}} B_l^2 \frac{d\xi}{w(\xi)} \int_0^\xi \frac{d\eta}{p(\eta)}}{C(l+1)}.$$

Pozivajući se opet na teorem 2.3.1 vidimo da je

$$\frac{B_{l+1}^2(\xi)}{C(l+1)} - \frac{B_l^2(\xi)}{C(l)} = -(wD) T^3_{l,R_3 d\boldsymbol{\sigma}}(\xi) = L_{1,R_3 d\boldsymbol{\sigma}} T^3_{l,R_3 d\boldsymbol{\sigma}}(\xi),$$

gdje je $T^3_{l,R_3 d\boldsymbol{\sigma}}$ *Čebiševljev T-spline s jednom (netrivijalnom) težinom. Dakle je*

$$D(l+1) - D(l) = -\int_{t_l}^{t_{l+3}} \frac{d}{d\xi} T^3_{l,R_3 d\boldsymbol{\sigma}}(\xi) d\xi \int_0^\xi \frac{d\eta}{p(\eta)},$$

pa nakon zamjene poretka integracije izlazi

$$D(l+1) - D(l) = \int_{t_l}^{t_{l+3}} T^3_{l,R_3 d\boldsymbol{\sigma}}(\eta) d\eta.$$

Uvedemo li oznaku

$$A(l) := D(l+1) - D(l),$$

možemo formulu za drugu generaliziranu derivaciju napisati ovako:

$$L_{2,d\boldsymbol{\sigma}} T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = (wD)(pD) T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) =$$
$$\frac{B_i^2(x)}{C(i)A(i)} - \frac{B_{i+1}^2(x)}{C(i+1)}[\frac{1}{A(i+1)} + \frac{1}{A(i)}] + \frac{B_{i+2}^2(x)}{C(i+2)A(i+1)},$$

gdje je

$$A(l) = \int_{t_l}^{t_{l+3}} T^3_{l,d\boldsymbol{\sigma}}(\eta)\frac{d\eta}{p(\eta)}, \qquad C(l) = \int_{t_l}^{t_{l+2}} B^2_l(\eta)\frac{d\eta}{w(\eta)}$$

(umjesto B_l^2 *možemo također pisati* $T^2_{l,R_2R_3d\boldsymbol{\sigma}}$*).*

Grupiranjem članova imamo

$$L_{2,d\boldsymbol{\sigma}}T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = (\frac{B_i^2(x)}{C(i)} - \frac{B^2_{i+1}(x)}{C(i+1)})\frac{1}{A(i)} + (\frac{B^2_{i+2}(x)}{C(i+2)} - \frac{B^2_{i+1}(x)}{C(i+1)})\frac{1}{A(i+1)}$$

ili (v. teorem 2.5):

$$(wD)(pD)T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = \frac{(wD)T^3_{i,R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x)}{A(i)} - \frac{(wD)T^3_{i+1,R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x)}{A(i+1)}$$

pa nakon integracije po mjeri gustoće $1/w$ *izlazi*

$$(pD)T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = \frac{T^3_{i,R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x)}{A(i)} - \frac{T^3_{i+1,R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x)}{A(i+1)} + \text{const.}$$

Uvrstimo li $x = t_{i+4}$*, vidimo da je const.* $= 0$*, tj. gornja relacija je specijalan slučaj formule (2.16).*

Ako je $p \equiv 1$, spline-ovi iz primjera 2.4.1 vezani su sa CCT-sistemom fizikalne interpretacije elastičnog štapa promjenljivog presjeka (usp. primjer 1.3.2). Derivacije (klasične) takvih spline-ova mogu se računati po formuli

$$\frac{d}{dx}T^4_{i,d\boldsymbol{\sigma}}(x) = \frac{T^3_{i,R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x)}{A(i)} - \frac{T^3_{i+1,R_3d\boldsymbol{\sigma}}(x)}{A(i+1)}, \qquad d\boldsymbol{\sigma} = [1, \frac{1}{w}, 1]^T$$

gdje je

$$A(i) = \int_{t_i}^{t_{i+3}} T_{i,R_3d\boldsymbol{\sigma}}(\eta)d\eta.$$

T-spline-ovi $T^3_{i,R_3d\boldsymbol{\sigma}}$ imaju jednu težinu $1/w$ i mogu se računati na osnovu teorema 2.7.

KOROLAR **2.4.1** *Čebiševljevi T-spline-ovi s više težina su integrali spline-ova s jednom težinom manje, tj. vrijedi*

$$T^n_{i,\boldsymbol{p}}(x) = \frac{\int_{t_i}^x T^{n-1}_{i,R_{n-1}\boldsymbol{p}}(u)\frac{du}{p_2(u)}}{C_{n-1}(i)} - \frac{\int_{t_{i+1}}^x T^{n-1}_{i+1,R_{n-1}\boldsymbol{p}}(u)\frac{du}{p_2(u)}}{C_{n-1}(i+1)} \tag{2.29}$$

gdje su $C_{n-1}(i)$ *normalizacijske konstante kao u (2.17).*

DOKAZ: Izravna posljedica teorema 2.7. ∎

Korolar 2.4.1 nije direktno primjenljiv za računanje vrijednosti T-spline-ova, dok to formule za derivacije jesu; računanje samih T-spline-ova ovisi o mogućnosti integracije spline-ova s manjim brojem težina. Posebno je pitanje, da li se može ukloniti oduzimanje u (2.29) i izvesti algoritam tipa deBoor–Coxa. Vidjet ćemo da je ovaj problem moguće riješiti do kraja za neke specijalne težine[2].

Ako je $d\boldsymbol{\sigma} = [1, \ldots, 1]^T$, relacija (2.16) povlači poznatu rekurzivnu formulu za derivacije polinomnih B-spline-ova:

$$DB_i^n(x) = (n-1)\left(\frac{B_i^{n-1}(x)}{t_{i+n-1} - t_i} - \frac{B_{i+1}^{n-1}(x)}{t_{i+n} - t_{i+1}}\right),$$

ako se iskoristi poznati rezultat za integral polinomnog B-spline-a preko cijelog nosača:

$$\int_{t_i}^{t_{i+n-1}} B_i^{n-1} dx = \frac{t_{i+n-1} - t_i}{n-1}. \tag{2.30}$$

[2]Autoru nije poznato da li se T-spline-ovi mogu dobiti kao kombinacije spline-ova s manjim brojem težina; Schumakerov negativni rezultat [51] oslanja se (implicitno) na analitičnost koeficijenata u rekurzijama deBoor-Cox-ovog tipa

3. g-spline funkcije

3.1 Definicije i oznake

Cilj je ovog poglavlja razmatranje polinomnih spline funkcija kod kojih su uvjeti veze u čvorovima određeni linearnim funkcionalima. To su tzv. *generalizirani polinomni spline-ovi* ili kraće g-spline-ovi. Takvi spline-ovi pojavljuju se prirodno u nekoliko primjena, uključujući najbolju interpolaciju, izglađivanje, optimalne kvadrature, rješavanje diferencijalnih jednadžbi i mnoge druge.

PRIMJER **3.1.1** *Nehomogena elastična žica duljine l, učvršćena na oba kraja modelira se jednadžbom*

$$(p(x)u')' - q(x)u = f(x), \qquad u(0) = u(l) = 0,$$

gdje je $f(x)$–gustoća vanjske sile, $p(x)$–napetost i $q(x)$–otpor vanjskog sredstva; ako je žica "sastavljena" od različitih (homogenih) materijala tada je napetost po dijelovima konstantna:

$$p(x) = p_i \qquad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = 0, \ldots k. \tag{3.1}$$

Metode momentnog tipa za rješavanje takvog problema zasnivaju se na projektorima na prostore funkcija koje su po dijelovima u $\mathrm{Ker}(D^l DpD)$, $l \geq 0$; aproksimativno rješenje traži se kao linearna kombinacija baznih funkcija $s(x)$, koje zadovoljavaju uvjete neprekidnosti i skoka derivacije:

$$s(x_i+) = s(x_i-) \tag{3.2}$$

$$p_i \frac{d}{dx} s(x_i+) = p_{i-1} \frac{d}{dx} s(x_i-). \tag{3.3}$$

Jednadžba (3.3) u fizikalnoj terminologiji predstavlja zakon ravnoteže kontaknih sila u točki x_i. Funkcije poput $s(x)$ **pripadaju klasi Čebiševljevih spline-ova za jedan specijalni izbor CCT-sistema** *(v. primjer 1.4.3).*

DEFINICIJA **3.1.1** *Neka je $\mathcal{P}(n)$ sistem potencija i neka su vektor multipliciteta $\boldsymbol{m} \in \mathcal{R}^k$ i mreža $\Delta = \bigcup_{i=0}^k \Delta_i$ definirani kao u (2.2)–(2.3). Neka je $\Gamma_i := \{\gamma_{ij}\}_{j=1}^{n-n_i}$ familija linearnih funkcionala definiranih na $\mathcal{P}(n)$ i*

$$\Gamma := \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i.$$

Skup $\mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Gamma, \Delta)$ ograničenih funkcija na $[a, b]$ takvih da vrijedi:

(i) za svaki $s \in \mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Gamma, \Delta)$ i svaki $i = 0, \ldots, k$ postoji $s_i \in \mathcal{P}(n)$ takav da je $s|_{\Delta_i} = s_i|_{\Delta_i}$,

(ii) $\gamma_{ij} s_{i-1} = \gamma_{ij} s_i$ za $j = 1, \ldots n - n_i$, $i = 1, \ldots, k$

zove se prostor generaliziranih polinomnih spline funkcija, ili kraće g-spline funkcija na mreži Δ.

U daljnjem ćemo razmatrati samo g-spline-ove definirane vrlo specijalnim izborom linearnih funkcionala γ_{ij}, točnije polinomne spline-ove kojima se umjesto derivacije "lijepe" na određen način propisani skokovi derivacija. Neka $\delta_x f := f(x)$ označava linearni funkcional izvrednjavanja u točki x. Za $i = 1, \ldots k$ definiramo funkcionale:

$$\gamma_{ij} = \delta_{x_i} \lambda_j(x) D^{j-1} \qquad \text{za } j = 1, \ldots, n - n_i$$

gdje je

$$\begin{aligned} \lambda_j(x) &= \lambda_j^i \in \mathcal{R} \quad \text{za} \quad x \in [x_i, x_{i+1}),\ i = 1, \ldots k-1 \\ \lambda_j(x) &= \lambda_j^k \in \mathcal{R} \quad \text{za} \quad x \in [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Neka je

$$\Lambda_i = [\lambda_1^i, \ldots, \lambda_{n-n_i}^i]^T$$

vektor incidencije i $\Lambda = \bigcup_{i=1}^{k} \{\Lambda_i\}$. Prostor $\mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Lambda, \Delta) := \mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Gamma, \Delta)$ je *prostor g-spline funkcija određen vektorima incidencije* Λ. Često korišteni g-spline-ovi kod kojih su funkcionali γ_{ij} linearne kombinacije derivacija (tzv. EHB–funkcionali) općenito ne pripadaju gornjoj klasi [21].

PRIMJER **3.1.2** *Stavimo li $\Lambda_i = [c, \ldots, c]^T \in \mathcal{R}^{n-n_i}$, $c \in \mathcal{R}$, za svaki $i = 1, \ldots, k$, onda je $\mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Lambda, \Delta) = \mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Delta)$ prostor polinomnih spline funkcija u uobičajenom smislu.*

Za specijalne izbore vektora incidencije prostor g-spline-ova može se identificirati s nekim poznatim prostorima T-spline-ova.

TEOREM **3.1.1** *Neka je $\mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Lambda, \Delta)$ prostor g-spline funkcija opisan vektorima incidencije Λ. Neka je $d\boldsymbol{\sigma}$ vektor težina definiran s*

$$d\boldsymbol{\sigma} = [d\sigma_2, \dots d\sigma_n]^T$$

gdje mjere $d\sigma_j$ imaju po dijelovima konstantne gustoće:

$$d\sigma_j(\delta) = \int_\delta \frac{dt}{p_j(t)}, \qquad \delta \subset \mathcal{R}$$

za $j = 2, \dots n$, i

$$p_j(t)\,|_{[x_i, x_{i+1})} =: p_j^i = \text{const.}, \qquad i = 1, \dots, k. \tag{3.5}$$

Ako je $\lambda_1^i = 1$ za sve $i = 1, \dots, k$ i ako vrijedi pretpostavka

$$\lambda_j^i > 0 \qquad \text{za} \quad j = 2, \dots, n - n_i \quad i = 1, \dots, k \tag{3.6}$$

onda je $\mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Lambda, \Delta) \equiv \mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{m}, \Delta)$, gdje je $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ CCT-sistem kojem su gustoće u (3.5) definirane s

$$\begin{aligned} p_2^i &= \lambda_2^i \\ p_3^i &= \frac{\lambda_3^i}{\lambda_2^i} \\ &\vdots \\ p_{n-n_i}^i &= \frac{\lambda_{n-n_i}^i}{\lambda_{n-n_i-1}^i} \\ p_{n-n_i+1}^i &= 1 \\ &\vdots \\ p_n^i &= 1 \end{aligned}$$

za svaki $i = 1, \dots k$.

DOKAZ: Kako je $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$ sistem potencija na svakom intervalu $[x_i, x_{i+1})$ treba samo pokazati da je zadavanje funkcionala određenih vektorima incidencije Λ_i ekvivalentno neprekidnosti generaliziranih derivacija pridruženih CCT-sistemu $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma})$. Iz (1.1) i (3.5) slijedi, da je za $x \in (x_i, x_{i+1})$

$$L_{j,d\boldsymbol{\sigma}} = (p_{j+1}^i D)(p_j^i D) \cdots (p_2^i D).$$

Definicije 3.1.1 i 2.1.1 povlače da vrijedi

$$p_{j+1}^i p_j^i \cdots p_2^i D^j = \lambda_{j+1}^i D^j, \qquad \text{za} \quad j = 1, \dots, n - n_i - 1,$$

dok preostale težine možemo proizvoljno odrediti. Uvjet $\lambda_1^i = 1$ povlači da je $\mathcal{S}(n, d\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{m}, \Delta) \subset C[x_0, x_{k+1}]$. ∎

3.2 Hermitski g-spline

Teorem 3.2 omogućuje nam primjenu teorije Čebiševljevih spline funkcija na g-spline-ove zadane vektorima incidencije. Tako možemo odmah zaključiti, da je dimenzija prostora $\mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Lambda, \Delta)$ jednaka $n + \sum_1^k n_i$, a možemo i konstruirati baze tog prostora (v. primjer 1.4.3) koristeći se teorijom CCT-sistema. Interesantno je, da se u nekim slučajevima može doći do elegantnog algoritma za konstrukciju lokalnih baza (v. [44]). Takvi algoritmi zasnivaju se na činjenici, da je moguće eksplicitno izvršiti integraciju u općim formulama za generalizirane derivacije, kao što su (2.9) i (2.16). Također je moguće T^n-spline reprezentirati kao konveksne kombinacije B^{n-1} spline-ova, kao u slučaju poznate deBoor–Cox-ove rekurzije za B-spline-ove.

PRIMJER **3.2.1** *Neka je p po dijelovima konstantna funkcija, $p\,|_{[t_i,t_{i+1})} = p_i$, za svaki $t \in (t_i, t_{i+1})$, i $\{t_i\}_1^{6+k}$ proširena particija pridružena mreži $\Delta = \{x_i\}_0^{k+1}\}$ kao u (2.3). Lokalnu bazu prostora $\mathcal{S}(3, d\sigma, \boldsymbol{m}, \Delta)$, gdje je $\boldsymbol{m} = (1, \ldots, 1)^T$ i $d\sigma$ mjera s gustoćom $1/p$, čine T-spline-ovi koji se mogu rekurzivno izraziti preko po dijelovima linearnih B-spline-ova:*

$$T_i^3(x) = \frac{d\sigma(t_i, x)}{d\sigma(t_i, t_{i+2})} B_i^2(x) + \frac{d\sigma(x, t_{i+3})}{d\sigma(t_{i+1}, t_{i+3})} B_{i+1}^2(x).$$

Zaista, ako $\mathcal{S}(3, p, \boldsymbol{m}, \Delta)$ gledamo kao prostor Čebiševljevih spline-ova s jednom težinom, možemo upotrijebiti lemu 2.3.1 da izračunamo:

$$C_2(i) = \int_{t_i}^{t_{i+2}} B_i^2 d\sigma = \frac{t_{i+1} - t_i}{2p_i} + \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{2p_{i+1}}.$$

Neka je $x \in (t_{i+1}, t_{i+2})$. Tada je

$$\int_{t_i}^{x} B_i^2 d\sigma = C_2(i) - \int_{x}^{t_{i+2}} B_i^2 d\sigma = C_2(i) - \frac{t_{i+2} - x}{2p_{i+1}} B_i^2(x),$$

$$\int_{t_{i+1}}^{x} B_{i+1}^2 d\sigma = \frac{x - t_{i+1}}{2p_{i+1}} B_{i+1}^2(x).$$

Teorem 2.3.2 povlači da je

$$T_i^3(x) = 1 - \frac{t_{i+2} - x}{2p_{i+1} C_2(i)} B_i^2(x) - \frac{x - t_{i+1}}{2p_{i+1} C_2(i+1)} B_{i+1}^2(x).$$

Za $x \in (t_{i+1}, t_{i+2})$ vrijedi particija jedinice B_i^2 spline-ova:

$$1 = B_i^2(x) + B_{i+1}^2(x)$$

pa dobivamo:

$$
\begin{aligned}
T_i^3(x) \;=\; & B_{i+1}^2 \frac{p_{i+2}(t_{i+2}-x)+p_{i+1}(t_{i+3}-t_{i+2})}{p_{i+2}(t_{i+2}-t_{i+1})+p_{i+1}(t_{i+3}-t_{i+2})} \\
& + B_i^2 \frac{p_i(x-t_{i+1})+p_{i+1}(t_{i+1}-t_i)}{p_{i+1}(t_{i+1}-t_i)+p_i(t_{i+2}-t_{i+1})} \,.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

Odmah se vidi da (3.7) vrijedi i za $x \in [t_i, t_{i+1})$, $x \in [t_{i+2}, t_{i+3}]$, *pa tvrdnja slijedi. Pretpostavke na vektor multipliciteta* $\boldsymbol{m}$ *mogu se oslabiti, jer (3.7) vrijedi i za čvorove multipliciteta 2 ako uzmemo npr.* $\lim\limits_{t_{i+1}\to t_i}$.

Za $p \equiv 1$ (3.7) je specijalan slučaj deBoor–Cox-ove rekurzije [4, p.130], ali se također može dobiti opreznom primjenom opće rekurentne formule koju je izveo Lyche [26].

PRIMJER **3.2.2** *Za* $n = 2$ *je* $T_i^2(x) = B_i^2(x)$ *ako je* $p(x)\,|_{[x_i, x_{i+1})} = p_i = \text{const.}$ *Zaista, za* $x \in (t_i, t_{i+1})$ *i* $n_i = 1$ *ili 2 je*

$$T_i^2(x) = \frac{1}{C_1(i)} \int_{t_i}^{x} B_i^1 d\sigma = \frac{x-t_i}{p_i C_1(i)} = \frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i} \,.$$

U ovom slučaju T-spline-ovi ne ovise o p.

Uz jednu proizvoljnu mjeru $d\sigma$ i $n_i \leq 2$ bazu u $\mathcal{S}(2, p, \boldsymbol{m}, \Delta)$ čine T-spline-ovi oblika:

$$T_i^2(x) = \begin{cases} \dfrac{\int_{t_i}^{x} d\sigma}{\int_{t_i}^{t_{i+1}} d\sigma} & t_i \leq x < t_{i+1} \\[2ex] \dfrac{\int_{x}^{t_{i+2}} d\sigma}{\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} d\sigma} & t_{i+1} \leq x < t_{i+2}. \end{cases}$$

To su tzv. Čebiševljeve krov–funkcije ("hat functions"). Ciarlet [15, Ciarlet *et al.*] ih koristi kao konačne elemente za numeričko rješavanje singularnih rubnih problema. Gornji primjer je očito specijalni slučaj.

Primjer 3.2.2 može se proširiti i na spline-ove reda $n \geq 3$, ali uz restrikciju na vektor multipliciteta. Točnije, rekurziju (3.7) moguće je proširiti na hermitske[1] spline funkcije. U daljnjem oznaka $T_i^n(x) = T_{i,d\boldsymbol{\sigma}}^n(x)$ stoji za funkcije baze u prostoru g-spline-ova koje imaju lokalno svojstvo i čine particiju jedinice.

TEOREM **3.2.1** *Neka je* $T_i^n(x) \in \mathcal{S}(n, p, \boldsymbol{m}, \Delta)$ *T-spline u prostoru g-spline funkcija s jednom težinom* $1/p > 0$ *i vektor multipliciteta* $\boldsymbol{m}$ *takav da vrijedi:*

$$n_i \geq n-2 \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots, k. \tag{3.8}$$

[1]Sinonim za hermitski je *lokalni spline*; u toj terminologiji teorem 3.3 omogućuje konstrukciju lokalnih baza za lokalne spline-ove

Neka je

$$
\begin{aligned}
p_i &:= p|_{[x_i,x_{i+1})} \qquad \text{za} \quad i = 0, \ldots, k-1 \\
p_k &:= p|_{[x_k,x_{k+1}]},
\end{aligned}
$$

i $\{t_i\}_{i=1}^{2n+k}$ *proširena particija kao u (2.3). Tada za* $n \geq 2$ *and* $i = 1, \ldots, n + \sum_{i=1}^{k} n_i$ *vrijedi rekurzivna formula:*

$$
T_i^n(x) = \frac{d\sigma(t_i, x)}{d\sigma(t_i, t_{i+n-1})} B_i^{n-1}(x) + \frac{d\sigma(x, t_{i+n})}{d\sigma(t_{i+1}, t_{i+n})} B_{i+1}^{n-1}(x). \tag{3.9}
$$

DOKAZ: Za $n = 2$ nema restrikcije na derivaciju, pa je rekurzija ista kao i za polinomne B-spline-ove. Neka je $n > 2$ i $n_i = n - 2$ za svaki i. Zbog (3.8) B^{n-1} spline-ovi imaju nosač od najviše dva intervala $[x_l, x_{l+1}]$. Neka je $0 < l < k + 1$ da izbjegnemo trivijalni slučaj rubnih spline-ova (v.(2.3)). Radi lakšeg numeriranja, izaberimo indeks r tako da je

$$
t_r = \ldots = t_{r+n-2} = x_l < x_{l+1} = t_{r+n-1} = \ldots = t_{r+2n-4} < x_{l+2} = t_{r+2n-3} = \ldots = t_{r+3n-6}.
$$

Postoje $n-3$ netrivijalna spline-a $B^{n-1} \in \mathcal{P}(n-1, \boldsymbol{m}, \Delta)$ kojima je nosač $[x_l, x_{l+1}]$, a svaki je oblika:

$$
B_{r+i-1}^{n-1}(x) = a_{i,n}(x - x_l)^i (x_{l+1} - x)^{n-2-i} \qquad x_l < x < x_{l+1}
$$

za $i = 1, \ldots, n-3$. $a_{i,n}$ su konstante koje se mogu odrediti nekim uvjetom normalizacije kao što je:

$$
\int_{x_l}^{x_{l+1}} B_{r+i-1}^{n-1}(x)dx = \frac{x_{l+1} - x_l}{n-1}
$$

odakle slijedi

$$
a_{i,n} = \frac{(n-2)!}{i!(n-2-i)!\,(x_{l+1} - x_l)^{n-2}} \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n-3.
$$

Jedini B^{n-1}-spline koji posjeduje nosač od dva intervala, a ne iščezava na $[x_l, x_{l+2}]$ je oblika:

$$
B_{r+n-3}^{n-1}(x) = \begin{cases} a_{n-2,n}(x - x_l)^{n-2} & x_l < x < x_{l+1} \\ b_{n-2,n}(x_{l+2} - x)^{n-2} & x_{l+1} < x < x_l \end{cases}.
$$

Uvjet normalizacije

$$
\int_{x_l}^{x_{l+2}} B_{r+n-3}^{n-1}dx = \frac{x_{l+2} - x_l}{n-1}
$$

kao i uvjet neprekidnosti u x_{l+1} daje

$$B^{n-1}_{r+n-3}(x) = \begin{cases} (\dfrac{x - x_l}{x_{l+1} - x_l})^{n-2} & x_l < x < x_{l+1} \\ (\dfrac{x_{l+2} - x}{x_{l+2} - x_{l+1}})^{n-2} & x_{l+1} < x < x_l \end{cases} . \tag{3.10}$$

Sada računamo konstante normalizacije za T-spline-ove prema lemi 2.3.1. Za $i = 1, \ldots, n-3$, $C_{n-1}(r+i-1)$ je proporcionalna integralu B^{n-1}_{r+i-1}:

$$C_{n-1}(r+i-1) = \frac{1}{p_l} \int_{t_{r+i-1}}^{t_{r+i+n-2}} B^{n-1}_{r+i-1} dx = \frac{d\sigma(t_{r+i-1}, t_{r+i+n-2})}{n-1}$$

gdje smo koristili poznatu formulu za određeni integral B^{n-1}-spline-a [52, str. 128]. Da izračunamo $C_{n-1}(r+n-3)$ moramo upotrijebiti eksplicitnu formulu (3.10):

$$C_{n-1}(r+n-3) = \frac{1}{p_l}\frac{x_{l+1} - x_l}{n-1} + \frac{1}{p_{l+1}}\frac{x_{l+2} - x_{l+1}}{n-1} = \frac{d\sigma(t_{r+n-1}, t_{r+2n-4})}{n-1}.$$

$T_r, \ldots T_{r+n-3}$, pa (3.9) slijedi. Postoje dva T-spline-a koja imaju $[x_l, x_{l+2}]$ kao nosač: T^n_{r+n-2} i T^n_{r+n-1}. Zbog simetrije, dovoljno je da dokažemo (3.9) za npr. $T^n_{r+n-2}(x)$.

Za $x \in (x_l, x_{l+1})$ postoje konstante α_i za koje je

$$T^n_{r+n-2}(x) = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i B^n_{r+i-1}(x). \tag{3.11}$$

Ako deriviramo (u klasičnom smislu) jednu i drugu stranu (3.11) dobivamo:

$$\frac{1}{C_{n-1}(r+n-4)p_l} B^{n-1}_{r+n-4}(x) - \frac{1}{C_{n-1}(r+n-3)p_l} B^{n-1}_{r+n-3}(x) =$$
$$\sum_{i=1}^{n-2} (n-1)\,\alpha_i \,[\frac{-B^{n-1}_{i+r}(x)}{t_{i+r+n-1} - t_{i+r}} + \frac{B^{n-1}_{i+r-1}(x)}{t_{i+r+n-2} - t_{i+r-1}}]$$

gdje smo upotrijebili teorem 2.3.1 i formulu za derivacije B-spline-ova. Ako usporedimo koeficijente u B-razvojima lijeve i desne strane, zaključujemo da je:

$$\alpha_i = 0 \quad \text{za} \quad i = 1, \ldots n-4$$

i, budući je $C_{n-1}(r+n-4) = \dfrac{x_{l+1} - x_l}{(n-1)p_l}$:

$$\begin{aligned} \alpha_{n-3} &= 1, \\ \alpha_{n-2} &= 1 - \frac{x_{l+2} - x_l}{p_l(n-1)C_{n-1}(r+n-3)}. \end{aligned}$$

Znači, vrijedi:

$$T^n_{r+n-2}(x) = \alpha_{n-3} B^n_{r+n-4}(x) + \alpha_{n-2} B^n_{r+n-3}(x),$$

pa upotreba deBoor–Cox-ove rekurzije za polinomne spline-ove vodi na:

$$T^n_{r+n-2}(x) = \frac{x - t_{r+n-4}}{t_{r+2n-5} - t_{r+n-4}} B^{n-1}_{r+n-4}(x) + [1 - \frac{x - x_l}{p_l(n-1)C_{n-1}(r+n-3)}] B^{n-1}_{r+n-3}(x).$$

Ako uvrstimo prije izračunatu konstantu $C_{n-1}(r+n-3)$, dobivamo:

$$1 - \frac{x - x_l}{p_l(n-1)C_{n-1}(r+n-3)} = \frac{d\sigma(x, x_{l+2})}{d\sigma(x_l, x_{l+2})} = \frac{d\sigma(x, t_{r+2n-4})}{d\sigma(t_{r+n-3}, t_{2n+r-4})}$$

što dokazuje (3.9).

U slučaju da je $n_i = n$ ili $n_i = n-1$ za neki i, nema restrikcije na derivaciju i zaključak lagano slijedi. ∎

KOROLAR **3.2.1** *Neka su* $T^n_i \in \mathcal{S}(n, p, \boldsymbol{m}, \Delta)$ *kao u teoremu 3.3. Tada je za* $x \in [x_i, x_{i+1})$

$$(p_i D) T^n_i(x) = (n-1)[\frac{B^{n-1}_i(x)}{d\sigma(t_i, t_{i+n-1})} - \frac{B^{n-1}_{i+1}(x)}{d\sigma(t_{i+1}, t_{i+n})}]. \tag{3.12}$$

DOKAZ: Direktna posljedica teorema 2.3.1 i eksplicitnog izraza za konstante $C_n(i)$ iz teorema 3.2.1. ∎

Na osnovu teorema 3.2.1 može se napisati algoritam za računanje svih neiščezavajućih T-spline-ova, koji oponaša deBoor-ov BSPLVB [4]. Samo zadnji redak u tabeli B-spline-ova se računa drugačije. Potprogram `SIMPDT` računa simultano prve i druge derivacije (generalizirane) hermitskog generaliziranog B-spline-a s jednom težinom. U algoritmu se pokazuje zgodnim uvesti *prošireni vektor koeficijenata*, `PCOEF(i)`, za $i = 1, \ldots n + k - 1$ koji odgovara proširenoj particiji (2.3):

$$\texttt{PCOEF(i)} = \texttt{PCOEF(i+1)} \text{ ako je } t_i = t_{i+1}$$

i

$$\texttt{PCOEF(i)} = p_l \qquad \text{za indeks } l \text{ za koji je } t_i = x_l.$$

```
      subroutine SIMPDT(t,pcoef,jhigh,x,left,biatx,dbiatx,ddbiatx)
c
c     calculates the value of all possibly nonzero T-splines
c     together with their L1 and L2-derivatives at x of
c     order jhigh with knot sequence T. All knots are of multiplicity
c    .ge. jhigh-2 (hermitic case or worse)
```

```
c
c      calls SIMPDB
c
c******INPUT******
c         T......knot sequence, of length left+jhigh, nondecreasing.
c                It is assumed that T(LEFT) .LT. T(LEFT+1)
c         PCOEF..sequence (extended) of coefficients
c         JHIGH..order of spline space
c
c       W A R N I N G ...The restriction JOUT.LE.JMAX (=20) is im-
c       posed arbitrarily by the dimension statement for DELTAL and
c       DELTAR below, but is NOWHERE CHECKED FOR.
c
c         X.....The point at which the T-splines are to be evaluated.
c         LEFT..An integer chosen (usually) so that
c             T(LEFT) .lt. X .le. T(LEFT+1)
c
c******OUTPUT*****
c       BIATX.....array of length JHIGH, with BIATX(i) containing the
c                 value at x of the polynomial of order JHIGH which
c                 agrees with the T-spline T(left-jhigh+i,jout)(t)
c                 on the interval ( T(LEFT),T(LEFT+1) ) .
c       DBIATX....array of length JHIGH, with DBIATX containing the val-
c           ue at x of the L1-derivative of polynomial in BIATX
c
c*****METHOD******
c     The recurrence relation
c
c                  x - t(i)           t(i+j+1) - x
c     B(i,j+1)  =  ----------- B(i,j)+  ----------------- B(i+1,j)
c                 t(i+j)-t(i)         t(i+j+1)-t(i+1)
c
c     is used (repeatedly) to generate the (j+1)-vector B(LEFT-J,J+1)(x),
c     ...,B(LEFT,J+1)(x) from the J-vector B(LEFT-J+1,J) (x),...,
c     B(LEFT,J) (x) , storing the new values in BIATX over the old.The
c     facts that
c              B(I,1) = 1 if T(I) .LE. X .LT. T(I+1)
c     and that
c              B(I,J) (x) = 0 unless T(I) .LE. X .LT. T(I+J)
c     are used. It is assumed that j.le.jhigh-1. The last column is
c     generated by the recurrence relation (j=jhigh) :
c
c                  ds(t(i),x)             ds(x,t(i+j+1))
c     T(i,j+1)  =  -------------  B(i,j) +  -----------------  B(i+1,j)
c                 ds(t(i),t(i+j))         ds(t(i+1),t(i+j+1))
```

```
c
      parameter (jmax=20)
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension t(1),pcoef(1),
     *          deltal(jmax),deltar(jmax),biatx(jhigh),dbiatx(jhigh),
     *          ddbiatx(jhigh)
      double precision sumr,suml,saved,term
      integer i,i1,jhigh,left
      call simpdb(t,jhigh-1,x,left,biatx,dbiatx)
      do 2 i=1,jhigh-1
         sumr=(t(left+1)-x)/pcoef(left)
         suml=(x-t(left))/pcoef(left)
         do 3 i1=1,i-1
            sumr=sumr+(t(left+i1+1)-t(left+i1))/pcoef(left+i1)
            suml=suml+(t(left-i1+1)-t(left-i1))/pcoef(left-i1)
3        continue
         deltar(i)=sumr
         deltal(i)=suml
2     continue
      saved=0.d0
      saved1=0.d0
      saved2=0.d0
      do 1 i=1,jhigh-1
         term=biatx(i)/(deltar(i)+deltal(jhigh-i))
         term1=(jhigh-1)*term
         term2=(jhigh-1)*dbiatx(i)/(deltar(i)+deltal(jhigh-i))
         ddbiatx(i)=saved2-term2
         dbiatx(i)=saved1-term1
         biatx(i)=saved+deltar(i)*term
         saved2=term2
         saved1=term1
1        saved=deltal(jhigh-i)*term
      biatx(jhigh)=saved
      dbiatx(jhigh)=saved1
      ddbiatx(jhigh)=saved2
      return
      end
```

Subroutine potprogram `SIMPDB` računa simultano polinomne B-spline-ove i njihove (obične) derivacije:

```
      subroutine SIMPDB(t,jhigh,x,left,biatx,dbiatx)
c
c     calculates the value of all possibly nonzero B-splines
c     simultaneously with their derivatives at x of
```

```
c     order jout = max ( jhigh, (j + 1)*(index - 1) )
c     with knot sequence T.
c
c*****INPUT******
c        T......knot sequence, of length left+jout, nondecreasing.
c               It is assumed that T(LEFT) .LT. T(LEFT+1)
c        JHIGH..order of spline space
c
c           W A R N I N G ...The restriction JOUT.LE.JMAX (=20) is im-
c           posed arbitrarily by the dimension statement for DELTAL and
c           DELTAR below, but is NOWHERE CHECKED FOR.
c
c         X.....The point at which the B-splines are to be evaluated.
c         LEFT..An integer chosen (usually) so that
c               T(LEFT) .lt. X .le. T(LEFT+1)
c
c*****OUTPUT*****
c        BIATX.....array of length JOUT, with BIATX(i) containing the
c                  value at x of the polynomial of order JOUT which
c                  agrees with the B-spline B(left-jout+i,jout)(t)
c                  on the interval (T(LEFT),T(LEFT+1)).
c
c        DBIATX....array of length JHIGH, with DBIATX containing the
c                  value at x of the first derivative of the polynomial
c                  in BIATX
c
c*****METHOD******
c
c     the recurrence relation
c
c                       x - t(i)                  t(i+j+1) - x
c     B(i,j+1) (x)  =  ----------- B(i,j)(x) +  -----------------
c                     t(i+j)-t(i)               t(i+j+1)-t(i+1)
c
c     is used (repeatedly) to generate the (j+1)-vector B(LEFT-j,J+1)(x),
c     ...,B(LEFT,J+1)(x) from the J-vector B(LEFT-J+1,J) (x),...,
c     B(LEFT,J) (x) , storing the new values in BIATX over the old.The
c     facts that
c                 B(I,1) = 1 if T(I) .LE. X .LT. T(I+1)
c     and that
c                 B(I,J) (x) = 0 unless T(I) .LE. X .LT. T(I+J)
c     are used. The particular organization of the calculations follows
c     algorithm (8) in chapter X of deBoor's Practical Guide to Splines
c
      parameter  (jmax = 20)
```

```
      implicit double precision (a-h,o-z)
      integer jhigh,left,i,j,jp1
      double precision biatx(jhigh),dbiatx(jhigh),t(1),x
      double precision saved,term,deltal(jmax),deltar(jmax)
c     dimension biatx(jout), t(left+jout)
c
c     save    j    , deltal, deltar (valid in fortran 77)
c
      j=1
      biatx(1)=1.d0
      dbiatx(1)=0.d0
      if (j. ge. jhigh)  go to 99
c
20    jp1=j+1
      deltar(j)=t(left+j)-x
      deltal(j)=x-t(left+1-j)
      saved=0.d0
      saved1=0.d0
            do 26 i = 1,j
               term = biatx(i)/(deltar(i) + deltal(jp1-i))
               term1=j*term
               dbiatx(i)=saved1-term1
               biatx(i) = saved + deltar(i)*term
               saved1 = term1
26             saved = deltal(jp1 - i)*term
            biatx(jp1) = saved
            dbiatx(jp1)=saved1
            j = jp1
        if (j .lt. jhigh) go to 20
99      return
        end
```

PRIMJER **3.2.3** *Neka je* $n = 4$, $\Delta = \{0, 1, 2, 3\}$ *i vektor multipliciteta* $\boldsymbol{m} = (2, 2,)^T$, *tj. neka je proširena particija*

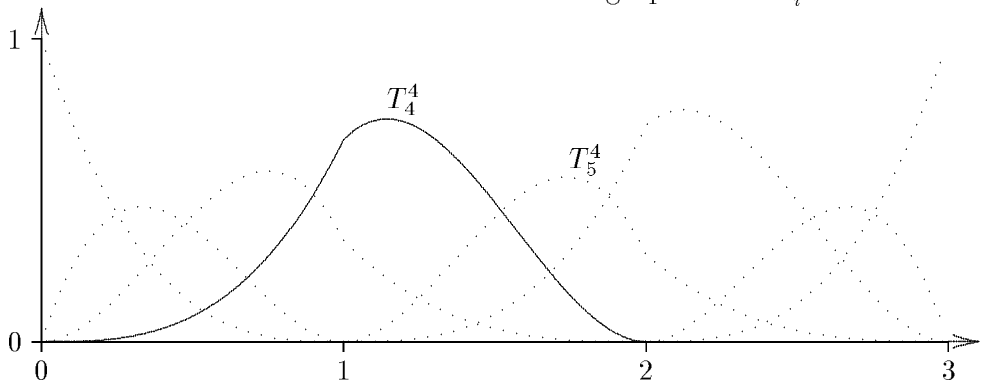
$$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3\},$$

a težina $d\sigma$ *određena koeficijentima* $1, 2, 5$ *(3.1). Prošireni vektor koeficijenata je dakle*

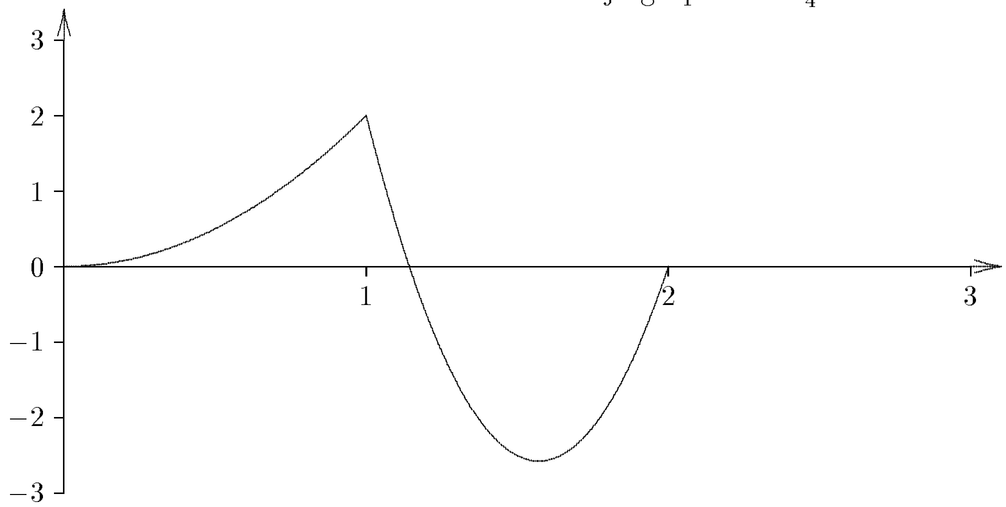
$$(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 5, 1, 1, 1)^T.$$

Bazu čini 8 B-spline funkcija, koje se lako generiraju programom SIMPDT*: (v. sliku 3.1)*

Slika 3.1 Hermitski g–spline-ovi T_i^4



Slika 3.2 L1–derivacija g–spline-a T_4^4



Prve generalizirane derivacije B-spline-ova su polinomni parabolički spline-ovi (slika 3.2), a druge derivacije su linearni spline-ovi sa skokovima u čvorovima. Svaki (hermitski) g-spline može se reprezentirati kao linearna kombinacija gB-spline-ova; slijedeći je program sličan programu `DTB4DER`. Potprogram `INTERV` je deBoor-ova rutina za binarno traženje u duploj preciznosti ([4, str. 86]).

```
      subroutine dtbgder(x,y,coef,jhigh,pcoef,n,s,xl1s,xl2s)
c
c     calculates g-spline from its T-representation
c     (pD) continuous across knots, p is piecewise const.
c
c     calls INTERV,SIMPDT
c
c*****INPUT******
c            x     ... evaluation point
```

```
c            y     ... knot sequence
c            coef  ... coeffs in T-representation
c            jhigh ... order of the spline space
c            pcoef ... definition of coef. p(x) by parts
c            n     ... dimension of the spline space
c
c*****OUTPUT*****
c            s     ... spline s at x
c            xL1s  ... derivative at x
c            xL2s  ... second derivative at x
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension coef(n),y(1),pcoef(1)
      dimension biatx(jhigh),dbiatx(jhigh),ddbiatx(jhigh)
      s=0.d0
      xl1s=0.d0
      xl2s=0.d0
      call interv(y,n+jhigh,x,left,mflag)
      if (mflag.eq.1)left=n
      call simpdt(y,pcoef,jhigh,x,left,biatx,dbiatx,ddbiatx)
      do 1 i=1,jhigh
         s  =s+coef(left-jhigh+i)*biatx(i)
         xl1s=xl1s+coef(left-jhigh+i)*dbiatx(i)
         xl2s=xl2s+coef(left-jhigh+i)*ddbiatx(i)
1     continue
      return
      end
```

Uvjet (3.6) nije nužan u izvodu rekurzivnih formula za generalizirane B-spline-ove, već samo omogućuje interpretaciju tih spline-ova i pridruženih CCT-sistema. Iz kanonske se reprezentacije CCT-sistema (definicija 1.1.1) vidi, da sve izvedene rekurzivne formule za hermitski g-spline vrijede i uz slabiji uvjet:

$$d\sigma(t_i, t_{i+n-1}) > 0 \qquad \forall i. \tag{3.13}$$

Zaključujemo, da g-spline-ove možemo tretirati i kao jednu klasu *L-spline funkcija* koje odgovaraju **raznim** diferencijalnim operatorima $D^{n-2}Dp_iD$ na svakom intervalu particije.

PRIMJER **3.2.4** *Neka je* $n = 4$, $\Delta = \{0,1,2,3\}$ *i vektor multipliciteta* $\boldsymbol{m} = (2,2,)^T$, *tj. neka je proširena particija*

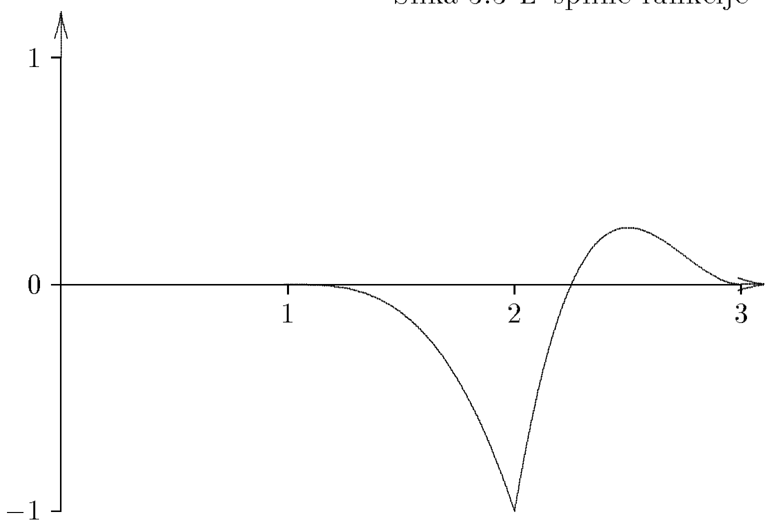
$$\{0,0,0,0,1,1,2,2,3,3,3,3\},$$

a težina $d\sigma$ *određena koeficijentima* $1,4,-2$ *(3.1), tj. prošireni vektor koeficijenata neka je*

$$(1,1,1,1,1,4,4,-2,-2,1,1)^T.$$

Spline T_6^4 *generiran programom* `SIMPDT` *izgleda kao na slici 3.3. Budući da nisu ispunjeni uvjeti teorema 3.1.1,* T_6^4 *nije Čebiševljev spline i može imati nul-točke unutar svojeg nosača.*

Slika 3.3 L–spline funkcije



DEFINICIJA **3.2.1** *Neka je* $T_i^n(x)$ *hermitski g-spline kao u teoremu 3.2.1. Spline*

$$Q_i^n := \frac{T_i^n}{d\sigma(t_i, t_{i+n})}$$

zove se nenormalizirani hermitski generalizirani B-spline.

KOROLAR **3.2.2** *Nenormalizirani hermitski generalizirani B-spline-ovi zadovoljavaju za* $n \geq 2$ *rekurziju*

$$Q_i^n(x) \;=\; \frac{d\sigma(t_i, x)Q_i^n(x) + d\sigma(x, t_{i+n+1})Q_{i+1}^n(x)}{d\sigma(t_i, t_{i+n+1})} \tag{3.14}$$

gdje je

$$Q_i^1(x) = \begin{cases} \frac{1}{d\sigma(t_i, t_{i+1})} & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & inače. \end{cases}$$

DOKAZ: Direktna posljedica definicije 3.2.1 i (3.9). ∎

Rekurzija 3.14 može se primijeniti na *transformirane prostore spline funkcija*, slično kao i Schumakerov rezultat [51, tm 6.1].

3.3 Kubični g-spline

Kubični spline jedan je od najčešće upotrebljavanih spline-ova i pripada mu važno mjesto kako u razvoju teorije tako i u primjeni. U prethodnom poglavlju vidjeli smo, kao specijalni slučaj opće teorije, kako se kubični g-spline može prikazati kao kombinacija generaliziranih B-spline-ova, od kojih se svaki može dobiti kao konveksna kombinacija spline-ova nižeg reda. Vrijednost teorije umanjena je činjenicom, da se B-spline-ovi mogu konstruirati elegantnim rekurzijama poput (3.9) samo ako su multipliciteti čvorova $\geq n-2$. U tom (hermitskom) slučaju ne bi bilo teško naći formule za T-spline-ove i direktno, tj. koristeći interpolacione formule. Kao u u slučaju klasičnog kubičnog spline-a, situacija je drugačija ako se zahtijeva viša glatkoća; spline klase C^2 ne može se odrediti "lokalno".

Treba također istaknuti, da su multipliciteti čvorova i broj težina povezani. Nema smisla zadavati veći broj težina od stupnja glatkoće, jer je između čvorova svaki g-spline polinom, a težine samo određuju način ljepljenja derivacija (usp. teorem 3.1.1).

PRIMJER **3.3.1** *Neka je $n = 4$, $\boldsymbol{m} = (n_i)^T$, $n_i \geq 2$ i neka su mjere $d\sigma_p$ i $d\sigma_w$ generirane po dijelovima konstantnim funkcijama p, w. Tada je*

$$\mathcal{S}(4, (d\sigma_p, d\sigma_w)^T, \boldsymbol{m}, \Delta) = \mathcal{S}(4, (d\sigma_p, 1)^T, \boldsymbol{m}, \Delta)$$

i, specijalno

$$T^4_{i,(d\sigma_p, d\sigma_w)^T} = T^4_{i,(d\sigma_p,1)^T}.$$

Zbog jednostavnijeg zapisa, neka je

$$T^n_{i,p,w\dots} := T^n_{i,\boldsymbol{p}}$$

za vektor težina $\boldsymbol{p}$ (v.definiciju 1.1.1) čije su gustoće:

$$\boldsymbol{p} = [p, w, \dots]^T.$$

U daljnjem ćemo konstruirati lokalnu bazu prostora $\mathcal{S}(4, (p, w)^T, \boldsymbol{m}, \Delta)$ koja se sastoji od odgovarajućih T-spline-ova, koristeći se pri tom činjenicom da uvijek znamo formule za derivacije (korolar 3.3). Pod kostrukcijom se ovdje prvenstveno misli na algoritam, koje omogućuje efektivno računanje. Algoritam se zasniva na sličnoj klasi *algoritama za ubacivanje čvorova*[2]; rezultati podsjećaju na analogne rezultate u teoriji polinomnih spline-ova ([11],[12], [27]).

[2]engl. knot insertion algorithm

LEMA **3.3.1** *Neka je* $T^3_{j,w} \in \mathcal{S}(3,(w),\boldsymbol{m},\Delta)$ *parabolički g-spline s pripadnim vektorom multipliciteta* $\boldsymbol{m} = (1,\dots 1)^T$, Δ *kao u (2.3), i neka su* $\tilde{B}^3_j \in \mathcal{P}(3,\tilde{\boldsymbol{m}},\Delta)$ *parabolički B-spline-ovi s vektorom multipliciteta* $\tilde{\boldsymbol{m}} = (2,\dots 2)^T$. *Neka su*

$$\{t_1,\dots t_{k+6}\} \quad \text{i} \quad \{\tilde{t}_1,\dots \tilde{t}_{2k+6}\}$$

pripadne proširene particije. Tada je za $j = 1,\dots k+3$

$$T^3_{j,w}(x) = \frac{d\sigma_w(t_j,t_{j+1})}{d\sigma_w(t_j,t_{j+2})}\tilde{B}^3_r(x) + \tilde{B}^3_{r+1}(x) + \frac{d\sigma_w(t_{j+2},t_{j+3})}{d\sigma_w(t_{j+1},t_{j+3})}\tilde{B}^3_{r+2}(x), \tag{3.15}$$

gdje je $d\sigma_w$ *mjera s po dijelovima konstantnom gustoćom* $1/w$, *a* r *index za koji je*

$$t_j = \tilde{t}_r < \tilde{t}_{r+1}.$$

DOKAZ: Kako je $\mathcal{S}(3,(w),\boldsymbol{m},\Delta) \subset \mathcal{P}(3,\tilde{\boldsymbol{m}},\Delta)$ zaključujemo da se $T^3_{j,w}$ može prikazati kao linearna kombinacija svih netrivijalnih $\tilde{B}^3_i$ na intervalu $[t_j,t_{j+3}]$, tj. postoje $\delta(i) \in \mathcal{R}$ takvi da vrijedi

$$T^3_{j,w}(x) = \sum_{i=r-2}^{r+4} \delta(i)\tilde{B}^3_i(x). \tag{3.16}$$

Ako je $x \in [t_j,t_{j+1}]$ tada je

$$T^3_{j,w}(x) = \delta(r-2)\tilde{B}^3_{r-2}(x) + \delta(r-1)\tilde{B}^3_{r-1}(x) + \delta(r)\tilde{B}^3_r(x)$$

pa $T^3_{j,w}(t_j) = 0$, $\tilde{B}^3_2(t_j) \neq 0$ povlači $\delta(r-2) = 0$; slično $(wD)T^3_{j,w}(t_j+) = 0$, $(wD)\tilde{B}^3_3(t_j+) \neq 0$ povlači $\delta(r-1) = 0$. U $x = t_{j+1}$ je dakle

$$T^3_{j,w}(t_{j+1}) = \delta(r)\tilde{B}^3_r(t_{j+1}).$$

Spline $T^3_{j,w}$ je očito lokalni pa prema (3.9) vrijedi

$$T^3_{j,w}(x) = \frac{d\sigma_w(t_j,x)}{d\sigma(t_j,t_{j+2})}B^2_j(x) + \frac{d\sigma_w(x,t_{j+3})}{d\sigma(t_{j+1},t_{j+3})}B^2_{j+1}(x).$$

Kako je $\tilde{B}^3_r(t_{j+1}) = 1$ slijedi

$$\delta(r) = \frac{d\sigma_w(t_j,t_{j+1})}{d\sigma_w(t_j,t_{j+2})}. \tag{3.17}$$

Uzmemo li $x \in [t_{j+2},t_{j+3}]$, analogna argumentacija povlači

$$\delta(r+4) = \delta(r+3) = 0, \quad \delta(r+2) = \frac{d\sigma_w(t_{j+2},t_{j+3})}{d\sigma_w(t_{j+1},t_{j+3})}.$$

Za $x \in (t_{j+1}, t_{j+2})$ je

$$T^3_{j,w}(x) \;=\; \delta(r)\tilde{B}^3_r(x) + \delta(r+1)\tilde{B}^3_{r+1}(x) + \delta(r+2)\tilde{B}^3_{r+2}(x),$$

odakle treba odrediti još jedan nepoznati koeficijent $\delta(r+1)$, koji možemo odrediti samo uspoređujući derivacije, budući je $\tilde{B}^3_{r+1}(t_{j+1}) = \tilde{B}^3_{r+1}(t_{j+2}) = 0$. Imamo:

$$L_{1,w}T^3_{j,w}(x)\mid_{x=t_{j+1}} = (wD)T^3_{j,w}(t_{j+1} \;=\; \delta(r)(wD)\tilde{B}^3_r(t_{j+1}) + \delta(r+1)(wD)\tilde{B}^3_{r+1}(t_{j+1}).$$

Na osnovu korolara 3.2 je

$$(wD)T^3_{j,w}(t_{j+1}) \;=\; \frac{2}{d\sigma_w(t_{j+1}, t_{j+2})}$$

što zajedno sa standardnom rekurzijom za derivacije B-spline-ova [10] povlači

$$\frac{2}{d\sigma_w(t_j, t_{j+2})} \;=\; \frac{-2\delta(r)}{d\sigma_w(t_{j+1}, t_{j+2})} + \frac{2\delta(r+1)}{d\sigma_w(t_{j+1}, t_{j+2})}.$$

Ako se uvrsti $\delta(r)$ iz (3.17) dobivamo

$$\delta(r+1) = \frac{1}{d\sigma_w(t_j, t_{j+2})}[d\sigma_w(t_j, t_{j+1}) + d\sigma_w(t_{j+1}, t_{j+2}] = 1. \qquad \blacksquare$$

PRIMJER **3.3.2** *Ako je $w \equiv 1$, onda za parabolične spline-ove vrijedi:*

$$B^3_j(x) \;=\; \frac{t_{j+1} - t_j}{t_{j+2} - t_j}\tilde{B}^3_r(x) + \tilde{B}^3_{r+1}(x) + \frac{t_{j+3} - t_{j+2}}{t_{j+3} - t_{j+1}}\tilde{B}^3_{r+2}(x)$$

gdje su $\tilde{B}^3_i \in \mathcal{P}(3, \tilde{\boldsymbol{m}}, \Delta)$ parabolički neprekidni spline-ovi (po dijelovima Bernsteinovi polinomi reda 3).

Primjer 3.3.2 može se generalizirati na prostor $\mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Delta)$ za proizvoljno n.

Pretpostavimo da se mreži Δ dodaju neki novi čvorovi, tako da je nova *profinjena mreža* $\tilde{\Delta}$ i $\tilde{\boldsymbol{m}}$ novi vektor multipliciteta. Neka su $\{t_j\}$ i $\{\tilde{t}_j\}$ pripadne *proširene particije*. Ako su $\{B^n_i\}$ ($\{\tilde{B}^n_i\}$) polinomni B-spline-ovi u $\mathcal{P}(n, \boldsymbol{m}, \Delta)$ ($\mathcal{P}(n, \tilde{\boldsymbol{m}}, \tilde{\Delta})$), tada postoje brojevi $\alpha^n_i(j)$ tako da je

$$B^n_i(x) \;=\; \sum_j \alpha^n_i(j)\tilde{B}^n_j(x.) \tag{3.18}$$

Funkcija $j \mapsto \alpha^n_i(j)$ naziva se *diskretni spline*. Diskretni spline-ovi mogu se računati rekurzivno:

$$\alpha^1_i(j) = \begin{cases} 1 & t_i \le \tilde{t}_j < t_{i+1} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

i, za $n > 1$

$$\alpha_i^n(j) = \frac{\tilde{t}_{j+n-1} - t_i}{t_{i+n-1} - t_i}\alpha_i^{n-1}(j) + \frac{t_{i+n} - \tilde{t}_{j+n-1}}{t_{i+n} - t_{i+1}}\alpha_{i+1}^{n-1}(j). \tag{3.19}$$

U daljnjem će nas interesirati slučaj $\tilde{\Delta} \equiv \Delta$, tj. pretpostavit ćemo da je mreža ista, ali da su čvorovi većeg multipliciteta: $\tilde{n}_i \geq n_i$. Za takav slučaj profinjenja mreže je

$$\alpha_i^n(j) > 0 \qquad \forall j = i + h_i, \dots, i + k_i - 1$$

gdje su h_i i k_i indeksi za koje je $\tilde{t}_{h_i} = t_i$, $\tilde{t}_{k_i} = t_{i+n}$. Ova je tvrdnja specijalni slučaj *totalne pozitivnosti* matrice diskretne spline kolokacije [42]. Direktni dokaz ove tvrdnje može se naći u [12, lema 4.1]. Diskretni spline-ovi čine particiju jedinice, tj. vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n+k} \alpha_i^n(j) = 1 \qquad \forall j \ t_n \leq \tilde{t}_j < t_{n+k+1}$$

i osim toga je

$$\alpha_i^n(j) = 0, \quad \text{ako je } \tilde{t}_j < t_i \text{ ili } t_{i+n} > \tilde{t}_{j+n-1}.$$

Prema lemi 3.3.1 je

$$T_{j,w}^3(x) = \sum_i \delta_{j,w}^3(i)\tilde{B}_i^3(x)$$

pa $i \mapsto \delta_{j,w}^3(i)$ opravdava naziv *diskretni parabolički g-spline.* U daljnjem ćemo pretpostaviti da je $\delta_{j,w}^3(i) = 0$ za $i \notin \{r, r+1, r+2\}$.

LEMA **3.3.2** *Neka je $T_{i,w}^3 \in \mathcal{S}(3, (w), \boldsymbol{m}, \Delta)$ parabolički generalizirani B-spline i*

$$C_3(i) = \int_{t_i}^{t_{i+3}} T_{i,w}^3 d\sigma_p. \tag{3.20}$$

Tada je za svako $i = 1, \dots 3 + k$:

$$C_3(i) = \frac{1}{3}\sum_j \delta_{i,w}^3(j) d\sigma_p(\tilde{t}_j, \tilde{t}_{j+3}) \tag{3.21}$$

gdje je $\delta_{i,w}^3$ diskretni parabolički g-spline na profinjenoj mreži koja odgovara vektoru multipliciteta $\tilde{\boldsymbol{m}} = (n_i)^T$, $n_i \geq 2$.

DOKAZ: Prema lemi 3.3.1 je

$$C_3(i) = \sum_j \delta_{i,w}^3(j) \int_{\tilde{t}_j}^{\tilde{t}_{j+3}} \tilde{B}_j^3(\eta)\frac{d\eta}{p(\eta)}.$$

Polinomni B-spline-ovi $\tilde{B}_j^3$ imaju nosač duljine 1 ili 2; u oba slučaja je

$$\int_{\tilde{t}_j}^{\tilde{t}_{j+3}} \tilde{B}_j^3(\eta)\frac{d\eta}{p(\eta)} = d\sigma_p(\tilde{t}_j, \tilde{t}_{j+3})$$

kao i u dokazu teorema 3.2.1), pa tvrdnja slijedi. ∎

Kombinirajući formule za L-derivacije Čebiševljevih spline-ova (teorem 2.8) i algoritam za dodavanje čvorova paraboličkim g-spline-ovima možemo izvesti algoritam za dodavanje čvorova za kubične g-spline-ove s dvije težine. Budući da u tom slučaju nemamo izvedene rekurzije deBoor–Cox tipa, takav aloritam je zasad ujedno i jedini (stabilni) algoritam za računanje s kubičnim g-spline-om. U izvodu rekurzije za diskretne spline-ove (3.19) u [11] implicitno je sadržana slijedeća činjenica: **ako je poznata dvočlana rekurzija tipa deBoor–Cox za spline-ove reda $n-1$, tada se za spline-ove reda n može napisati algoritam za dodavanje čvorova**. U slijedećem teoremu koristi se drugačiji tip rasuđivanja za dokaz analognih tvrdnji za g-spline-ove.

TEOREM **3.3.1** *Neka su $T_{j,p,w}^4 \in \mathcal{P}(4, \boldsymbol{m}, (p,w)^T, \Delta)$ gdje je $\boldsymbol{m} = (1,\ldots,1)^T$ i $\tilde{T}_{j,p,w}^4 \in \mathcal{P}(4, \tilde{\boldsymbol{m}}, (p), \Delta)$, $\tilde{\boldsymbol{m}}$ kao u lemi 3.3.2. Tada postoje $\delta_{j,p,w}^4(i) > 0$ za koje je*

$$T_{j,p,w}^4(x) = \sum_{i=r}^{r+3} \delta_{j,p,w}^4(i)\tilde{T}_{i,w}^4(x) \tag{3.22}$$

gdje je $r = r_j$ indeks za koji je ispunjeno

$$t_j = \tilde{t}_{r_j} < \tilde{t}_{r_j+1}. \tag{3.23}$$

Neka su $\{t_1,\ldots t_{k+8}\}$ i $\{\tilde{t}_1,\ldots \tilde{t}_{2k+8}\}$ pripadne proširene particije. Tada su veličine $\delta_{j,p,w}^4(i)$, $i = r,\ldots r+4$ određene diskretnim paraboličkim g-spline-om:

$$\begin{aligned}
\delta_{j,p,w}^4(r) &= \frac{\gamma_{j,p,w}^3(r)}{\|\gamma_{j,p,w}^3\|}\\
\delta_{j,p,w}^4(r+1) &= \frac{\gamma_{j,p,w}^3(r)+\gamma_{j,p,w}^3(r+1)}{\|\gamma_{j,p,w}^3\|}\\
\delta_{j,p,w}^4(r+2) &= \frac{\gamma_{j+1,p,w}^3(r+3)+\gamma_{j+1,p,w}^3(r+4)}{\|\gamma_{j+1,p,w}^3\|}\\
\delta_{j,p,w}^4(r+3) &= \frac{\gamma_{j+1,p,w}^3(r+4)}{\|\gamma_{j+1,p,w}^3\|}
\end{aligned} \tag{3.24}$$

gdje je

$$\gamma_{j,p,w}^3(i) = \delta_{j,w}^3(i)d\sigma_p(\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+3}), \qquad \text{za} \quad i = r,\ldots r+2 \tag{3.25}$$

i

$$\|\gamma_{l,p,w}^3\| = \sum_i \gamma_{l,p,w}^3(i) \qquad \text{za} \quad l = j, j+1.$$

DOKAZ: Kako je $\mathcal{S}(4,(p,w)^T,\boldsymbol{m},\Delta)\subset\mathcal{S}(4,(w),\tilde{\boldsymbol{m}},\Delta)$ i

$$\tilde{T}^4_{i,p,w}(x)=\tilde{T}^4_{i,w}(x),$$

to postoje $\delta^4_{j,p,w}(i)\in\mathcal{R}$ tako da vrijedi

$$T^4_{j,p,w}(x)=\sum_{i=r-2}^{r+6}\delta^4_{j,p,w}(i)\tilde{T}^4_{i,w}(x) \tag{3.26}$$

gdje je r indeks za koji vrijedi (3.23). Uzmemo li $L_{1,p}=pD$ derivaciju s obje strane u (3.26) koristeći se pri tom teoremom 2.4.1, dobivamo:

$$\frac{T^3_{j,w}(x)}{C_3(j)}-\frac{T^3_{j+1,w}(x)}{C_3(j+1)}=\sum_i\delta^4_{j,p,w}(i)(pD)\tilde{T}^4_{i,w}(x).$$

Još jedna primjena teorema 2.4.1 na desnoj strani gornje jednakosti, uz zamjenu indeksa sumacije, povlači:

$$\frac{T^3_{j,w}(x)}{C_3(j)}-\frac{T^3_{j+1,w}(x)}{C_3(j+1)}=\sum_i\frac{\delta^4_{j,p,w}(i)-\delta^4_{j,p,w}(i-1)}{\tilde{C}_3(i)}\tilde{T}^3_{i,w}(x).$$

Pri tom je

$$C_3(i)=\int_{t_i}^{t_{i+3}}T^3_{i,w}d\sigma_p,\qquad \tilde{C}_3(i)=\int_{\tilde{t}_i}^{\tilde{t}_{i+3}}\tilde{B}^3_i d\sigma_p$$

budući da je $\tilde{T}^3_{i,w}\equiv\tilde{B}^3_i$. Nadalje je

$$\tilde{C}_3(i)=\frac{1}{3}d\sigma_p(\tilde{t}_i,\tilde{t}_{i+3})$$

i, prema lemi 3.3.2:

$$C_3(i)=\sum_l\delta^3_{i,w}(l)\tilde{C}_3(l),\quad i=j,j+1.$$

Spline-ove $T^3_{j,w}$ i $T^3_{j+1,w}$ možemo razviti u $\mathcal{P}(3,\tilde{m},\Delta)$ kao u lemi 3.3.1, pa usporedba koeficijenata na lijevoj i desnoj strani vodi na sistem jednadžbi za $\delta^4_{j,p,w}(i)$:

$$\frac{\delta^4_{j,p,w}(i)-\delta^4_{j,p,w}(i-1)}{d\sigma_p(\tilde{t}_i,\tilde{t}_{i+3})}=\frac{\delta^3_{j,w}(i)}{\sum_l\delta^3_{j,w}(l)d\sigma_p(\tilde{t}_l,\tilde{t}_{l+3})}-\frac{\delta^3_{j+1,w}(i)}{\sum_l\delta^3_{j+1,w}(l)d\sigma_p(\tilde{t}_l,\tilde{t}_{l+3})}.$$

Uvedemo li oznake $\gamma^3_{j,p,w}$ kao u (3.25), pokrati se zajednički faktor $d\sigma_p(\tilde{t}_i,\tilde{t}_{i+3})$ i i-ta jednadžba je

$$\delta^4_{j,p,w}(i)-\delta^4_{j,p,w}(i-1)=\frac{\gamma^3_{j,p,w}(i)}{\|\gamma^3_{j,p,w}\|}-\frac{\gamma^3_{j+1,p,w}(i)}{\|\gamma^3_{j+1,p,w}\|}.$$

Očito je $\delta^4_{j,p,w}(i) = 0$ za $i < r$ i $i > r+4$ (v. dokaz leme 3.3.1) pa je matrica linearnog sistema reda 5, dvodijagonalna i vrijedi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^4_{j,p,w}(r) \\ \delta^4_{j,p,w}(r+1) \\ \delta^4_{j,p,w}(r+2) \\ \delta^4_{j,p,w}(r+3) \\ \delta^4_{j,p,w}(r+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma^3_{j,p,w}(r)}{\|\gamma^3_{j,p,w}(r)\|} \\ \frac{\gamma^3_{j,p,w}(r+1)}{\|\gamma^3_{j,p,w}(r)\|} \\ \frac{\gamma^3_{j,p,w}(r+2)}{\|\gamma^3_{j,p,w}(r)\|} - \frac{\gamma^3_{j+1,p,w}(r+2)}{\|\gamma^3_{j+1,p,w}(r)\|} \\ \frac{-\gamma^3_{j+1,p,w}(r+3)}{\|\gamma^3_{j+1,p,w}\|} \\ \frac{-\gamma^3_{j+1,p,w}(r+4)}{\|\gamma^3_{j+1,p,w}\|} \end{pmatrix}$$

Kako je inverzna matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

imamo na osnovu definicije $\| \ \|$:

$$\begin{pmatrix} \delta^4_{j,p,w}(r) \\ \delta^4_{j,p,w}(r+1) \\ \delta^4_{j,p,w}(r+2) \\ \delta^4_{j,p,w}(r+3) \\ \delta^4_{j,p,w}(r+4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^3_{j,p,w}(r)/\|\gamma^3_{j,p,w}\| \\ \gamma^3_{j,p,w}(r)/\|\gamma^3_{j,p,w}\| + \gamma^3_{j,p,w}(r+1)/\|\gamma^3_{j,p,w}\| \\ 1-(\gamma^3_{j+1,p,w}(r+2)/\|\gamma^3_{j+1,p,w}\| \\ 1-(\gamma^3_{j+1,p,w}(r+2)/\|\gamma^3_{j+1,p,w}\| + \gamma^3_{j+1,p,w}(r+3)\|\gamma^3_{j+1,p,w}\| \\ 1-1\,, \end{pmatrix}$$

odakle slijedi (3.24), jer je

$$\gamma^3_{j+1,p,w}(r+2) \;=\; \|\gamma^3_{j+1,p,w}\| - \gamma^3_{j+1,p,w}(r+3) - \gamma^3_{j+1,p,w}(r+4) \qquad \text{i}$$

$$\gamma^3_{j+1,p,w}(r+2) + \gamma^3_{j+1,p,w}(r+3) \;=\; \|\gamma^3_{j+1,p,w}\| - \gamma^3_{j+1,p,w}(r+4). \quad \blacksquare$$

PRIMJER **3.3.3** *Ako je $p \equiv 1$, $w \equiv 1$, onda je npr.*

$$B^4_2 \;=\; \frac{t_3-t_2}{t_5-t_2}\tilde{B}^4_4 + \frac{t_4-t_2}{t_5-t_2}\tilde{B}^4_5 + \frac{t_6-t_4}{t_6-t_3}\tilde{B}^4_4 + \frac{t_6-t_4}{t_6-t_3}\tilde{B}^4_4 \qquad (3.27)$$

gdje su mreža Δ i proširene particije kao na slici (3.4). Relacija (3.27) neposredno se izvede pomoću rekurzija za diskretni spline (3.19). S druge strane, kako je

$$\delta^3_{2,p,w} = \delta^3_{2,1,1} \equiv \alpha^3_2,$$

gdje je α^3_2 diskretni parabolički spline (primjer 3.3.2), i $d\sigma_p(\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i+3}) = (\tilde{t}_{i+3} - \tilde{t}_i)$, lagano se provjeri da (3.27) slijedi i iz (3.24).

Primjer 3.3.3 motivira nas na slijedeću definiciju:

DEFINICIJA **3.3.1** *Prelikavanje $i \mapsto \delta^4_{j,p,w}(i)$ definirano na N i određeno relacijama 3.24 zove se diskretni kubični generalizirani B-spline s dvije težine.*

PRIMJER **3.3.4** *Ako je $w \equiv 1$ i $\boldsymbol{m} = (1,\ldots,1)^T$, tada su za svako $s \in \mathcal{S}(4,(p,1)^T,\boldsymbol{m},\Delta)$ uvjeti "lijepljenja" u čvorovima:*

$$\begin{aligned} s(x_i+) &= s(x_i-) &(3.28)\\ p_i Ds(x_i+) &= p_{i-1}Ds(x_i-) \\ Dp_i Ds(x_i+) &= Dp_{i-1}Ds(x_i-) &(3.29) \end{aligned}$$

gdje je $(p_i)^T$ prošireni vektor koeficijenata. Ako je Δ kao u primjeru 3.3.3,i $d\sigma = d\sigma_p$, tada je npr.

$$\begin{aligned} &T^4_{2,(p,1)}(x) = \\ &\frac{d\sigma(t_2,t_4)}{3C_3(2)}\frac{t_3-t_2}{t_4-t_2}\tilde{T}^4_4(x) + \frac{1}{3C_3(2)}[d\sigma(t_3,t_4)+d\sigma(t_2,t_4)\frac{t_3-t_2}{t_4-t_2}]\tilde{T}^4_5(x) + \\ &\frac{1}{3C_3(3)}[d\sigma(t_4,t_5)+d\sigma(t_4,t_6)\frac{t_6-t_5}{t_6-t_4}]\tilde{T}^4_6(x) + \frac{d\sigma(t_4,t_6)}{3C_3(3)}\frac{t_6-t_5}{t_6-t_4}\tilde{T}^4_7(x). \end{aligned}$$

Na taj način možemo računati lokalne baze prostora razapetog generaliziranim potencijama (v. sliku 1.1 uz primjer 1.4.3). Ovdje su $\tilde{T}_i$ hermitski T-spline-ovi na istoj mreži, koji zadovoljavaju prve dvije jednadžbe u (3.28), i $C_3(i)$ normalizacijske konstante:

$$C_3(i) = \frac{1}{3}\sum_j \alpha^3_i(j)d\sigma(\tilde{t}_j,\tilde{t}_{j+3}), \qquad i = 2,3.$$

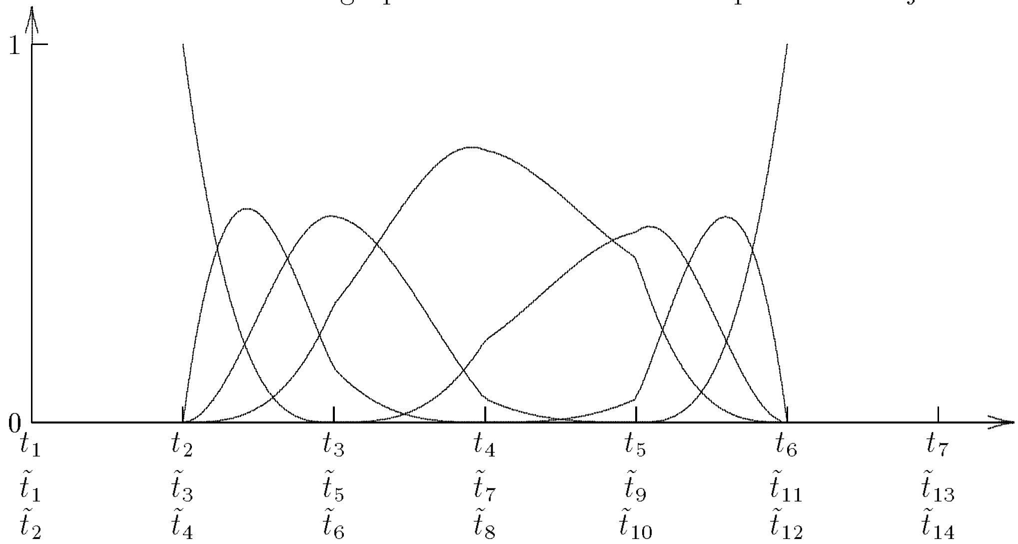
Koeficijenti α^3_i dolaze od diskretnog paraboličkog spline-a (primjer 3.3.2). Slika 3.4 prikazuje spline T^4_2 ne mreži $\Delta = \{0,1,2\ldots\}$, s tim da je mjera $d\sigma$ određena koeficijentima $1,2,5,1$ na intervalu $[2,6]$.

Važan primjer g-spline-ova je kubični g-spline, vezan uz fizikalnu interpretaciju elastičnog nehomogenog štapa (primjer 1.3.2).

PRIMJER **3.3.5** *Ako je $p \equiv 1$ i $\boldsymbol{m} = (1,\ldots,1)^T$, tada su za svako $s \in \mathcal{S}(4,(1,w)^T,\boldsymbol{m},\Delta)$ uvjeti "lijepljenja" u čvorovima:*

$$\begin{aligned} s(x_i+) &= s(x_i-) &(3.30)\\ Ds(x_i+) &= Ds(x_i-) \\ w_i D^2 s(x_i+) &= w_{i-1}D^2 s(x_i-) &(3.31) \end{aligned}$$

Slika 3.4 g–spline sa zadanim skokom prve derivacije



gdje je $w_i = w\,|_{[x_i,x_{i+1})}$. *Ako je* Δ *kao u primjeru 3.3.3, i* $d\sigma = d\sigma_w$, *tada je npr.*

$$T^4_{2,(1,w)}(x) =$$

$$\frac{\gamma_2^3(4)}{\|\gamma_2^3\|}\tilde{B}_4^4(x) + \frac{\gamma_2^3(4)+\gamma_2^3(5)}{\|\gamma_2^3\|}\tilde{B}_5^4(x) + \frac{\gamma_3^3(7)+\gamma_3^3(8)}{\|\gamma_3^3\|}\tilde{B}_6^4(x) + \frac{\gamma_3^3(8)}{\|\gamma_3^3\|}\tilde{B}_7^4(x)\,,$$

gdje je

$$\begin{aligned}
\gamma_2^3(4) &= \frac{d\sigma(t_2,t_3)}{d\sigma(t_2,t_4)}(t_4-t_2)\\
\gamma_2^3(5) &= t_4-t_3\\
\gamma_2^3(7) &= t_5-t_4\\
\gamma_2^3(8) &= \frac{d\sigma(t_5,t_6)}{d\sigma(t_4,t_6)}(t_6-t_4)\,.
\end{aligned}$$

$T_{2,(1,w)^4}$ *je u linearnom modelu elastični štap učvrščen u* t_2 *i* t_6 *na transverzalne pomake i rotaciju, a sastoji se od komada različitih presjeka (ili različitih osobina materijala).*

Spline-ovi iz primjera (3.3.5) i teorema 3.2.1 u uskoj su vezi sa konstrukcijom interpolanata koji čuvaju lokalnu monotonost i konveksnost podataka[3] . Tako npr. Foley ([17]) razmatra po dijelovima kubične funkcije klase C^1 koji minimiziraju funkcional

$$V(f) = \sum_{i=1}^{n}(w_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}[D^2f(t)]^2dt + \nu_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}[Df(t)]^2dt) \qquad \nu_i \geq 0, \quad w_i > 0$$

[3]engl. shape preserving interpolant

uz uvjet interpolacije

$$f(t_i) = y_i,$$

i dva (rubna) uvjeta. Foley naziva $f(x)$ *weighted* $\nu-$*spline*. Ako je $\nu_i = 0$, rješenje varijacionog problema je kubični g-spline s vektorom težina $(1, w)^T$.

TEOREM **3.3.2** *Neka je* $s(x)$ *kubični g-spline u* $\mathcal{S}(4, \boldsymbol{m}, (p, w)^T, \Delta)$*:*

$$s(x) = \sum_i^l a_i T_{i,p,w}^4(x), \tag{3.32}$$

i neka je na profinjenoj mreži koja se sastoji od istih čvorova većeg multipliciteta

$$s(x) = \sum_j^q d_i \tilde{T}_{i,p}^4(x), \qquad \tilde{T}_{i,p}^4 \in \mathcal{S}(4, \tilde{\boldsymbol{m}}, (p, 1)^T, \Delta). \tag{3.33}$$

Tada je

$$d_j = \sum_i^l \delta_{i,p,w}^4(j) a_i \tag{3.34}$$

DOKAZ: Zbog (3.32) i (3.22) je

$$s(x) = \sum_i^l a_i T_{i,p,w}^4(x) = \sum_i^p \sum_j^q a_i \delta_{i,p,w}^4(j) \tilde{T}_{j,\boldsymbol{p}}^4(x) = \sum_j^q \sum_i^l a_i \delta_{i,p,w}^4(j) \tilde{T}_{j,\boldsymbol{p}}^4(x)$$

gdje su $\delta_{i,p,w}^4(j)$ dani s (3.24). Usporedba s (3.33) povlači tvrdnju. ∎
Na osnovu analogona teorema 3.3.2 za spline-ove reda n moguće bi bilo definirati i općeniti diskretni g-spline, ali su pitanja vezana uz totalnu pozitivnost zasad neodgovorena.

Teorem 3.3.1 može se generalizirati na spline-ove reda n, uz uvjet da vektor multipliciteta $\boldsymbol{m} = (n_i)^T$ zadovoljava uvjet $n_i \geq n - 3$, tj. opisanom tehnikom moguće je konstruirati stabilne algoritme za spline funkcije koje su još samo "malo glatkije" od lokalnih (usp. (3.8)). Tako je npr. lagano doći do formula za kvartični g-spline kojemu je L_2 zadnja neprekidna generalizirana derivacija, ali ne i L_3.

Diskretni kubični B–spline-ovi konstruirani na opisani način su dobro normalizirani, tj. čine particiju jedinice. Dokaz se zasniva na slijedećoj lemi, koja također omogućuje alternativnu definiciju diskretnih splineova kao funkcija na diskretnoj mreži kod kojih se "lijepe" diskretne derivacije.

LEMA **3.3.3** *Neka je Δ_j Newtonova diferencija unaprijed s korakom 1:*

$$\Delta_j f(j) = f(j+1) - f(j)$$

i $\delta^4_{i,p,w}(j)$ diskretni kubični B–spline. Tada za sve j, $t_4 \le \tilde{t}_j < t_{k+5}$, vrijedi

$$\Delta_j \delta^4_{i,p,w}(j) = \tilde{C}_3(j+1)[\frac{\delta^3_{i,w}(j+1)}{C_3(i)} - \frac{\delta^3_{i+1,w}(j+1)}{C_3(i+1)}], \tag{3.35}$$

gdje su $\tilde{C}_3$ i C_3 definirani kao u teoremu 3.3.1.

DOKAZ: Po definiciji 3.3.1je

$$T^4_{i,p,w}(x) = \sum_j \delta^4_{i,p,w}(j)\tilde{T}^4_{j,p}(x).$$

Kao i u teoremu 3.3.1 imamo

$$\frac{1}{C_3(i)}T^3_{i,w}(x) - \frac{1}{C_3(i+1)}T^3_{i+1,w}(x) = \sum_j \delta^4_{i,p,w}(j)[\frac{\tilde{B}^3_j(x)}{\tilde{C}_3(j)} - \frac{\tilde{B}^3_{j+1}(x)}{\tilde{C}_3(j+1)}]$$

Spline na lijevoj strani je u $\mathcal{S}(3,p,\boldsymbol{m},\Delta)$ i može se razviti po $\tilde{B}^3_j \in \mathcal{P}(3,\boldsymbol{m},\Delta)$, gdje su koeficijenti određeni lemom 3.3.1. Nakon svođenja na isti indeks sumacije dobivamo:

$$\sum_j [\frac{\delta^3_{i,w}(j)}{C_3(i)} - \frac{\delta^3_{i+1,w}(j)}{C_3(i+1)}]\tilde{B}^3_j(x) = \sum_j \frac{\delta^4_{i,p,w}(j) - \delta^4_{i,p,w}(j-1)}{\tilde{C}_3(j)}\tilde{B}^3_j(x),$$

odakle uspoređivanjem koeficijenta u razvoju po $\tilde{B}^3_j$ slijedi

$$\frac{\delta^4_{i,p,w}(j) - \delta^4_{i,p,w}(j-1)}{\tilde{C}_3(j)} = \frac{\delta^3_{i,w}(j)}{C_3(i)} - \frac{\delta^3_{i+1,w}(j)}{C_3(i+1)}. \qquad \blacksquare$$

TEOREM **3.3.3** *Za sve j, $t_4 \le \tilde{t}_j < t_{k+5}$, vrijedi*

$$\sum_i \delta^4_{i,p,w}(j) = 1. \tag{3.36}$$

DOKAZ: Neka je

$$A(j;p,w) := \sum_i \delta^4_{i,p,w}(j)$$

i neka je Δ_j Newtonova diferenca po j s korakom 1. Tada je

$$\Delta_j A(j,p,w) = A(j,p,w) - A(j-1p,w) = \sum_i \Delta_j \delta^4_{i,p,w}(j),$$

što je na osnovu leme 3.3.3 jednako

$$\sum_i \tilde{C}_3(j+1)[\frac{\delta^3_{i,w}(j+1)}{C_3(i)} - \frac{\delta^3_{i+1,w}(j+1)}{C_3(i+1)}] = \tilde{C}_3(j+1)[-\sum_i \Delta_i \frac{\delta^3_{i,w}(j+1)}{C_3(i}],$$

pa slijedi da $A(j,p,w) = A(p,w)$ ne ovisi o j. Tvrdnja teorema slijedi za ako za j uvrstimo npr. $j = 1$, što smijemo jer je $t_4 = \tilde{t}_1$. ∎

KOROLAR **3.3.1** *Za polinomne diskretne spline-ove reda n vrijedi*

$$\text{(a)} \quad \Delta_j \alpha_i^n(j) = (\tilde{t}_{j+n} - \tilde{t}_{j+1})[\frac{\alpha_i^{n-1}(j+1)}{t_{i+n-1} - t_i} - \frac{\alpha_{i+1}^{n-1}(j+1)}{t_{i+n} - t_{i+1}}]$$

$$\text{(b)} \quad \sum_i \alpha_i^n(j) = 1 \qquad t_n \le \tilde{t}_j < t_{n+k+1}$$

DOKAZ: Svojstvo (a) se dokaže na isti način kao i lema 3.3.3 s tim da se iskoriste eksplicitni izrazi za integrale polinomnih B-spline-ova (2.30); (b) očigledno slijedi na isti način kao i teorem 3.3.3 ∎

Korolar 3.3.1 je samo jedan novi dokaz poznate činjenice, da diskretni polinomni B-spline-ovi čine particiju jedinice (usp. [11]).

Program `KNOTINS` pokazuje neke karakteristike diskretnih spline-ova i uz njih vezanih veličina, koje se pojavljuju u teoremu 3.3.1. Pomoću njega su generirani i podaci za $T^4_{2,(1,w)}$ (sl. 3.4). Budući da se ispisuju svi koraci potrebni za konstrukciju $\delta^4_{i,p,w}$, program koristi i (dvodimenzionalna) polja koja se mogu izbjeći, ako je potrebna samo matrica koja sadrži diskretne spline-ove.

```
      program KNOTINS
c
c     calculates nontrivial cubic gB-splines of order 4 at x
c     with prescribed jumps of first and second derivative
c
c     double precision declarations may be omitted since
c     the algorithm is very stable and is based on scalar
c     products of positive quantities only; variables declared
c     REAL*4 are for purposes of tabulating or graphing only
c
c     calls INTERV,SIMPDT (SIMPDB)
c
      double precision SCRATCH,X,PCOEF,
     +                 TAU4,XMEASURE_P,BIATX_GLO_IN,T4,DX,WCOEF,
     +                 PC,BIATX_REF,WC,BIATX_GLO_REF,DISCR,SUMA,
     +                 DUMMY1,DUMMY2,GAMMA_NORM
      dimension tau4(20),t4(60),biatx_ref(4),gamma_norm(10)
```

```
      dimension scratch(20,20),discr(20,20),biatx_glo_ref(20),
     +          biatx_glo_in(20)
      dimension pc(4),wc(4),pcoef(60),wcoef(60),xmeasure_p(60)
c
c     biatx_glo_in,
c     biatx_glo_ref...all (not only nonzero!) T-splines on
c                     initial and refined partition
c     biatx_ref.......all nontrivial T-splines on refined
c                     partition
c     xmeasure_p......vector conaining measures of subintervals
c                     of partition with respect to 1/p
c
c     dummy fields may be used to calculate derivatives of gB-splines
c
      dimension dummy1(4),dummy2(4)
c
c     tau4,t4.....initial and refined knot sequences;
c                 of dimension in_knots and iref_knots respectively
c
c     pc,wc ........coeff. sequences as described in Theorem
c     pcoef,wcoef...associated extended coef. sequences as in
c     subroutine SIMPDT
c     gamma_norm....some interesting normalization coeffs for
c                   discrete parabolic splines in Theorem
c     scratch,discr..two dim. arays used to store values off all
c                    discrete gB-splines of order 3 and 4 respectively
c
      data tau4  /4*0.d0,1.d0,2.d0,3.d0,4*4.d0,9*0.d0/
      data t4    /4*0.d0,2*1.d0,2*2.d0,2*3.d0,4*4.d0,46*0.d0/
      data pc /4*1.d0/
      data wc /4*1.d0/
      data in_knots /11/
      data iref_knots /14/
c
c     npoint......number of points used to tabulate T-splines
c
      data npoint /11/
c
c     generating the extended p_coef. and w_coef. vectors
c
      do, i=1,3
            pcoef(i)=1.d0
            wcoef(i)=1.d0
      enddo
      do, i=4,iref_knots-4,2
```

```
            pcoef(i)  =pc( (i-2)/2 )
            pcoef(i+1)=pc( (i-2)/2 )
            wcoef(i)  =wc( (i-2)/2 )
            wcoef(i+1)=wc( (i-2)/2 )
      enddo
      do, i=1,2
            pcoef(iref_knots-3+i)=1.d0
            wcoef(iref_knots-3+i)=1.d0
      enddo
      do, jot=1,20
          do, ka=1,20
              scratch(ka,jot)=0.d0
          enddo
      enddo
c
c     generating the matrix of all discrete gB-splines of order 3
c
      scratch(1,1)=0.d0
      scratch(2,2)=1.d0
      scratch(3,3)=1.d0
      scratch(4,3)= (tau4(6)-tau4(5))/wcoef(5) /
     +          ((tau4(5)-tau4(4))/wcoef(4)+(tau4(6)-tau4(5))/wcoef(5))
      do, jot=4,in_knots-5
          ka=2*jot-4
          scratch(ka ,jot)=(tau4(jot+1)-tau4(jot))/wcoef(jot) /
     +                      ( (tau4(jot+1)-tau4(jot))/wcoef(jot)+
     +                        (tau4(jot+2)-tau4(jot+1))/wcoef(jot+1) )
          scratch(ka+1,jot)=1.d0
          scratch(ka+2,jot)=(tau4(jot+3)-tau4(jot+2))/wcoef(jot+2) /
     +                      ( (tau4(jot+2)-tau4(jot+1))/wcoef(jot+1)+
     +                        (tau4(jot+3)-tau4(jot+2))/wcoef(jot+2) )
      enddo
      scratch(iref_knots-4,in_knots-4)=1.d0
      write(*,*)
      write(*,*) 'delta^3_w - DISCRETE POLYNOMIAL gB-SPLINES OF ORDER 3'
      write(*,*)
      do, ka=1,iref_knots-4
          write(*,'(7(f8.3,1x))' ) (scratch(ka,jot),jot=1,in_knots-4)
      enddo
c
c     calculating p-measures of subintervals
c
      do i=1,iref_knots-4
            suma=0.d0
            do, jot=1,3
```

```
                suma=suma+(t4(i+jot)-t4(i+jot-1))/pcoef(i+jot-1)
             enddo
             xmeasure_p(i)=suma
      enddo
c
c     calculating gamma matrix
c
      do, jot=1,in_knots-4
          do, ka=1,iref_knots-4
              scratch(ka,jot)=scratch(ka,jot)*xmeasure_p(ka)
          enddo
      enddo
c
c     calculating norms of gamma
c
      do, jot=1,in_knots-4
          suma=0.d0
          do, ka=1,iref_knots-4
              suma=suma+scratch(ka,jot)
          enddo
          gamma_norm(jot)=suma
      enddo
      write(*,*)
      write(*,*) ' gamma^3 - NORMALIZED DISCRETE POLYNOMIAL'
      write(*,*) '           gB-SPLINES OF ORDER 3'
      write(*,*)
      do, ka=1,iref_knots-4
          write(*,'(7(f7.3,1x))' ) (scratch(ka,jot),jot=1,in_knots-4)
      enddo
c
c     calculating all nontrivial discrete gB-splines of order 4
c
      do, jot=1,20
          do, ka=1,20
              discr(ka,jot)=0.d0
          enddo
      enddo
      discr(1,1)=1.d0
      discr(2,2)=(scratch(3,3)+scratch(4,3))/gamma_norm(3)
      discr(3,2)=scratch(4,3)/gamma_norm(3)
      do, jot=3,in_knots-5
          ka=2*jot-4
          discr(ka,jot)=scratch(ka,jot)/gamma_norm(jot)
          discr(ka+1,jot)=(scratch(ka,jot)+scratch(ka+1,jot))
     +                    /gamma_norm(jot)
```

```
          discr(ka+2,jot)=(scratch(ka+3,jot+1)+scratch(ka+4,jot+1))
     +                     /gamma_norm(jot+1)
          discr(ka+3,jot)  =scratch(ka+4,jot+1)/gamma_norm(jot+1)
      enddo
      discr(iref_knots-4,in_knots-4)=1.d0
      write(*,*)
      write(*,*) ' delta^4_(p,w) - DISCRETE gB-SPLINES OF ORDER 4'
      write(*,*)
      do, ka=1,iref_knots-4
          write(*,'(7(f7.3,1x))' ) (discr(ka,jot),jot=1,in_knots-4)
      enddo
c
c     calculating all nontrivial T^4_(x) for given x
c
      write(*,*) ' gT^4-SPLINES BY KNOT INSERTION ALGORITHM'
      write(*,*)
      dx=(tau4(in_knots)-tau4(1))/dble(npoint-1)
      do,  ii=0,npoint-2
           x=tau4(1)+dble(ii)*dx
           call interv(t4,iref_knots,x,left,mflag)
           call simpdt(t4,pcoef,4,x,left,biatx_ref,dummy1,dummy2)
           do, ka=1,iref_knots
                 biatx_glo_ref(ka)=0.d0
           enddo
           do, jot=1,4
                 biatx_glo_ref(jot+left-4)=biatx_ref(jot)
           enddo
c
c     Matrix  DISCR  know  contains  all  discrete gB-splines of
c     order 4; vector of all T-splines is evaluated according to:
c                             T
c            BIATX_GLO=DISCR * BIATX_GLO_REF
c
           do, i=1,in_knots-4
               suma=0.d0
                do, jot=1,iref_knots-4
                    suma=suma+discr(jot,i)*biatx_glo_ref(jot)
                enddo
                biatx_glo_in(i)=suma
           enddo
c
c     tabulating T^4 splines
c
           do, ipom=1,in_knots-4
               write(*,'(8f10.6)') x,(biatx_glo_in(ipom),ipom=1,7)
```

```
        enddo
    enddo
    end
```

Program ne definira T-spline-ove u točki $x = x_{k+1} = t_{k+5}$ slijedeći konvenciju o neprekidnosti s desna; to se lagano promijeni budući su u toj točki svi T-spline-ovi jednaki nuli, osim zadnjeg koji je jednak 1. Uz mrežu i koeficijente definirane DATA naredbama, program generira svih sedam polinomnih B-spline-ova:

```
delta^3_w - DISCRETE POLYNOMIAL gB-SPLINES OF ORDER 3

   .000     .000     .000     .000     .000     .000     .000
   .000    1.000     .000     .000     .000     .000     .000
   .000     .000    1.000     .000     .000     .000     .000
   .000     .000     .500     .500     .000     .000     .000
   .000     .000     .000    1.000     .000     .000     .000
   .000     .000     .000     .500     .500     .000     .000
   .000     .000     .000     .000    1.000     .000     .000
   .000     .000     .000     .000     .500     .500     .000
   .000     .000     .000     .000     .000    1.000     .000
   .000     .000     .000     .000     .000     .000    1.000

 gamma^3 - NORMALIZED DISCRETE POLYNOMIAL
           gB-SPLINES OF ORDER 3

  .000    .000    .000    .000    .000    .000    .000
  .000   1.000    .000    .000    .000    .000    .000
  .000    .000   1.000    .000    .000    .000    .000
  .000    .000   1.000   1.000    .000    .000    .000
  .000    .000    .000   1.000    .000    .000    .000
  .000    .000    .000   1.000   1.000    .000    .000
  .000    .000    .000    .000   1.000    .000    .000
  .000    .000    .000    .000   1.000   1.000    .000
  .000    .000    .000    .000    .000   1.000    .000
  .000    .000    .000    .000    .000    .000   1.000
             norms
  .000   1.000   2.000   3.000   3.000   2.000   1.000

 delta^4_(p,w) - DISCRETE gB-SPLINES OF ORDER 4

 1.000    .000    .000    .000    .000    .000    .000
  .000   1.000    .000    .000    .000    .000    .000
  .000    .500    .500    .000    .000    .000    .000
  .000    .000    .667    .333    .000    .000    .000
```

```
 .000    .000    .333    .667    .000    .000    .000
 .000    .000    .000    .667    .333    .000    .000
 .000    .000    .000    .333    .667    .000    .000
 .000    .000    .000    .000    .500    .500    .000
 .000    .000    .000    .000    .000   1.000    .000
 .000    .000    .000    .000    .000    .000   1.000

gT^4-SPLINES BY KNOT INSERTION ALGORITHM

 .00  1.000000   .000000   .000000   .000000   .000000   .000000   .000000
 .40   .216000   .592000   .181333   .010667   .000000   .000000   .000000
 .80   .008000   .416000   .490667   .085333   .000000   .000000   .000000
1.20   .000000   .128000   .588000   .282667   .001333   .000000   .000000
1.60   .000000   .016000   .409333   .538667   .036000   .000000   .000000
2.00   .000000   .000000   .166667   .666667   .166667   .000000   .000000
2.40   .000000   .000000   .036000   .538667   .409333   .016000   .000000
2.80   .000000   .000000   .001333   .282667   .588000   .128000   .000000
3.20   .000000   .000000   .000000   .085333   .490667   .416000   .008000
3.60   .000000   .000000   .000000   .010667   .181333   .592000   .216000
```

Program `KNOTINS` računa sve (pa i trivijalne) diskretne spline-ove koji su vezani uz g-spline-ove na intervalu $[0,4]$ zbog čega je prvi stupac matrice diskretnih spline-ova reda 3 uvijek nul-vektor. Specijalna struktura matrice $[\gamma_j^3(i)]$ posljedica je ekvidistantnosti mreže, što se lagano dokaže na osnovu (3.15) i (3.25). Iste rezultate daje i klasična rekurzija [11] i `SUBROUTINE KNOTINS` (v. DODATAK 1.)

Zamijenimo li `DATA` naredbe za koeficijente p i w s

```
data pc /1.d0,2.d0,5.d0,1.d0/
data wc /4*1.d0/
```

Dobivamo podatke kojima je generirana slika 3.4:

```
gamma^3 - NORMALIZED DISCRETE POLYNOMIAL
          gB-SPLINES OF ORDER 3

 .000    .000    .000    .000    .000    .000    .000
 .000   1.000    .000    .000    .000    .000    .000
 .000    .000   1.000    .000    .000    .000    .000
 .000    .000    .750    .750    .000    .000    .000
 .000    .000    .000    .500    .000    .000    .000
 .000    .000    .000    .350    .350    .000    .000
 .000    .000    .000    .000    .200    .000    .000
```

```
 .000    .000    .000    .000    .600    .600    .000
 .000    .000    .000    .000    .000   1.000    .000
 .000    .000    .000    .000    .000    .000   1.000
            norms
 .000   1.000   1.750   1.600   1.150   1.600   1.000

delta^4_(p,w) - DISCRETE gB-SPLINES OF ORDER 4

1.000    .000    .000    .000    .000    .000    .000
 .000   1.000    .000    .000    .000    .000    .000
 .000    .429    .571    .000    .000    .000    .000
 .000    .000    .531    .469    .000    .000    .000
 .000    .000    .219    .781    .000    .000    .000
 .000    .000    .000    .696    .304    .000    .000
 .000    .000    .000    .522    .478    .000    .000
 .000    .000    .000    .000    .625    .375    .000
 .000    .000    .000    .000    .000   1.000    .000
 .000    .000    .000    .000    .000    .000   1.000

 gT^4-SPLINES BY KNOT INSERTION ALGORITHM

 .00  1.000000   .000000   .000000   .000000   .000000   .000000   .000000
 .40   .216000   .564571   .199429   .020000   .000000   .000000   .000000
 .80   .008000   .333714   .498286   .160000   .000000   .000000   .000000
1.20   .000000   .073143   .504357   .420761   .001739   .000000   .000000
1.60   .000000   .009143   .295857   .648043   .046957   .000000   .000000
2.00   .000000   .000000   .062500   .720109   .217391   .000000   .000000
2.40   .000000   .000000   .013500   .634152   .348348   .004000   .000000
2.80   .000000   .000000   .000500   .495500   .472000   .032000   .000000
3.20   .000000   .000000   .000000   .222609   .497391   .272000   .008000
3.60   .000000   .000000   .000000   .027826   .212174   .544000   .216000
```

Matrica diskretnih spline-ova $T^3_{i,w}$ ne mora se ponovo računati jer je uvijek ista, što omogućuje brže generiranje funkcija baze u primjenama kod kojih se koeficijenti određuju računski iz dodatnih uvjeta (`MONCON`–spline, [17]).

4. Primjena na rješavanje rubnih problema

4.1 Kolokacija singularnim spline funkcijama

Kada postoji rješenje u rubnog problema $(pu')' - qu = f$, gdje koeficijent p može biti i nula na granicama intervala, može ga se aproksimirati funkcijama koje su po dijelovima u $\mathrm{Ker}(D^k DpD)$. Ove funkcije su posebni slučaj Čebiševljevih spline funkcija sa jednom netrivijalnom težinom koje smo razmatrali prije u glavama o Čebiševljevim sistemima i splineovima, a također se pojavljuju i kao poseban slučaj *singularnih spline-ova* koje razmatra Jerome [20]. Naš cilj je da pokažemo upotrebu Čebiševljevih spline funkcija i naročito lokalnih baza u kolokacionim metodama za rješavanje singularnih linearnih i nelinearnih rubnih problema. Pri tome naglasak leži na izboru CCT-prostora i pridruženim svojstvima tih prostora više nego na analizi metode kolokacije kao jedne od mogućih projekcionih metoda. Polazeći od takvog pristupa, prvi korak je zapis metode u formi koja omogućuje pristup preko funkcionalne analize i korištenje poznatih rezulatata o sličnim projektorima kakve razmatra deBoor u slučaju polinomne spline kolokacije [5](v.također [55], [7]). Konvergencija metode dokazuje se već dosta ustaljenim putevima koji odlikuje metode projekcije, kao što je to prikazano u knjizi Chatelin-ove [3] ili u preglednom članku Reddien-a [41] na slučaju regularnih rubnih problema. Među važnim radovima oslanjali smo se i na one u kojima se razmatraju numeričke metode za nelinearne rubne probleme za opće jednadžbe n-tog reda kao što su to [25] (kolokacija) i [15] (varijacione metode).

U daljnjem ćemo primijeniti takve i slične tehnike na jednu klasu singularnih problema, za koje se može formulirati rubni problem s uvjetima na funkciju i/ili derivaciju u rubnim točkama. Generalizacija kolokacionih metoda na singularne rubne probleme nije nova, štoviše, postoje mnogobrojni radovi iz tog područa, kao i druge metode, od kojih su neke mogu apstraktno formulirati kao projekcione (kolokacija ([9], [15]), metoda momenata, najmanji kvadrati), neke samo djelimično (varijacione metode [49], [32], [31]), dok neke to nisu (metode konačnih diferencija [19], [8]). Neke metode konačnih diferencija mogu se interpretirati kao kolokacione ([16]). U trenutku pisanja ovog rada nije poznato da li je neka metoda bitno superiornija od druge, već se čini da to ovisi o glatkoći rješenja, tipu singulariteta, redu jednadžbe i drugom. Čebiševljevi spline-ovi razmatrani u prethodnim glavama pokazuju se naročito prikladnim za kolokaciju kod singularnih rubnih problema u kojima vodeći koeficijent ima nulu beskonačnog reda, te se ponaša npr. kao x^k, $0 < k < 1$. Numeričke metode tipa konačnih diferencija za takve probleme prvi je razmatrao Jamet [19]. Russell i Shampine [46] razmatraju probleme tipa

$$u''(x) + \frac{k}{x}u'(x) + f(x, u(x)) = 0 \qquad 0 < x < b \tag{4.1}$$

koje potiču od Dirichlet-ovih problema za Laplace-ovu jednadžbu oblika

$$\Delta u(P) = f(P, u(P)).$$

Kod separacije varijabli u ravninskim, cilindričnim ili sfernim koordinatama dobije se $k = 0, 1$ ili 2 respektivno. Pri tom su rubni uvjeti najčešće oblika $u'(0) = 0$ ili $u(0) < \infty$, uz rubni uvjet u desnom kraju tipa $u(b) = \text{const}$.

U daljnjem ćemo se ograničiti na klasu problema za koje singularni problem s rubnim uvjetima u dvije točke ima smisla, a koja je u literaturi najrjeđe zastupljena. Takvi problemi prirodno se pojavljuju kod separacije varijabli za Laplace-ovu jedndžbu u specijalnim geometrijama, naročito u teoriji aksijalno simetričnih potencijala [34]. Tako npr. modelni rubni problem

$$(\sqrt{x}u')' - \sqrt{x}u = 0 \qquad u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \tag{4.2}$$

ne spada u klasu problema (4.1), jer je nakon transformacije jednadžba oblika

$$u'' + \frac{1}{2x}u' - u = 0, \tag{4.3}$$

pa bi u (4.1) bilo $k = \frac{1}{2}$. Niti se numeričke tehnike razvijene u [46] ne mogu jednostavno prenijeti, jer rješenje u nuli nema ograničenu[1]derivaciju. Zaista, jednadžba je Fuchs-ovog tipa, i rješenje je oblika $\varphi(x) + \sqrt{x}\psi(x)$, gdje su φ i ψ analitičke funkcije. Supstitucija redova vodi na

$$u(x) = 1 + \frac{2x^2}{2\cdot 3} + \frac{4x^4}{(4\cdot 2)(7\cdot 3)} + \cdots + \mathrm{c}(\sqrt{x} + \frac{2x^{5/2}}{2\cdot 5} + \frac{4x^{9/2}}{(4\cdot 2)(9\cdot 5)} + \cdots) \tag{4.4}$$

$$= 1 + \mathrm{c}\sqrt{x} + \frac{x^2}{3} + \cdots \tag{4.5}$$

gdje je c konstanta koja se može eksplicitno izračunati (v. Dodatak). Ekvivalentnost diferentnih i kolokacionih metoda primijenjenih na jednadžbu oblika

$$u''(x) + \frac{\kappa}{x}u'(x) - q(x)u = f(x) \tag{4.6}$$

[1]Derivacija ne pripada niti prostoru $L^2(0,1)$, tj. $u \notin H_2^1(0,1)$

razmatra Doedel [16] bez eksplicitnog korištenja Čebiševljevih spline-ova, a najbliža metoda našoj može se naći u radovima Reddien-a [39], te Reddien-a i Schumaker-a [40], s tim da su naši projektori definirani tako, da poprimaju vrijednost u prostorima *lokalnih* T-spline-ova. Takav pristup omogućuje razmatranje superkonvergencije u čvorovima.

Za početak, formulirajmo metodu kolokacije u slučaju elementarnog rubnog problema:

$$\begin{array}{l} D(p(t)Dx(t)) = f(t) \;\; t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = 0 \end{array} \tag{4.7}$$

gdje je $p \in C[0,1] \bigcap C^1(0,1]$, $\frac{1}{p} \in L^1[0,1]$ i $f \in C^2[0,1]$, dakle $DpDx \in C^2[0,1]$. Kolokaciono rješenje je funkcija x_Δ za koju je $x_\Delta \in \mathrm{Ker}(DDDpD)$ za svaki $x \in (x_i, x_{i+1})$, i koja zadovoljava (4.7) u dvije *točke kolokacije* po intervalu, i za koju su ispunjeni uvjeti "lijepljenja":

$$\begin{aligned} x_\Delta(x_i+) &= x_\Delta(x_i-) \\ (p(x)D)x_\Delta(x)\mid_{x=x_i+} &= (p(x)D)x_\Delta(x)\mid_{x=x_i-} . \end{aligned}$$

Koristeći terminologiju i oznake iz prethodnih poglavlja, kolokaciono rješenje je funkcija $x_\Delta \in \mathcal{S}(4, \boldsymbol{m}, p, \Delta)$, gdje je $\mathcal{S}(4,p)$ Čebiševljev sistem s jednom težinom, $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ kao u (2.2) i $\boldsymbol{m} = (n_i)^T$, $n_i = 2$ za svaki i. Neka je $L_2 = L_{2,p}$ kao u (1.9). Uvjeti kolokacije su:

$$\begin{array}{ll} L_2 x_\Delta(\tau_{j+i}) = f(\tau_{i+j}) & i = 1,2 \quad j = 0, \dots n \\ x_\Delta(0) = 0, \quad x_\Delta(1) = 0, & \end{array} \tag{4.8}$$

gdje za točke kolokacije vrijedi $x_j < \tau_{i+j} < x_{j+1}$ (v. (4.19)). Neka je $y_\Delta := L_2 x_\Delta$ i $y := L_2 x$. Tada je $y \in C^2[0,1]$ i $y_\Delta \in \mathcal{P}(2, \tilde{\boldsymbol{m}}, \Delta)$, $\tilde{\boldsymbol{m}} = (\tilde{n}_i)^T$, $\tilde{n}_i = 4$ (teorem 1.4.1) tj. y_Δ je isprekidana linija, linearni spline za kojeg nema uvjeta lijepljenja u čvorovima.

Neka je $H_0(s,u)$ Green-ova funkcija diferencijanog operatora DpD (v. [30]) uz homogene rubne uvjete. Tada je

$$(x - x_\Delta)(s) = \int_0^1 H_0(s,u)(y - y_\Delta)(u)du. \tag{4.9}$$

Označimo li s $d\sigma$ mjeru s gustoćom $\frac{1}{p}$, Green-ovu funkciju $H_0(s,u)$ možemo jednostavno zapisati:

$$H_0(s,u) = \begin{cases} \frac{\int_1^u d\sigma}{\int_0^1 d\sigma} \int_0^s d\sigma \;\; s < u \\ \\ \frac{\int_0^u d\sigma}{\int_0^1 d\sigma} \int_1^s d\sigma \;\; s \geq u \end{cases} . \tag{4.10}$$

Ako je $H_1(s,u)$ prva generalizirana derivacija Green-ove funkcije po s, $H_1(s,u) = L_1 H_0(s,u)$, tada je očito:

$$H_1(s,u) = \begin{cases} \frac{\int_1^u d\sigma}{\int_0^1 d\sigma} & s < u \\ \\ \frac{\int_0^u d\sigma}{\int_0^1 d\sigma} & s \geq u \end{cases} . \tag{4.11}$$

Budući da je za fiksirano s $| H_0(s,u) | \leq 1$ i $| H_1(s,u) | \leq 1$ za svako $u \in [0,1]$, slijedi:

$$\begin{aligned} | (x - x_\Delta)(s) | &\leq \|y - y_\Delta\|_\infty, \\ | L_1(x - x_\Delta)(s) | &\leq \|y - y_\Delta\|_\infty, \end{aligned}$$

gdje je $\| \ \|_\infty$ max-norma u $C[0,1]$. Ako je $| \delta | := \max_i | x_{i+1} - x_i |$, tada pretpostavke glatkoće za y i činjenica da je y_Δ linearni spline povlače:

$$| (x - x_\Delta)(s) | \leq \frac{1}{8} | \delta |^2 \tag{4.12}$$

$$| L_1(x - x_\Delta)(s) | \leq \frac{1}{8} | \delta |^2 . \tag{4.13}$$

U lemi 4.1.1 pokazat ćemo, da se kolokacione točke mogu tako izabrati, da vrijedi:

$$(y - y_\Delta)(u) \perp \mathrm{L}\{1, \int^u d\sigma\} \qquad \text{u } L^2(x_j, x_{j+1}). \tag{4.14}$$

Ovakav izbor točaka kolokacije povlači, da za svako $s \in (x_i, x_{i+1})$ vrijedi:

$$(x - x_\Delta)(s) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (H_0(s,u) - H_0(s,s))(y - y_\Delta)(u) du .$$

Neka je $| d\sigma(\delta) | := \max_i | \int_{x_i}^{x_{i+1}} d\sigma |$. Kako je

$$| H_0(s,u) - H_0(s,s) | = \begin{cases} \frac{|\int_0^s d\sigma| |\int_s^u d\sigma|}{|\int_0^1 d\sigma|} & u > s \\ \\ \frac{|\int_1^s d\sigma| |\int_u^s d\sigma|}{|\int_0^1 d\sigma|} & u < s \end{cases}$$

i stoga

$$| H_0(s,u) - H_0(s,s) | \leq | \sigma(u) - \sigma(s) | \leq | d\sigma(\delta) | ,$$

zaključujemo da je:

$$| (x - x_\Delta) | \leq | \delta || d\sigma(\delta) | \, \|y - y_\Delta\|_\infty .$$

Za $f \in C^2[0,1]$ je dakle

$$| x - x_\Delta | \leq \frac{1}{8} \cdot | \delta |^3 | d\sigma(\delta) | \tag{4.15}$$

Na isti način je

$$| L_1(x - x_\Delta) | \leq \int_{x_i}^{x_{i+1}} | y - y_\Delta | du \leq \frac{1}{8} | \delta |^3 .$$

U čvorovima dolazi do "superkonvergencije": $(x - x_\Delta)(x_i) = L_1(x - x_\Delta)(x_i) = 0$, pa ćemo kolokacione točke odabrane kao u 4.14 zvati *optimalne točke kolokacije.* Lema 4.1.1 dokazuje egzistenciju optimalnih točaka.

LEMA **4.1.1** *Neka je* $u \in C[a,b]$ *monotona za* $t \in (a,b)$*, i* $u(t) \neq \text{const}$. *Tada polinom* $Q(t)$ *stupnja* ≥ 2 *koji zadovoljava:*

$$\int_a^b Q(t)dt = 0$$
$$\int_a^b Q(t)u(t)dt = 0,$$

ima bar dvije nule $t_1, t_2 \in (a,b)$.

DOKAZ: Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti, da je u rastuća i $Q(a) > 0$. Kako je $\int_a^b Q(t)dt = 0$, postoji $t_1 \in (a,b)$ takav, da je $Q(t_1) = 0$. Da $Q(t)$ nema drugih nula u (a,b), bilo bi: $\int_a^b Q(t)u(t)dt = \int_a^{t_1} Q(t)u(t)dt + \int_{t_1}^b Q(t)u(t)dt = u(t_1)\int_\xi^{t_1} Q(t)dt + \int_{t_1}^b Q(t)u(t)dt$ za neki $\xi \in (a,t_1)$, po varijanti teorema srednje vrijednosti. Stoga je $\int_a^b Q(t)u(t)dt \leq u(t_1)\int_\xi^{t_1} Q(t)dt + u(b)\int_{t_1}^b Q(t)dt \leq u(b)(\int_\xi^b Q(t)dt) = u(b)(-\int_a^\xi Q(t)dt) < 0$, što je suprotno pretpostavci. ∎

Lemu 4.1.1 uz $u(t) = \int^t d\sigma$ može se dokazati i konstruktivno; dokaz je nešto dulji ali više govori o razmještaju optimalnih točaka. Bez ograničenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\sigma(t)$ monotono rastuća (ne nužno strogo). Neka je $a = 0$, $b = 1$. Tražimo li ortogonalnost parabole $t^2 + \beta t + \alpha$ na $L\{1, \int d\sigma\}$ dolazimo na linearni sistem

$$\alpha + \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{3} \tag{4.16}$$

$$\alpha \int_0^1 \sigma(t)dt + \beta \int_0^1 t\sigma(t)dt = -\int_0^1 t^2\sigma(t)dt. \tag{4.17}$$

Rješenje α i β su

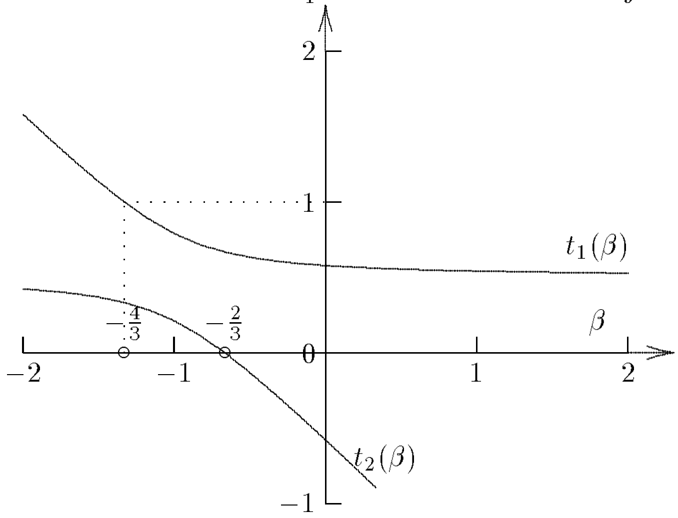
$$\beta = -\frac{\int_0^1 \sigma(t)(t^2 - \frac{1}{3})dt}{\int_0^1 \sigma(t)(t - \frac{1}{2})dt}$$
$$\alpha = -\frac{1}{3} - \frac{\beta}{2}.$$

Nazivnik u β je uvijek pozitivan, jer prema varijanti teorema srednje vrijednosti (Bonnet-ov teorem) postoji $\xi \in (0,1)$ za koji vrijedi:

$$\int_0^1 \sigma(t)(t-\frac{1}{2})dt = \sigma(1)\int_\xi^1 (t-\frac{1}{2})dt = \sigma(1)[\frac{t^2}{2}-\frac{t}{2}]_\xi^1 = \frac{\sigma(1)}{2}(\xi(1-\xi)) > 0.$$

Kako je diskriminanta $D := \beta^2 - 4\alpha = \beta^2 + 2\beta + \frac{4}{3} = (\beta+1)^2 + \frac{1}{3} > 0$, polinom ima uvijek dvije realne nule $t_{1,2}$, od kojih je jedna sigurno u $(0,1)$ (sl. 4.1). Kako je

Slika 4.1 Optimalne točke kolokacije u ovisnosti o parametru



$$t_1 = \frac{-\beta+\sqrt{D}}{2}$$
$$t_2 = \frac{-\beta-\sqrt{D}}{2}$$

da bi obje nule bile sadržane u $(0,1)$ mora biti $-\frac{4}{3} < \beta < -\frac{2}{3}$, odnosno

$$\frac{2}{3} < \frac{\int_0^1 \sigma(t)(t^2-\frac{1}{3})dt}{\int_0^1 \sigma(t)(t-\frac{1}{2})dt} < \frac{4}{3}.$$

Pokažimo prvo da je

$$\frac{\int_0^1 \sigma(t)(t^2-\frac{1}{3})dt}{\int_0^1 \sigma(t)(t-\frac{1}{2})dt} - \frac{2}{3} = \frac{3\int_0^1 \sigma(t)(t^2-\frac{1}{3})dt - 2\int_0^1 \sigma(t)(t-\frac{1}{2})dt}{3\int_0^1 \sigma(t)(t-\frac{1}{2})dt} > 0.$$

Znamo da je nazivnik pozitivan, dok za brojnik imamo

$$3\int_0^1 \sigma(t)t(t-\frac{2}{3})dt = \int_0^{1/3}(\cdots) + \int_{1/3}^{2/3}(\cdots) + \int_{2/3}^1(\cdots),$$

što je zbog monotonosti funkcije σ

$$> \sigma(0)(-\frac{2}{81}) + \sigma(\frac{1}{3})(-\frac{2}{81}) + \sigma(\frac{2}{3})(\frac{4}{81}) =$$

$$\frac{2}{81}[\sigma(\frac{2}{3}) - \sigma(\frac{1}{3}) + \sigma(\frac{2}{3}) - \sigma(0) > 0.$$

Treba još pokazati da je

$$\frac{\int_0^1 \sigma(t)(t^2 - \frac{1}{3})dt}{\int_0^1 \sigma(t)(t - \frac{1}{2})dt} - \frac{4}{3} < 0.$$

Kako je

$$\frac{\int_0^1 \sigma(t)(t^2 - \frac{1}{3})dt}{\int_0^1 \sigma(t)(t - \frac{1}{2})dt} - \frac{4}{3} = \frac{\int_0^1 \sigma(t)(t - \frac{1}{3})(t-1)dt}{\int_0^1 \sigma(t)(t - \frac{1}{2})dt},$$

i nazivnik pozitivan, to treba samo vidjeti da je $\int_0^1 \sigma(t)(t - \frac{1}{3})(t-1)dt < 0$. Slično kao i prije, monotonost funkcije σ povlači

$$\int_0^1 \sigma(t)(t - \frac{1}{2})dt = \int_0^{1/3}(\cdots) + \int_{1/3}^1(\cdots) < \frac{4}{81}[\sigma(\frac{1}{3}) - \sigma(1)] < 0.$$

PRIMJER **4.1.1** *Neka je $p(t) = t^\kappa$, $0 \le \kappa < 1$. Tada je $\frac{1}{p} \in L^1[0,1]$ i $\sigma(t) = \int_0^t \frac{dx}{p(x)}$ proporcionalna s $t^{1-\kappa}$. Relacije (4.16) povlače*

$$\alpha = \frac{2-\kappa}{3(4-\kappa)}, \qquad \beta = -\frac{4}{3}(\frac{3-\kappa}{4-\kappa})$$

odakle slijede optimalne točke kolokacije:

$$t_{1,2} = \frac{1}{3(4-\kappa)}\left[2(3-\kappa) \pm \sqrt{(3-\kappa)^2+3}\right]$$

Za $\kappa = 0$ je $\sigma(t) = 1$ pa su $t_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ nule Legendreovog polinoma stupnja 2 translatiranog na $(0,1)$ (Gauss-ove točke).

Naš cilj je da dokažemo da slični zaključci vrijede i za singularni rubni problem

$$\begin{array}{l} D(p(t)Dx(t) - q(t)x(t) = f(t) \;\; t \in (0,1) \\ x(0) = \alpha \qquad x(1) = \beta \end{array} \tag{4.18}$$

uz odgovarajuće uvjete na operator $DpD - q$.

TEOREM **4.1.1** *Neka je $p \in C[0,1] \bigcap C^1(0,1]$, $\frac{1}{p} \in L^1[0,1]$, $p'(t) \to +\infty$ za $t \to 0$ i $q(t) \geq 0$, $q \in C[0,1]$. Ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $\frac{p'(t)}{p(t)} < \frac{\kappa}{t}$, $\frac{q(t)}{p(t)} \leq C$ za svaki $t \in (0,\varepsilon)$ i neko $0 < \kappa < 1$, $C > 0$, tada rubni problem (4.18) ima jedinstveno rješenje, i vrijedi*

$$\mid p'(t) \textstyle\int_0^t d\sigma \mid \leq \frac{\kappa}{1-\kappa}, \qquad \mid p(t) \int_0^t d\sigma \mid \leq \frac{t}{1-\kappa}$$

za svaki $t \in (0,\varepsilon)$.

DOKAZ: Ezgistencija i jedinstvenost slijede iz [19, str.358]. Neka je $g(t) := p'(t) \int_0^t \frac{du}{p(u)}$. Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$g(t) = p'(t)[\frac{t}{p(t)} + \int_0^t \frac{up'(u)du}{p^2(u)}]$$

budući da je $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{u}{p(u)} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{1}{p'(u)} = 0$. Prema pretpostavci je dakle:

$$\begin{aligned} g(t) &\leq p'(t)[\frac{t}{p(t)} + \kappa \int_0^t \frac{du}{p(u)}] \\ &\leq \kappa + \kappa p'(t) \int_0^t \frac{du}{p(u)} = \kappa(1+g(t)) \end{aligned}$$

pa je $g(t) \leq \dfrac{\kappa}{1-\kappa}$. Druga nejednakost dokazuje se na isti način. ∎

Ocjena (4.1.1) je najbolja moguća. Zaista, ako je $p(t) = t^k$ za neko $0 < k < 1$, tada su svi uvjeti teorema 4.1.1 ispunjeni. Kako je $\frac{p'(t)}{p(t)} = \frac{k}{t}$, slijedi $\kappa = k$, i jednostavnim računom $g(t) = \frac{k}{1-k}$.

Sada se mogu formulirati različite projektivne metode i pripadni aproksimirajući potprostori; mi ćemo se odlučiti za jedan od mogućih izbora koji je motiviran razmatranjima u slučaju $q \equiv 0$.

Neka je $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{n+1}$ (2.2) mreža čvorova na $[0,1]$ i neka je zadano k točaka $\{\rho_i\}_1^k$ tako da vrijedi:

$$-1 \leq \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_k \leq 1. \tag{4.19}$$

Pomoću njih definiramo *točke kolokacije* $\{\tau_i\}_1^{k(n+1)}$:

$$\tau_{kj+i} = \begin{cases} x_j & \rho_i = -1 \\ (x_j + x_{j+1} + \rho_i(x_{j+1} - x_j) & -1 < \rho_i < 1 \\ x_{j+1} & \rho_i = 1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots k \\ j = 0, \ldots n. \end{array}$$

Neka je $\boldsymbol{m} = (k, \ldots k)^T$ vektor multipliciteta za prostor Čebiševljevih spline funkcija $\mathcal{S}(2+k, \boldsymbol{m}, p, \Delta)$ s jednom težinom. CCT-sistem $\mathcal{S}(2+k, p)$ je dobro definiran zbog pretpostavki na koeficijent p u (4.18). Spline $x_\Delta \in \mathcal{S}(2+k, p, \boldsymbol{m}, \Delta)$ je aproksimativno rješenje problema (4.18) ako za njega vrijedi

$$\begin{array}{ll} L_2 x_\Delta(\tau_i) - q(\tau_i) x_\Delta(\tau_i) & = f(\tau_i) \quad i = 1, \dots (k+1)n \\ x_\Delta(0) = \alpha \qquad x_\Delta(1) = \beta. & \end{array} \tag{4.20}$$

Neka je

$$X := \{g : \sup_{t \in [0,1]} \mid L_2 g(t) \mid < \infty\}.$$

Uz normu

$$\parallel g \parallel_X := \max\{\parallel g \parallel_\infty, \parallel L_1 g \parallel_\infty, \parallel L_2 g \parallel_\infty\}$$

X je Banachov prostor. Definiramo li

$$(P_0 g)(t) \; := \; g(0) + (g(1) - g(0)) \frac{\int_0^t d\sigma}{\int_0^1 d\sigma},$$

tada se svaki $g \in X$ može se na jedinstven način reprezentirati kao

$$g(t) \; = \; (P_0 g)(t) + \int_0^1 H_0(t, u) L_2 g(u) du,$$

gdje je $H_0(t, u)$ Green-ova funkcija homogenog problema kao u (4.10). Zaista, $P_0 g \in \mathrm{Ker}(L_2)$ i $g - P_0 g$ zadovoljava homogene rubne uvjete, a jedinstveno rješenje problema $L_2 x = L_2 g$ uz homogene rubne uvjete je funkcija $x = \int_0^1 H_0(t, u) L_2 g(u) du$. Pretpostavimo li da je

$$q(t) \int_0^t d\sigma \; \in \; C[0, 1], \tag{4.21}$$

tada možemo homogenizirati su rubne uvjete u (4.18); zaista, funkcija $w = x - P_0 x$ zadovoljava

$$L_2 w = q w + \tilde{f}, \qquad w(0) = w(1) = 0$$

pri čemu je $\tilde{f} = q P_0 x + f \in C[0, 1]$ zbog (4.21).

LEMA **4.1.2** *Neka je $D(L_2) := \{x \in X : x(0) = x(1) = 0\}$. Operator $L_2^{-1} : X \to D(L_2)$ je ograničen. Ako $q \geq 0$ zadovoljava uvjet (4.21), tada je $q L_2^{-1} : X \to D(L_2)$ kompaktan.*

DOKAZ: Ako $x \in X$ zadovoljava homogene rubne uvjete, parcijalnom integracijom dobivamo

$$< L_2 x, x >_{L_2} \; = \; \int_0^1 p(t) (x'(t))^2 dt.$$

Kako $p(t)$ ima nulu samo u $t = 0$, slijedi

$$x(t) = -\int_t^1 x'(s)ds = -\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{p(s)}}\sqrt{p(s)}x'(s)ds$$

pa je prema Schwartz-ovoj nejednakosti

$$\mid x(t) \mid^2 \leq \int_0^1 d\sigma \int_0^1 p(s)(x'(s))^2 ds = \int_0^1 d\sigma < L_2 x, x >_{L^2} .$$

Zaključujemo da je L_2 injektivan, jer $L_2 x = 0 \Rightarrow x = 0$. Ako za $f \in C[0,1]$ definiramo

$$x(t) = \int_x^1 d\sigma(t) \int_0^t f(s)dsdt - \frac{1}{\int_0^1 d\sigma(t)} \int_x^1 d\sigma(t) \int_0^1 d\sigma(t) \int_0^1 f(s)dsdt$$

vidi se da je $x \in X$ i $L_2 x = f$, pa je $L_2 : D(L_2) \to C[0,1]$ bijekcija. Iz (4.10) i (4.11) vidimo da je L_2^{-1} ograničen; štoviše za $f \in C[0,1]$ je

$$\| L_2^{-1} f \|_X \leq \| f \|_\infty .$$

zbog $H_0 \leq 1$,$H_1 \leq 1$.

$qL_2^{-1} : C[0,1] \to C[0,1]$, $qL_2^{-1}f(t) := \int_0^1 k_t(s)f(s)ds$ je integralni operator s jezgrom

$$k_t(s) : = \frac{1}{\int_0^1 d\sigma} \begin{cases} q(t)\int_1^t d\sigma \int_0^s d\sigma & s < t \\ q(t)\int_0^t d\sigma \int_1^s d\sigma & s \geq t. \end{cases}$$

Prema pretpostavci na $q(t)$ jezgra $k_t(s)$ je neprekidna na $[0,1] \times [0,1]$ što je dovoljan uvjet za kompaktnost [18]. $\blacksquare$

Neka je Q linearni interpolacioni projektor na $C[-1,1] \to L(\mathcal{P}(k))$ određen točkama interpolacije (4.19), i neka su

$$T_i : C[x_{i-1}, x_i] \to C[-1,1], \qquad i = 1, \ldots n+1$$

linearna prelikavanja definirana s

$$(T_i g)(t) := g(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} + t\frac{x_i - x_{i-1}}{2}).$$

Pomoću Q i T_i možemo definirati linearni projektor $Q_n : C_\Delta \to \mathcal{P}(k, \boldsymbol{m}, \Delta)$:

$$\begin{aligned} (Q_n f) \mid_{[x_{i-1},x_i)} &:= T_i^{-1} Q T_i f \mid_{[x_{i-1},x_i)} \qquad i = 1, \ldots n \\ (Q_n f) \mid_{[x_n,x_{n+1}]} &:= T_n^{-1} Q T_n f \mid_{[x_n,x_{n+1}]} . \end{aligned}$$

Vektor multipliciteta $\boldsymbol{m} = (k, \ldots k)^T$, pa prostor $\mathcal{P}(k, \boldsymbol{m}, \Delta)$ čine po dijelovima polinomne funkcije.

Prostor C_Δ je Banachov prostor s uobičajenom normom

$$\| f \|_\infty := \sup_t | f(t) | = \max_{0 \le i \le n} \| f |_{[x_i, x_{i+1}]} \|_\infty$$

Kako je T_i izometrija prostora $C[x_i, x_{i+1}]$ i $C[-1, 1]$, vrijedi

$$\| Q_n \| = \| Q \| . \tag{4.22}$$

Problem (4.18) uz homogene rubne uvjete možemo sada napisati ekvivalentno:

$$(1 - qL_2^{-1})y = f \qquad y \in C[0, 1]. \tag{4.23}$$

Za nehomogene rubne uvjete možemo zamijeniti f s $\tilde{f}$. Rješenja (4.18) i (4.23) vezana su relacijama $y = L_2 x$, $x = P_0 x + \int_0^1 H_0(\cdot, s) y(s) ds$. Promatramo li qL_2^{-1} kao operator definiran na C_Δ, aproksimativni problem možemo i ovako formulirati:

$$(1 - Q_n q L_2^{-1}) y_\Delta = Q_n f, \qquad y_\Delta \in C_\Delta. \tag{4.24}$$

TEOREM **4.1.2** *Neka p i q zadovoljavaju uvjete teorema 4.1 i neka q zadovoljava (4.21). Ako je $Q_n : C_\Delta \to \mathcal{P}(k, \boldsymbol{m}, \Delta)$ niz interpolacionih projektora takav da $Q_n \to 1$, tada je za dovoljno veliko n preslikavanje*

$$P_n := (1 - Q_n q L_2^{-1})^{-1} Q_n (1 - Q_n q L_2^{-1})$$

projektor $C_\Delta \to \mathcal{P}(k, \boldsymbol{m}, \Delta)$, i vrijedi

$$y - y_\Delta = (1 - P_n) y,$$

odakle slijedi

$$\| y - y_\Delta \|_\infty \le \text{const.dist}(y, \mathcal{P}(k, \boldsymbol{m}, \Delta)).$$

DOKAZ: Operator $(1 + qL_2^{-1})^{-1}$ postoji (teorem 4.1.1), a kako je qL_2^{-1} kompaktan (lema 4.1.2), to je $(1 + qL_2^{-1})^{-1}$ ograničen. Nadalje,

$$\| Q_n q L_2^{-1} - qL_2^{-1} \| = \| (Q_n - 1) q L_2^{-1} \| \le \| Q_n - 1 \| \cdot \| qL_2^{-1} \| \to 0$$

budući da $Q_n \to 1$. Kako je

$$1 + Q_n q L_2^{-1} = 1 + qL_2^{-1} + (Q_n q L_2^{-1} - qL_2^{-1})$$

operator $1 + Q_n q L_2^{-1}$ je "blizu" regularnog operatora $1 + qL_2^{-1}$, tj. $1 + Q_n q L_2^{-1}$ postoji, i za dovoljno veliko n je

$$\| (1 + Q_n q L_2^{-1})^{-1} \| < \infty.$$

Iz jednadžbe $(1 + qL_2^{-1})y = f$ djelovanjem Q_n dobivamo

$$Q_n y + Q_n q L_2^{-1} y = Q_n f, \tag{4.25}$$

dok numerička metoda glasi

$$Q_n(y_\Delta + qL_2^{-1} y_\Delta) = Q_n f. \tag{4.26}$$

Oduzimanjem (4.25) i (4.26) izlazi

$$Q_n y + Q_n q L_2^{-1} y - Q_n y_\Delta - Q_n q L_2^{-1} y_\Delta = 0.$$

Dodamo li na obje strane funkciju y i iskoristimo li činjenicu da je $Q_n y_\Delta = y_\Delta$, dobivamo

$$(y_\Delta + Q_n q L_2^{-1} y) + Q_n y - Q_n q L_2^{-1} y_\Delta + y = y$$

odnosno

$$-(1 + Q_n q L_2^{-1}) y_\Delta + (1 - Q_n q L_2^{-1}) y = y - Q_n y$$

ili

$$y - y_\Delta = ((1 - Q_n q L_2^{-1})^{-1} (y - Q_n y). \tag{4.27}$$

Nadalje je $y - Q_n y = (1 - Q_n) y = (1 - Q_n q L_2^{-1} - Q_n + Q_n q L_2^{-1}) y = [(1 - Q_n q L_2^{-1}) - (Q_n - Q_n q L_2^{-1})] y = [(1 - Q_n q L_2^{-1}) - Q_n(1 - Q_n q L_2^{-1})] y$ pa iz (4.27) slijedi

$$y - y_\Delta = (1 - Q_n q L_2^{-1})^{-1} (1 - Q_n q L_2^{-1}) y - (1 - Q_n q L_2^{-1})^{-1} Q_n (1 - Q_n q L_2^{-1}) y =: y - P_n y.$$

P_n je prema gornjem dobro definiran, i lagano se provjeri da je $P_n^2 = P_n$, stoga je za dovoljno veliko n P_n projektor na $\mathcal{P}(k, \boldsymbol{m}, \Delta)$. ∎

KOROLAR **4.1.1** *Ako su ispunjeni uvjeti teorema 4.2, te za rješenje y problema (4.23) vrijedi $y \in C^2[0,1]$, tada za dovoljno veliko n postoji jedinstveno rješenje $x_\Delta = P_0 x_\Delta + L_2^{-1} y_\Delta \in \mathcal{S}(2 + k, \boldsymbol{m}, p, \Delta)$ aproksimativnog problema (4.20). Ako je x rješenje problema (4.18), tada je*

$$\| x - x_\Delta \|_X \leq \text{const.} \mid \delta \mid^2$$

DOKAZ: Tvrdnja slijedi iz teorema 4.1.2, definicije norme $\| \ \|_X$ i relacija

$$\begin{aligned} (x - x_\Delta) &= \int_0^1 H_0(\cdot, s)(y - y_\Delta)(s) ds \\ L_i(x - x_\Delta) &= \int_0^1 L_i H_0(\cdot, s)(y - y_\Delta)(s) ds \qquad i = 1, 2. \end{aligned}$$ ∎

Uz drugačije pretpostavke glatkoće na y i redovi konvergencije se mijenjaju; npr. ako je $y \in C^1[0,1]$, tada je konvergencija samo linearna.

Da dokažemo više redove konvergencije, kao što smo to učinili prije za $q = 0$, moramo analizirati grešku $x - x_\Delta$ u čvorovima uz poseban odabir točaka kolokacije. Neka je $G(t,u)$ Green-ova funkcija za operator $M := L_2 - q$ uz homogene rubne uvjete. Slijedeći ideje u [5] imamo:

$$x - x_\Delta = \int_0^1 G(\cdot, u) r(u) du$$

gdje je:

$$r := M(x - x_\Delta)\,.$$

Kako $M(x_\Delta)$ interpolira Mx u točkama kolokacije, možemo na svakom intervalu (x_{i-1}, x_i) pisati:

$$r(u) = p_k(u) \frac{r^{(k)}(\vartheta_u)}{k!}$$

$\forall u \in (x_i, x_{i+1})$, gdje je $p_k(u) := \prod_{l=1}^{k} (u - \tau_{ki+l})$, i $\vartheta_u \in (x_i, x_{i+1})$. Označimo li s

$$E_i(t) := \int_{x_i}^{x_{i+1}} G(t,u) r(u) du,$$

imamo

$$\|x - x_\Delta\|_\infty \leq \sum_{i=0}^{n} E_i(t) \leq \mid \delta \mid^{-1} \max_i E_i(t)$$

Uvedimo oznaku $h_t(u) := G(t,u) \frac{r^{(k)}(\vartheta_u)}{k!}$. Parcijalnom integracijom dolazimo do *generaliziranog Taylor-ovog razvoja* funkcije h_t oko x_i do članova trećeg reda:

$$h_t(u) \;=\; h_t(x_i) + L_1 h_t(x_i) \int_{x_i}^{u} d\sigma + \int_{x_i}^{u} d\sigma(\eta) \int_{x_i}^{\eta} L_2 h_t(\xi) d\xi.$$

Odaberemo li točke kolokacije τ_i u (4.20) kao u lemi 4.1.1 imamo zbog ortogonalnosti

$$E_i(t) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_k(u) du \int_{x_i}^{u} d\sigma(\eta) \int_{x_i}^{\eta} L_2 h_t(\xi) d\xi\,. \tag{4.28}$$

Kako je

$$\begin{aligned} &k! L_2 h_t = L_2(G(t,\cdot) D^k M(x - x_\Delta)) = \\ &L_2(G(t,\cdot) D^k L_2(x - x_\Delta)) - L_2(G(t,\cdot) D^k q(x - x_\Delta)) \end{aligned}$$

treba ocijeniti dva člana greške, prvi pridružen dominantnom djelu operatora:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_k(u) du \int_{x_i}^{u} d\sigma(\eta) \int_{x_i}^{\eta} L_2(G(t,\xi) L_{k+2}(x - x_\Delta))(\xi) d\xi, \tag{4.29}$$

dok se drugi može pojednostaviti integracijom do:

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} p_k(u) D^k(G(t,u) q(u)(x - x_\Delta)(u)) du\,. \tag{4.30}$$

LEMA **4.1.3** *Ako su ispunjene pretpostavke teorema 4.1.1, tada postoji* $\psi(\cdot,\xi) \in C^1[0,t)$ *za koju je*

$$G(t,\xi) = \psi(t,\xi)\int_0^\xi d\sigma \;\; 0 < \xi < t < 1, \tag{4.31}$$

i const. > 0, $0 < \varepsilon < t$ *tako da vrijedi:*

$$p(\xi)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}\int_0^\xi d\sigma \leq \text{const.} \qquad \forall \xi \in [0,\varepsilon].$$

DOKAZ: Za $t > \xi$ definiramo
$\psi(t,\xi) = \frac{G(t,\xi)}{\int_0^\xi d\sigma} = p(\xi)D_\xi G(t,\xi)\mid_0 + \frac{\int_0^\xi d\sigma(v)\int_0^v D_u(p(u)D_uG(t,u))\,du}{\int_0^\xi d\sigma}$.
Nakon zamjene reda integracije, koristeći činjenicu da $D(pDG) = qG$ za $t > \xi$, dobivamo:

$$\psi(t,\xi) = p(\xi)D_\xi G(t,0) + \frac{\int_0^\xi q(u)G(t,u)\int_u^\xi d\sigma}{\int_0^\xi d\sigma}$$

Deriviranjem je:

$$D_\xi\psi(t,\xi) = \frac{\int_0^\xi q(u)G(t,u)du\int_0^u d\sigma}{p(\xi)(\int_0^\xi d\sigma)^2}$$

i stoga prema pretpostavci:

$$0 \leq\mid D_\xi\psi(t,\xi)\mid \leq \max_{0\leq\xi\leq t\leq 1} \mid q(\xi)G(t,\xi)\mid \frac{\int_0^\xi p(u)d\sigma}{p(\xi)\int_0^\xi d\sigma} \leq \text{const.}$$

budući da je $p(u) \leq p(\xi)$ za dovoljno mali ξ. Iz

$$DpD(\psi(\cdot,\xi)\int_0^\xi d\sigma) = q(\xi)G(\cdot,\xi)$$

dobivamo:

$$D_\xi^2\psi\,(p\int_0^\xi d\sigma) = qG - D_\xi\psi(2 + p'\int_0^\xi d\sigma)$$

pa teorem 4.1.1 povlači

$$\mid D_\xi^2\psi\,(p\int_0^\xi d\sigma)\mid \leq \text{const.} + \text{const.}\frac{2-\kappa}{1-\kappa}$$

dokazujući lemu. ∎

Lema 4.1.3 daje ogradu za grešku (4.29) u blizini singulariteta nezavisno o čvorovima.

LEMA **4.1.4** *Ako je* $L_{k+4}x \in C[0,1]$ *i vrijede pretpostavke teorema 4.1.1, tada postoji* $\varepsilon > 0$ *takav da za svaki* $t > \varepsilon$ *i* $\xi \in (0,\varepsilon)$*:*

$$\mid L_2(G(t,\xi)L_{k+2}(x - x_\Delta)(\xi)) \mid \leq \text{const}.$$

DOKAZ: Budući da je na svakom podintervalu $x_\Delta \in L(\mathcal{S}(k+2,p))$, vrijedi

$$L_2(G(t,\xi)L_{k+2}(x - x_\Delta)(\xi)) = L_2(G(t,\xi)L_{k+2}x(\xi)) .$$

Prema lemi 4.1.3 to je isto što i $DpD(\psi(\cdot,\xi)\int_0^\xi d\sigma L_{2+k}x)$, odnosno nakon deriviranja: $\psi(2L_{k+3}x \,+\, p\int_0^\xi d\sigma\, L_{k+4}x \,+\, p'\int_0^\xi d\sigma\, L_{k+3}x) \,+\, (D\psi)(2L_{k+2}x \,+\, 2p\int_0^\xi d\sigma\, L_{k+3}x$ $+\, p'\int_0^\xi d\sigma\, L_{k+2}x) + (D^2\psi)(p\int_0^\xi d\sigma)\, L_{k+2}x$. Zaključak slijedi budući da su svi članovi ograničeni prema teoremu 4.1.1 i lemi 4.1.3. ∎

Lema 4.1.5 ograničava na sličan način član (4.30) uz neke uvjete na koeficijent q.

LEMA **4.1.5** *Ako uz pretpostavke teorema 4.1.1 vrijedi također* $q \in C^{k+1}(0,1]$*, te postoje* $\varepsilon > 0$ *i* $C > 0$ *tako da je* $q\int d\sigma \in C^{k+1}[0,\varepsilon]$ *i* $\frac{q(u)}{p(u)} \leq Cu^{k-1}$ *za svaki* $u \in (0,\varepsilon)$*, tada*

$$G(t,u)D^k(q(u)(x - x_\Delta)(u)) \,=\, \text{const.}\int_0^u d\sigma \,+\, w(t,u) \tag{4.32}$$

gdje $\mid w(t,u) \mid \leq \text{const.}\,\varepsilon d\sigma(0,\varepsilon)$*, i* const. *ne ovisi o* t*.*

DOKAZ: Neka je $\bar{x}$ generalizirani Taylorov razvoj za x oko 0 do članova drugog reda:

$$\bar{x}\,(\xi) \,:=\, x(0) + L_1x(0)\int_0^\xi d\sigma\,.$$

Promatramo grešku:

$$\mid GD^k(q(x - x_\Delta)) \mid \leq \mid GD^k(q(\bar{x} - x_\Delta)) \mid + \mid GD^k(q(x - \bar{x})) \mid . \tag{4.33}$$

x_Δ je linearna kombinacija funkcija u (1.8), $x_\Delta(0) = x(0)$, pa postoje koeficijenti b_i tako da je:

$$(\bar{x} - x_\Delta) \,=\, (L_1x(0) - b_1)\int_0^\xi d\sigma + \sum_{i=1}^k b_i\int_0^\xi s^{i-1}d\sigma(s)\,.$$

Prema lemi 4.1.3:

$$\begin{aligned} GD^k(q(\bar{x} - x_\Delta)) \,&=\, (\psi\int_0^u d\sigma)[(L_1x(0) - b_1)D^k(q\int_0^u d\sigma) \\ &+ \sum_{i=1}^k b_iD^k(q\int_0^u s^i d\sigma)]. \end{aligned}$$

Može se izabrati $\varepsilon > 0$ tako da za $u \in (0, \varepsilon)$ vrijedi

$$\psi(t,u) = \psi(t,0) + \int_0^u D_\xi \psi(t,\xi) d\xi = (pD_u)G(t,0) + w_1(t,u),$$

gdje je $\|w_1(t,u)\|_\infty \leq$ const $\cdot\, u$, i const. ovisi samo o p. Prema pretpostavci, $D^k(q(u)\int_0^u d\sigma) = D^k(q(u)\int_0^u d\sigma)\mid_0 + \int_0^u D^{k+1}(q\int d\sigma)d\xi = \text{const} + w_2(u)$, i $\|w_2\|_\infty \leq$ const.u. Stoga

$$(\psi \int_0^u d\sigma) D^k (q \int_0^u d\sigma) = \text{const} \cdot (pDG)(t,0) + O(\varepsilon d\sigma(0,\varepsilon). \tag{4.34}$$

Kako je $q(u)\int_0^u s^i d\sigma \leq u^i(q(u)\int_0^u d\sigma) \leq \text{const}.u^{i+k}$ za svako $u < \varepsilon$ i $q(u)$ je glatka za $u > 0$, zaključujemo da $q\int s^i d\sigma$ ima ograničenu derivaciju reda $k+1$ u nuli za $i \geq 1$ pa se može primijeniti isti argument.

Parcijalnom integracijom Taylorova greška je

$$\bar{x} - x = \int_0^u d\sigma(s_1) \int_0^{s_1} L_2 x(s_2) ds_2$$

stoga

$$GD^k q(x - \bar{x}) = (\psi \int_0^u d\sigma) D^k (q \int_0^u w_3(s_1) d\sigma(s_1))$$

gdje je $w_3(s) := \int_0^s L_2 x(s_1) ds_1$ i $\mid w_3(u) \mid \leq \|L_2 x\|_\infty u$. Slijedi

$$\mid q(u) \int_0^u w_3(s) d\sigma(s) \mid \leq C_3 \|L_2(x)\|_\infty u^{k+1}$$

pa je $q\int w_3 d\sigma \in C^{k+1}[0,\varepsilon]$ što povlači ocjenu (4.34). ∎

Uvijek je moguće dobiti ocjenu (4.32) ako se za $i > 1$ funkcije $q(x)u_i(x)$ mogu aproksimirati polinomima određenog reda tj. ako su dovoljno glatke. Npr. ako je $q(u) = p(u) = \sqrt{u}$ tada je qx_Δ polinom, i lema 4.1.5 vrijedi iako je $\frac{q}{p} = 1 > u$ za $u \in [0,1)$.

Lema 4.1.3 i lema 4.1.5 zajedno daju

TEOREM **4.1.3** *Neka je* $p \in C(0,1] \bigcap C^{k+3}(0,1]$, $\frac{1}{p} \in L^1[0,1]$ *i* $q \in C^{k+2}(0,1]$ *za neko* $k \geq 2$, *te pretpostavimo da je* $\frac{p'}{p} < \frac{\kappa}{u}$ *za* $0 < \kappa < 1$ *i* $\frac{q(u)}{p(u)} \leq C_3 u^{k-1}$ *za svako* $u \in (0,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. *Ako rješenje* x *problema (4.18) ispunjava uvjet* $(pD)x \in C^{k+3}[0,1]$, *i ako su točke kolokacije* τ_i *odabrane tako da vrijedi (4.14) tada kolokaciono rješenje* $x_\Delta \in \mathcal{S}(k+2, \boldsymbol{m}, p, \Delta)$ *problema (4.20) zadovoljava u čvorovima:*

$$\mid (x - x_\Delta)(x_i) \mid \leq \text{const.} \mid \delta \mid^{k+1} \mid d\sigma(\delta) \mid \tag{4.35}$$

$$\mid L_1(x - x_\Delta)(x_i) \mid \leq \text{const.} \mid \delta \mid^{k+1} \mid d\sigma(\delta) \mid \tag{4.36}$$

i, globalno:

$$\|x - x_\Delta\|_\infty \leq \text{const.} \mid \delta \mid^{k+1} \mid d\sigma(\delta) \mid \tag{4.37}$$

$$\|L_1(x - x_\Delta)\|_\infty \leq \text{const.} \mid \delta \mid^{k+1} \tag{4.38}$$

$$\|L_2(x - x_\Delta)\|_\infty \leq \text{const.} \mid \delta \mid^{k} \tag{4.39}$$

gdje const. *ne ovisi o* Δ.

DOKAZ: Moramo promotriti članove greške (4.29) i (4.30) koji zajedno daju ocjenu za $E_i(t)$. Neka je i tako odabran da $x_{i+1} < t$. Kako je $L_1 x \in C^{k+3}[0,1]$, slijedi da je $L_{k+4}x \in C[0,1]$ i prema lemi 4.1.3 postoji $0 < \varepsilon < t$ takav da je integrand u (4.29) ograničen na $(0, \varepsilon)$, a prema lemi 4.1.5 integrand u (4.30) je ograničen s const. $\varepsilon \int_0^\varepsilon d\sigma$. Ako je $x_{i+1} < \varepsilon$ možemo pretpostaviti da je $\varepsilon = x_{i+1}$, jer je $\varepsilon < t$ ali je inače nezavisan o t, pa slijedi da je $\mid E_i(t) \mid \leq \mid \Delta \mid^{k+2} \mid d\sigma(\Delta) \mid$. Ako je $\varepsilon < x_i < x_{i+1} < t$ ili $t < x_i < x_{i+1}$ jednostavno je dobiti ogradu za $E_i(t)$ u (4.28) jer su $p(\xi)$ i $G(\cdot, \xi)$ dovoljno glatki. Ako je $t = x_j$ za neko j, tada $t \notin (x_i, x_{i+1})$ ni za jedan i, i (4.35) slijedi sumacijom po i. (4.36) slijedi na isti način ako $G(t, \xi)$ zamijenimo s $G_1(t, \xi) := p(t) D_t G(t, \xi)$. Globalne ocjene slijede jer $L_1 G(t, \xi)$ ima prekid u $t = \xi$ dok je $L_2 G(t, \xi)$ δ funkcija. ∎

Ponašanje rješenja u okolici singulariteta određuje izbor aproksimirajućeg potprostora. Gore navedene pretpostavke nisu nipošto jedine moguće, već su tako konstruirane da utjecaj drugog koeficijenta q u diferencijalnoj jednadžbi ne kvari ponašanje rješenja, koje je određeno dominatnim djelom diferencijalnog operatora. Drugačije pretpostavke su moguće. Tako Doedel [16] razmatra operatore tipa

$$M := D t^\kappa D - q(t) D$$

uz pretpostavku, da rješenje x zadovoljava

$$D t^\kappa D x(t) = \psi_1(t) + t^\kappa \psi_2(t),$$

gdje su $\psi_{1,2}$ analitičke funkcije. Razmatranje poput našeg vodi ga na bazne funkcije u $\mathrm{Ker}(Dt^{1-\kappa} D t^\kappa D t^{1-\kappa} D) = L\{1, t^\kappa, t, t^{1+\kappa}\}$. To je CCT-sistem s tri netrivijalne težine za koji nije ugodno konstruirati lokalne baze. Iako su obje metode primjenjive u nekim slučajevima, postoje situacije u kojima Doedelova metoda neće konvergirati i obratno, naša metoda može u nekim slučajevima imati niži red konvergencije. Uz preslabe uvjete na q ni jedna metoda neće konvergirati. Npr. za modelni primjer (4.2) je prema (4.4) ispunjeno

$$(\sqrt{t} x'(t))' = \sqrt{t} + \cdots,$$

a prostor aproksimirajućih funkcija je na svakom podintervalu

$$\begin{aligned} \text{Doedel-ov slučaj:} \quad & L\{1, t^{1/2}, t, t^{3/2}\} \\ \text{Naš slučaj:} \quad & L\{1, t^{1/2}, t^{3/2}, t^{5/2}\} \end{aligned}$$

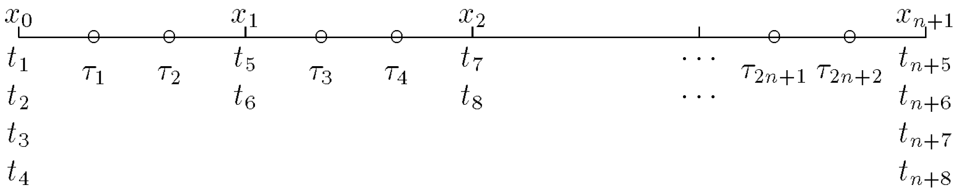
pa su druge generalizirane derivacije respektivno u

$$\text{Doedel-ov slučaj:} \quad L\{\frac{1}{\sqrt{t}}, 1\}$$
$$\text{Naš slučaj:} \quad L\{1, t\}.$$

Niti jedan potprostor nije dobar za aproksimaciju, ali se u drugom slučaju ipak može postići $\mathcal{O}(h^{1/2})$ konvergencija u drugim derivacijama; za $\| x - x_\Delta \|_\infty$ uz optimalan izbor točaka kolokacije može se dobiti superkvadratična konvergencija (globalno).

U svrhu numeričkog eksperimenta razmotrit ćemo kolokacione aproksimacije x_Δ reda 4, tj. neka je $k = 2$, $\boldsymbol{m} = (2, \ldots 2)^T$, $\Delta = \{x_i\}_1^{n+1}$ i $x_\Delta \in \mathcal{S}(4, \boldsymbol{m}, p, \Delta)$. Točke kolokacije izabirali smo na dva načina, prvo, neovisno o p ($\rho_1 = 1/3, \rho_2 = 2/3$) u (4.19)) i drugo, na optimalan način (lema 4.1.1). Slika (4.2) prikazuje raspored čvorova, proširenu particiju i ekvidistantno raspršene točke kolokacije. Kako je $\dim \mathcal{S}(4, \boldsymbol{m}, p, \Delta) = 2n + 4$ kolokacione jednadžbe (4.20) za x_Δ u $2n + 2$

Slika 4.2 Mreža čvorova i točaka kolokacije za $k = 2$



točaka kolokacije uz dva rubna uvjeta vode na linearni sistem jednadžbi za koji znamo da ima jedinstveno rješenje za dovoljno veliki n (teorem 4.1.2). Ako je $\{T_i^4\}_{i=1}^{2n+2}$ baza Čebiševljevih B-spline-ova u $\mathcal{S}(4, \boldsymbol{m}, p, \Delta)$ tada se aproksimativni problem svodi na određivanje koeficijenata c_i u T-reprezentaciji x_Δ:

$$x_\Delta(t) = \sum_{i=1}^{2n+4} c_i T_i^4(t). \tag{4.40}$$

Rubni uvjeti u (4.20) povlače dvije jednadžbe (prvu i zadnju)

$$\sum_{i=1}^{2n+2} c_i T_i^4(0) = \alpha$$
$$\sum_{i=1}^{2n+2} c_i T_i^4(1) = \beta,$$

a kako je zbog izbora mreže $T_i^4(0) = 0$ za $i > 1$ i $T_i^4(1) = 0$ za $i < 2n + 4$ prva i zadnja jednadžba su

$$c_1 T_1^4(0) = \alpha \tag{4.41}$$
$$c_{2n+4} T_{2n+4}^4(1) = \beta. \tag{4.42}$$

Kolokacione jednadžbe su:

$$\sum_{i=1}^{2n+4} c_i(L_2T_i^4(\tau(j) - q(\tau_j)T_i^4(\tau_j)) = f(\tau_j) \qquad j = 1, \dots 2n+2. \tag{4.43}$$

Zbog $T_i^4(t) = 0$ za $t \notin [t_i, t_{i+4}]$ matrica sistema je blok-dijagonalna:

$$S_{2n+4} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & & & & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Za rješavanje sistema jednadžbi

$$S_{2n+4} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{2n+4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ f(\tau_1) \\ \vdots \\ f(\tau_{2n+2}) \\ \beta \end{pmatrix}$$

upotrijebili smo deBoor-ov paket za linearne sisteme s blok-dijagonalnim matricama [4], poimence rutine
`SLVBLK (SBBLOK (SUBFOR, SUBBAK)), (FCBLOK (FACTRB,SHIFTB))`
za LR-faktorizaciju matrice sistema. Program `COLLOC` koristi prije razvijene potprograme za računanje lokalnih baza iracionalnih spline funkcija i njihovih derivacija (`DTB4`), a kolokaciono rješenje računa se preko T-reprezentacije (`DTB4DER`). Prvi primjer je

$$\begin{array}{l} (\sqrt{t}x'(t)') - \sqrt{t})x(t) = \frac{3}{2}\mathrm{e}^t \;\; t \in (0,1) \\ x(0) = 0 \qquad x(1) = \mathrm{e} \end{array}. \tag{4.44}$$

Točke kolokacije biramo na optimalan način, ako iz programa `COLLOC` pozovemo rutinu `DCOLOPT`, koja na svakom podintervalu rješava problem (4.16) eksplicitno, za $p(t) = t^\kappa = t^{1/2}$. Za koeficijente koji nisu tog oblika, na svakom intervalu treba prvo izračunati odgovarajuće momente po mjeri $d\sigma$ analitički ili numerički, te napisati analogon rutine `DXMI`.

```
      subroutine DCOLOPT(t,x,k)
c
c     determines two optimal collocation points per interval
c     for the given knot sequence t; dependence on the dominant
c     coeff. p(t)=t**(1/2) in difequ enters through moment
c     function dxmi and is easily changed
```

```
c
c     calls DXMI
c
c*****INPUT****
c           t = extended knot sequence
c           k = number of knots
c*****OUTPUT*****
c           x = optimal collocation points
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension x(1),t(1)
      do 1 i=1,(k-2)/2
         a=t(2*i+2)
         b=t(2*i+3)
         d=dxmi(2.d0,a,b)*dxmi(1.5d0,a,b)-
     +     dxmi(1.d0,a,b)*dxmi(2.5d0,a,b)
         al=-dxmi(3.d0,a,b)*dxmi(1.5d0,a,b)+
     +       dxmi(1.d0,a,b)*dxmi(3.5d0,a,b)
         al=al/d
         be=-dxmi(2.d0,a,b)*dxmi(3.5d0,a,b)+
     +       dxmi(3.d0,a,b)*dxmi(2.5d0,a,b)
         be=be/d
         x(2*i-1)=(-al+dsqrt(al*al-4.d0*be))/2.d0
         x(2*i)=(-al-dsqrt(al*al-4.d0*be))/2.d0
1     continue
      return
      end
      double precision function DXMI (kapa,a,b)
c
c     calculates measure of (a,b) with respect to t**kapa
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      double precision kapa
      dxmi=(b**kapa-a**kapa)/kapa
      return
      end
```

Za test primjer u kojem točke kolokacije nisu optimalne zamijenimo `DCOLOPT` s `DCOLPT`:

```
      subroutine DCOLPT(t,x,k)
c
c     determines two  collocation points from the knot sequence t
c     equidistantly interspersed between knots
c
```

```
c*****INPUT*****
c          t = extended knot sequence
c          k = number of knots
c*****OUTPUT*****
c          x = collocation points
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension x(1),t(1)
      do 1 i=1,(k-2)/2
         h=(t(2*i+3)-t(2*i+2))/3.d0
         x(2*i-1)=t(2*i+2)+h
         x(2*i)=t(2*i+2)+2.d0*h
1     continue
      return
      end
```

Program COLLOC tabelira eksperimentalno dobivene redove konvergencije usporedbom $L_j x_\Delta$ s egzaktnim rješenjem $x = \sqrt{t}e^t$ problema (4.44) za $j = 0, 1, 2$. Egzaktno rješenje u nuli nema ograničenu derivaciju.

```
c     program COLLOC
c
c     collocation by Tchebycheff splines of order 4 for a model example
c     Dsqrt(x)Du-sqrt(x)*u=1.5*exp(x)
c
c     program determines the decay exponent (function values and
c     derivatives)  for optimal choice of collocation points,
c     by taking maximum error over 20 equidistant points per interval
c
c     decay exponent is determined locally (at the points od delta),
c     and globally
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension t(100),x(100)
      dimension biatx(4),dbiatx(4),ddbiatx(4),c(100),scratch(4,4)
      dimension bloks(592),b(148),xx(100)
      integer integs (3,50),ipivot (148)
      common /normal/ c
      data step,istep /20.0d0,20/
      right(z)=1.5d0*dexp(z)
c
c     egzact solution is: x**0.5*exp(x)
c
      write(*,10)
10    format('  N    ',3('MAX.ERROR  DECAY EXP. '),/)
```

```
      do 101 k=8,32,2
c
c     generating the (equidistant) knot sequence for L1 continuous
c     splines
c
      do 1 i=1,4
         t(i)=0.d0
         t(k+i)=1.d0
1     continue
      h=2.d0/dble(k-2)
      do 2 i=5,k-1,2
         t(i)=h*dble((i-3)/2)
         t(i+1)=t(i)
2     continue
c
c     generating the collocation points
c
      call dcolopt(t,x,k)
c
c     generating the collocation matrix
c
c     defining the structure:
c
      integs(1,1)=3
      integs(2,1)=4
      integs(3,1)=2
      nbloks=(k-2)/2
      do 4 i=2,nbloks-1
         integs(1,i)=3
         integs(2,i)=4
         integs(3,i)=2
4     continue
      integs(1,nbloks)=4
      integs(2,nbloks)=4
      integs(3,nbloks)=4
c     isum = dimension of array bloks; nbrows = dimension of right side
      isum=0
      nbrows=0
      do 5 i=1,nbloks
         nbrows=nbrows+integs(1,i)
         isum=isum+integs(1,i)*integs(2,i)
5     continue
c
c     the collocation matrix is the sum of two matrices. The entries
c     are  calculated and filled in one-dimensional array BLOKS
```

```
c     (isum = actual dimension of array BLOKS)
c
      index=0
c
c     defining the first block
c
      left=4
      scratch(1,1)=1.
      do 71 j=2,4
         scratch(1,j)=0.d0
71    continue
      call dtb4(t,k,x(1),left,0,biatx,dbiatx,ddbiatx)
      do 72 j=1,4
         scratch(2,j)=ddbiatx(j)-sqrt(x(1))*biatx(j)
72    continue
      call dtb4(t,k,x(2),left,1,biatx,dbiatx,ddbiatx)
      do 73 j=1,4
          scratch(3,j)=ddbiatx(j)-sqrt(x(2))*biatx(j)
73    continue
      do 74 i=1,4
         do 74 j=1,3
             index=index+1
             bloks(index)=scratch(j,i)
74    continue
c
c     defining other blocks
c
         do 6 j=1,4
            scratch(1,j)=0.d0
6     continue
      do 7 i=3,k-5,2
         left=left+2
         call dtb4(t,k,x(i),left,1,biatx,dbiatx,ddbiatx)
         do 8 j=1,4
             scratch(2,j)=ddbiatx(j)-sqrt(x(i))*biatx(j)
8        continue
         call dtb4(t,k,x(i+1),left,1,biatx,dbiatx,ddbiatx)
         do 9 j=1,4
            scratch(3,j)=ddbiatx(j)-sqrt(x(i+1))*biatx(j)
9        continue
         do 78 i1=1,4
            do 78 j=1,3
               index=index+1
               bloks(index)=scratch(j,i1)
78       continue
```

```
7     continue
c
c     defining the last block
c
      left=k
      scratch(4,4)=1.d0
      do 81 j=1,3
         scratch(4,j)=0.d0
81    continue
         do 85 j=1,4
            scratch(1,j)=0.0
85    continue
      call dtb4(t,k,x(k-3),left,1,biatx,dbiatx,ddbiatx)
      do 82 j=1,4
         scratch(2,j)=ddbiatx(j)-sqrt(x(k-3))*biatx(j)
82    continue
      call dtb4(t,k,x(k-2),left,1,biatx,dbiatx,ddbiatx)
      do 83 j=1,4
          scratch(3,j)=ddbiatx(j)-sqrt(x(k-2))*biatx(j)
83    continue
      do 84 i=1,4
         do 84 j=1,4
             index=index+1
             bloks(index)=scratch(j,i)
84    continue
c
c      generating the right hand side of the linear system
c
c      boundary condition at 0 :
c
       b(1)=0.d0
c
c      boundary condition at 1 :
c
       b(nbrows)=dexp(1.d0)
c
      ini=2
      do 15 i=1,k-3,2
         b(ini)=right(x(i))
         b(ini+1)=right(x(i+1))
         ini=ini+3
15    continue
c
c      solving the linear system
c
```

```
       call slvblk (bloks,integs,nbloks,b,ipivot,xx,iflag)
c
c      estimate of the maximum error on (0,1)
c
      err=0.d0
      err1=0.d0
      err2=0.d0
      do 16 i=4,k,2
         dx=(t(i+1)-t(i))/step
         do 16 j=1,istep-1
            point=t(i)+float(j)*dx
            pom=dexp(point)
            egz=dsqrt(point)*pom
            egzd=pom*(point+0.5d0)
            egzdd=pom*(point+1.5d0)
         call dtb4der(point,t,xx,k,aprox,daprox,ddapro)
         err=dmax1(err,dabs(egz-aprox))
         err1=dmax1(err1,abs(egzd-daprox))
         err2=dmax1(err2,abs(egzdd-ddapro))
16    continue
      aloger=dlog(err)
      aalg1=dlog(err1)
      aalg2=dlog(err2)
      if (k.gt.8) then
         pom1=dlog(dble(k)/dble(kp))
         decay=(aloger-algerp)/pom1
         decay1=(aalg1-alg1)/pom1
         decay2=(aalg2-alg2)/pom1
      endif
      algerp=aloger
      alg1=aalg1
      alg2=aalg2
      kp=k
101   write(*,20) k,err,decay,err1,decay1,err2,decay2
20    format(i3,3(d12.4,d11.2))
      end
```

Ako je e_N^j dobiveno uzimanjem $\max \mid L_j(x - Rx) \mid$ u 20 ekvidistantnih točaka između čvorova kao u programu, i

$$\alpha_N^j := \log\left(e_N^j / e_{N-2}^j\right) / \log\left((N-2)/N\right)$$

možemo sažeti rezultate u tabeli 4.1 Zamijenimo li petlju `DO 16` sa

```
      do 16 i=4,k,2
```

Tabela 4.1 Globalne greške i redovi konvergencije uz optimalne točke kolokacije

N	e_N^0	α_N^0	e_N^1	α_N^1	e_N^2	α_N^2
8	.3840(−03)		.3041(−02)		.7220(−01)	
10	.1340(−03)	−4.7	.1340(−02)	−3.7	.4174(−01)	−2.5
12	.5975(−04)	−4.4	.7046(−03)	−3.5	.2717(−01)	−2.4
14	.3101(−04)	−4.3	.4149(−03)	−3.4	.1908(−01)	−2.3
16	.1786(−04)	−4.1	.2646(−03)	−3.4	.1414(−01)	−2.2
18	.1109(−04)	−4.0	.1789(−03)	−3.3	.1089(−01)	−2.2
20	.7293(−05)	−4.0	.1266(−03)	−3.3	.8647(−02)	−2.2
22	.5016(−05)	−3.9	.9283(−04)	−3.3	.7031(−02)	−2.2
24	.3577(−05)	−3.9	.7008(−04)	−3.2	.5830(−02)	−2.2

```
            point=t(i)
            pom=dexp(point)
            egz=dsqrt(point)*pom
            egzd=pom*(point+0.5d0)
            egzdd=pom*(point+1.5d0)
         call dtb4der(point,t,xx,k,aprox,daprox,ddapro)
         err=dmax1(err,abs(egz-aprox))
         err1=dmax1(err1,abs(egzd-daprox))
         err2=dmax1(err2,abs(egzdd-ddapro))
16    continue
```

dobivamo greške i redove konvergencije u čvorovima (tabela 4.2). Ako se koristi

Tabela 4.2 Lokalne greške i redovi konvergencije

N	$e_{N,\Delta}^0$	α_N^0	$e_{N,\Delta}^1$	α_N^1	$e_{N,\Delta}^2$	α_N^2
8	.1918(−04)		.1379(−03)		.8472(−01)	
10	.6201(−05)	−5.06	.4868(−04)	−4.66	.5127(−01)	−2.25
12	.2538(−05)	−4.90	.2129(−04)	−4.54	.3428(−01)	−2.21
14	.1214(−05)	−4.79	.1073(−04)	−4.45	.2451(−01)	−2.18
16	.6553(−06)	−4.62	.5972(−05)	−4.38	.1838(−01)	−2.15
18	.3905(−06)	−4.39	.3584(−05)	−4.34	.1429(−01)	−2.14
20	.2459(−06)	−4.39	.2278(−05)	−4.30	.1143(−01)	−2.12
22	.1620(−06)	−4.38	.1517(−05)	−4.27	.9348(−02)	−2.11
24	.1108(−06)	−4.37	.1048(−05)	−4.24	.7787(−02)	−2.10

rutina `DCOLPT` za određivanje točaka kolokacije, globalni red konvergencije je manji, superkonvergencije nema (tabela 4.3). Za modelni primjer (4.2) analogno dobivamo

Tabela 4.3 Globalni redovi konvergencije uz neoptimalne točke kolokacije

N	e_N^0	α_N^0	e_N^1	α_N^1	e_N^2	α_N^2
8	.4169(−02)		.5169(−02)		.1122(+00)	
10	.2308(−02)	−2.65	.3851(−02)	−1.32	.6787(−01)	−2.25
12	.1523(−02)	−2.28	.2955(−02)	−1.45	.4540(−01)	−2.21
14	.1047(−02)	−2.43	.2293(−02)	−1.65	.3248(−01)	−2.17
16	.7761(−03)	−2.24	.1816(−02)	−1.74	.2438(−01)	−2.15
18	.5956(−03)	−2.25	.1469(−02)	−1.80	.1896(−01)	−2.13
20	.4682(−03)	−2.28	.1209(−02)	−1.84	.1517(−01)	−2.12
22	.3819(−03)	−2.14	.1012(−02)	−1.87	.1241(−01)	−2.11
24	.3149(−03)	−2.22	.8586(−03)	−1.89	.1034(−01)	−2.10

tabelu 4.4: Budući da $L_3 x \notin C[0,1]$ (4.4) redovi konvergencije su manji; optimalne točke daju bolju točnost.

4.2 Kolokacija g-spline funkcijama

Mnogi primjeri iz mehanike neprekidnih sredina vezanih uz nehomogena sredstva ukazuju na važnost "lijepljenja" skokova derivacija, a ne samih derivacija. Takvi uvjeti potiču od fizikalnih zakonitosti koji izražavaju neprekidnost dinamičkih polja definiranih na kontinuumu, kao što su napetost, impuls, moment i sl. Za jednadžbe drugog reda takvim zahtjevima odgovara hermitski spline koji zadovoljava uvjete kao što su (3.2)–(3.3) (napeta žica sastavljena od komada raznih svojstava materijala). Hermitski spline $s \in \mathcal{S}(n, p, \boldsymbol{m}, \Delta)$ u prostoru g-spline funkcija s jednom po dijelovima konstantnom težinom (teorem 3.2.1) rješava egzaktno $DpDs = p_n$ gdje je p_n polinom n-tog stupnja, uz dobro odabranu mrežu čvorova Δ. Klasično se ovakvi problemi rješavaju postavljanjem čvora većeg multipliciteta u točki diskontinuiteta dominantnog koeficijenta diferencijalne jednadžbe, što povećava dimenziju aproksimativnog prostora. Relaksacijom glatkoće u točki pucanja koeficijenta ne može se postići egzaktnost na polinomima, kao što je to moguće postići g-spline-om; ovo podjednako vrijedi kako za kolokaciju, tako i za metodu konačnih elemenata[2]. Slična je situacija i za daleko teže probleme opisane jednadžbama višeg reda. Potpuni[3] kubični spline iz primjera 3.3.5 rješava egzaktno homogenu

[2]izuzetak čini varijanta metode u kojoj se $pu'(t_i)$ tretiraju kao nepoznanice (*mixed finite element method*)

[3]naziv potpuni označava spline sa maksimalno moguće zalijepljenim derivacijama, (*complete cubic*)

Tabela 4.4 Globalne greške i redovi konvergencije za Jamet-ov primjer

	optimalno		ne − optimalno	
N	e_N^0	α_N^0	e_N^0	α_N^0
8	.3744(−03)		.1200(−02)	
10	.2247(−03)	−2.29	.8567(−03)	−1.51
12	.1495(−03)	−2.23	.6397(−03)	−1.60
14	.1066(−03)	−2.20	.4956(−03)	−1.66
16	.7945(−04)	−2.20	.3960(−03)	−1.68
18	.6181(−04)	−2.13	.3238(−03)	−1.71
20	.4941(−04)	−2.12	.2699(−03)	−1.73
22	.4029(−04)	−2.14	.2288(−03)	−1.73
24	.3326(−04)	−2.20	.1968(−03)	−1.73

jednadžbu za nehomogeni štap (primjer 1.3.2). Uvjeti lijepljenja 3.30 izražavaju fizikalni zakon održanja momenata u čvorovima. I u ovdje su moguće generalizacije na proizvoljni red, ako se ne zahtijeva lijepljenje viših derivacija – tehnike primijenjene u [12] vode na konstrukcije takvih spline funkcija.

S druge strane, ponekad je potrebno aproksimirati koeficijente u diferencijalnoj jednadžbi, bilo zato što pravi koeficijenti potiču iz mjerenja, ili ih je potrebno na neki način modelirati konstantama po dijelovima, kao što je to npr. u radovima Pruess-a ([35], [36]) gdje se koristi konstanta koja interpolira koeficijent u polovištu između dva čvora ("midpoint interpolation"). Interesantno je da takve aproksimacije čuvaju asimptotsku distribuciju svojstvenih vrijednosti (barem za Sturm–Liouville-ov problem). Tipičan rezultat za S-L problem

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda r(x)u \qquad x \in (a,b)$$

uz rubne uvjete

$$a_1u(a) - a_2(pu')(a) = 0$$
$$b_1u(b) + b_2(pu')(b) = 0$$

je npr.

$$|\ \lambda - \hat{\lambda}\ | = \mathcal{O}(\delta^2)$$
$$\|\ u - \hat{u}\ \|_\infty = \mathcal{O}(\delta^2)$$
$$\|\ pu' - \hat{p}\hat{u}'\ \|_\infty = \mathcal{O}(\delta^2)$$

ako su $p, q, r \in C^4[a,b]$ i $\hat{p}$ npr.

$$\hat{p} = p((x_n + x_{n+1})/2), \quad x \in (x_x, x_{n+1}).$$

(v. [37]). U programskim paketima poput `SLEDGE` [38] vodeći koeficijent je globalno konstanta (1), što se postiže svođenjem na normalnu formu. Moguće je međutim postići konvergenciju i uz vrlo slabe pretpostavke na vodeći koeficijent, ako se pažljivo odabere njegova aproksimacija konstantnom.

U daljnjem ćemo se ograničiti na kolokacione metode hermitskim spline funkcijama reda 4, iako je sve rezultate lako poopćiti na hermitske spline-ove reda n; podizanje reda ne doprinosi ništa konvergenciji metode. Neka $p(t)$ zadovoljava uvjete iz teorema 4.1.1 i neka je

$$\begin{aligned} M &:= L_{2,p} = DpD \quad \text{i} \\ M_\Delta &:= L_{2,p,\Delta} = D\hat{p}D, \end{aligned}$$

gdje je $\hat{p}$ po dijelovima konstanta funkcija odabrana tako da na mreži $\Delta = \{x_i\}_{i=0}^{k+1}$ vrijedi:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{p(t)} dt = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{\hat{p}(t)} dt. \tag{4.45}$$

Neka su nadalje $x_\Delta \in \mathcal{S}(4, p, \boldsymbol{m}, \Delta)$ i $\hat{x}_\Delta \in \mathcal{P}(4, \boldsymbol{m}, \Lambda, \Delta)$ kolokaciona rješenja problema $Mx = f$ i $M_\Delta \hat{x} = f$, $f \in C[0,1]$. Vektor multipliciteta je $\boldsymbol{m} = (2, \ldots 2)^T$, tj. x_Δ i $\hat{x}_\Delta$ su hermitski spline-ovi u odgovarajućim prostorima; vektori incidencije (3.4) određeni su konstantama $\hat{p}\mid_{[} x_i, x_{i+1}]$. Kako je

$$x - \hat{x}_\Delta = x - x_\Delta + x_\Delta - \hat{x}_\Delta$$

to je

$$\| x - \hat{x}_\Delta \|_\infty \leq \| x - x_\Delta \|_\infty + \| x_\Delta - \hat{x}_\Delta \|_\infty .$$

Neka su $H := M^{-1}$ i $H_\Delta := M_\Delta^{-1}$ inverzni operatori za M i M_Δ definirani preko odgovarajućih Green-ovih funkcija. Vrijedi:

$$\begin{aligned} x_\Delta - \hat{x}_\Delta &= HMx_\Delta - HM_\Delta \hat{x}_\Delta + HM_\Delta \hat{x}_\Delta - H_\Delta M_\Delta \hat{x}_\Delta \\ &= H(Mx_\Delta - M_\Delta \hat{x}_\Delta) + (H - H_\Delta) M_\Delta \hat{x}_\Delta \\ &= Hr + (H - H_\Delta) M_\Delta \hat{x}_\Delta, \end{aligned} \tag{4.46}$$

gdje je $r := Mx_\Delta - M_\Delta \hat{x}_\Delta$ *rezidual.* Kako je $Mx_\Delta \in \{1, x\}$ i $M_\Delta \hat{x}_\Delta \in \{1, x\}$, slijedi da je r linearna funkcija s dvije nule (točke kolokacije) na svakom intervalu $[x_i, x_{i+1})$, pa je $r \equiv 0$.

LEMA **4.2.1** *Ako p ispunjava pretpostavke teorema 4.1.3, tada za kolokaciona rješenja $x_\Delta \in \mathcal{S}(4, p, \boldsymbol{m}, \Delta)$ i $\hat{x}_\Delta \in \mathcal{P}(4, \boldsymbol{m}, \Lambda, \Delta)$ problema $Mx = f$ i $M_\Delta \hat{x} = f$, $f \in C^2[0,1]$, vrijedi:*

(i) za proizvoljne točke kolokacije:

$$| (x - \hat{x}_\Delta)(t) | \le | \delta |^2 + | (H - H_\Delta) M_\Delta \hat{x}_\Delta | \tag{4.47}$$

(ii) za optimalne točke kolokacije (4.14):

$$| (x - \hat{x}_\Delta)(t) | \le | \delta |^3 | d\sigma(\delta) | + | (H - H_\Delta) M_\Delta \hat{x}_\Delta | \tag{4.48}$$

odnosno u čvorovima:

$$| (x - \hat{x}_\Delta)(x_i) | \le | (H - H_\Delta) M_\Delta \hat{x}_\Delta(x_i) | \tag{4.49}$$

gdje je $d\sigma$ mjera generirana s $\frac{1}{p}$ i $| \delta | := \max_i | x_{i+1} - x_i |$.

DOKAZ: Direktna posljedica (4.46) i relacija (4.12), (4.15). Druga tvrdnja u (ii) slijedi iz činjenice da je $(x - x_\Delta)(x_i) = 0$. $\blacksquare$

Ne može se očekivati da $\hat{x}_\Delta$ može aproksimirati rješenje jednadžbe $Mx = f$ globalno s većim redom konvergencije od $\mathcal{O}(d\sigma(\delta))$; to je posljedica teorema zasićenja teorije aproksimacija. U čvorovima je moguće postići više. Zbog jednostavnosti argumenta možemo pretpostaviti da su rubni problemi za x i $\hat{x}$ respektivno

$$Mx = f,\ x(0) = 0,\ (px)'(1) = 0 \tag{4.50}$$

$$M_\Delta \hat{x} = f,\ \hat{x}(0) = 0,\ \hat{x}'(1) = 0. \tag{4.51}$$

TEOREM **4.2.1** *Ako p ispunjava pretpostavke teorema 4.1.3, tada u čvorovima x_i rešetke Δ kolokaciono rješenje $\hat{x}_\Delta$ jednadžbe (4.51) konvergira superlinearno:*

$$| (x - \hat{x}_\Delta)(x_i) \le \| f \|_\infty \cdot \text{const.} | \delta | | d\sigma(\delta) | + \mathcal{O}(| \delta |^2).$$

DOKAZ: Kako je $M_\Delta \hat{x}_\Delta(x_i) = f(x_i)$, to na osnovu (4.49) i eksplicitnih izraza za Green-ove funkcije operatora H i H_Δ imamo

$$| x(x_i) - \hat{x}_\Delta(x_i) | = | \int_0^{x_i} \int_z^1 f(s) (\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)}) ds\, dz | .$$

Nakon zamjene reda integracije dobivamo

$$\int_0^{x_i} f(s) ds \int_0^s (\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)}) dz + \int_{x_i}^s f(s) ds \int_0^{x_i} (\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)}) dz.$$

Budući da je

$$\int_0^{x_i} (\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)}) dz = \sum_{l=0}^{i-1} \int_{x_l}^{x_{l+1}} (\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)}) dz = 0$$

prema (4.45), preostaje samo prvi član. Rastavljajući preostali integral na integrale među čvorovima i koristeći (4.45) na isti način, dolazimo do ocjene

$$| x(x_i) - \hat{x}_\Delta(x_i) | \leq | \int_0^{x_1} f(s)ds \int_0^s (\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)})dz | + \tag{4.52}$$

$$\sum_{l=2}^{i} | \int_{x_{l-1}}^{x_l} f(s)ds \int_{x_i}^s (\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)})dz | . \tag{4.53}$$

Drugi član u (4.52) možemo lako ocijeniti jer je $p \in C^1(0,1]$. Zaista, za $z \in [x_l, x_{l+1}]$ i $l \geq 1$ je

$$| \frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)} | \leq \max_{z \in [x_l, x_{l+1}]} | \frac{p'(z)}{p^2(z)} | | \delta |,$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} | \int_{x_{l-1}}^{x_l} f(s)ds \int_{x_i}^s (\frac{1}{p(z)} - \frac{1}{\hat{p}(z)})dz | &\leq \text{const} \cdot \| f \|_\infty | \delta | \int_{x_{l-1}}^{x_l} (s - x_{l-1})ds \\ &= \text{const} \cdot \| f \|_\infty | \delta |^3 /2. \end{aligned}$$

Zbog $N \mid \delta \mid \leq 1$ suma svih članova do i-tog je manja od $N \| f \|_\infty \text{ const}.N \frac{|\delta|^3}{2} = \mathcal{O}(\delta^2)$, gdje je const $= \max_{z \in [x_1, 1]} | \frac{p'(z)}{p^2(z)} |$.

Preostaje još ocijeniti prvi integral u (4.52). $z \in [0, x_1)$ povlači $\hat{p} = \frac{x_1}{\int_0^{x_1} \frac{dz}{p(z)}} = p(z^*)$, $z^* \in (0, x_1)$. Za dovoljno malo $| \delta | > x_1$ funkcija $p(z)$ je monotono rastuća i stoga

$$| p(z^*) - p(z) | = \begin{cases} p(z^*) - p(z) & z < z^* \\ p(z) - p(z^*) & z \geq z^*. \end{cases}$$

Prvi integral možemo prema tome ocijeniti s

$$\| f \|_\infty | \delta | \frac{1}{\hat{p}} \int_0^{x_1} (\hat{p} - p(z)) \frac{dz}{p(z)} \leq \| f \|_\infty | \delta | \frac{\int_0^{x_1} d\sigma}{x_1} d\sigma(0, x_1) \max_{z \in [0, x_1]} | \hat{p} - p(z) | =$$

$$\| f \|_\infty | \delta | \frac{\int_0^{x_1} d\sigma}{x_1} d\sigma(0, x_1) \max\{ \frac{x_1}{\int_0^{x_1} d\sigma}, p(x_1) - \frac{x_1}{\int_0^{x_1} d\sigma} \}.$$

Prema teoremu 4.1 je $| p(x_1) \int_0^{x_1} d\sigma | \leq \frac{x_1}{1-\kappa}$ gdje je $0 < \kappa < 1$, iz čega zaključujemo da je

$$\max\{ \frac{x_1}{\int_0^{x_1} d\sigma}, p(x_1) - \frac{x_1}{\int_0^{x_1} d\sigma} \} \leq \frac{x_1}{\int_0^{x_1} d\sigma} \max\{1, \frac{\kappa}{1-\kappa}\}.$$

Jedna i druga ocjena zajedno povlače

$$| (x - \hat{x}_\Delta)(x_i) \leq \text{const}. \| f \|_\infty | \delta | | d\sigma(\delta) | + \mathcal{O}(\delta^2),$$

Tabela 4.5 Redovi konvergencije globalno i u čvorovima

N	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$\hat{\alpha}_N$	-0.91	-0.79	-0.72	-0.67	-0.64	-0.62	-0.60	-0.59	-0.58	-0.57
$\hat{\alpha}_N^{\Delta}$	-1.3	-1.3	-1.4	-1.4	-1.4	-1.4	-1.4	-1.4	-1.4	-1.4

gdje je

$$\text{const.} = \begin{cases} 1 & 0 < \kappa \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1-\kappa} & \frac{1}{2} \leq \kappa < 1 \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Na isti način kao i u teoremu 4.2.1 lagano se pokaže da je globalno $\mid x - \hat{x}_\Delta \mid = \mathcal{O}(d\sigma(\delta))$; to je ujedno i optimalni red konvergencije [52].

PRIMJER **4.2.1** *Neka je $p(t) = \sqrt{t}$. Ako je $\hat{p}(z) \mid_{[\, x_l, x_{l+1}]} =: \hat{p}_l$, onda (4.45) povlači*

$$\hat{p}_l = \frac{\sqrt{t_{l+1}} + \sqrt{t_l}}{2}.$$

Ako su x i $\hat{x}$ rješenja problema $Mx = f$ i $M\hat{x} = f$ respektivno, tada je

$$\| x - \hat{x} \|_\infty \leq 2 \| f \|_\infty \sqrt{\delta}.$$

U čvorovima se može postići $\mathcal{O}(\delta\sqrt{\delta})$ konvergencija.

Primijenimo li kolokaciju u $\mathcal{P}(4, \hat{p}, \boldsymbol{m}, \Delta)$, $\boldsymbol{m} = (2, \ldots 2)^T$ na jednadžbu (4.44) gdje je $\hat{p}$ aproksimacija vodećeg koeficijenta $p(t) = \sqrt{t}$ u diferencijalnoj jednadžbi po formuli (4.54), dobivamo tabelu za globalne i lokalne redove konvergencije (v. također [44]. Točke kolokacije birane su u skladu s lemom 4.1.1. Rezultati su dobiveni programom poput `COLLOC`, s tim da je poziv potprograma `DTB4` zamijenjen pozivom potprograma `SIMPDT` za generiranje kubičnih gB-spline funkcija. Aproksimacija koeficijenta potrebna za `SIMPDT` mora se izračunati analitički, tj. uvijek je iznova potrebno napisati jednostavni subroutine potporgram kao što je `SUBROUTINE PAPROX`:

```
      subroutine paprox(a,b,pcoef)
c
c     generates piecewise constant approximation
c     of hystogram type to function p(x) on interval (a,b)
c
c*****INPUT*****
c     a.....left side of interval
c     b.....right side of interval
```

```
c*****OUTPUT*****
c     pcoef..piecewise constant approximation
c            of coefficient p(x)=dsqrt(x)
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      pcoef=(dsqrt(a)+dsqrt(b))/2.d0
      return
      end
```

Za razliku od teorema 4.1.3 koji omogućuje povećanje reda konvergencije u ovisnosti o redu CCT-sistema (ako je rješenje u generaliziranom smislu dovoljno glatko), red konvergencije dan teoremom 4.2.1 limitiran je aproksimacijom vodećeg koeficijenta. Ukoliko je vodeći koeficijent p poznat samo eksperimentalno, gornja metoda kolokacije može predstavljati postupak za modeliranje tog koeficijenta.

5. Dodatak

5.1 Algoritam za dodavanje čvorova u polinomnom slučaju

Spline-ovi klase C^1 kod kojih druga derivacija ima zadan skok važniji su s praktičnog gledišta od onih kod kojih funkcija ima lom. Umjesto korištenja programa `KNOTINS` opisanog u glavi o g-spline funkcijama koji put se zgodnije pozvati na već gotove algoritme za generiranje diskretnih polinomnih spline-ova, kao što je slijedeća rutina `KNOTINS`:

```
      subroutine KNOTINS(tau,t,k,j,left,alpha)
c
c     This subroutine is an implementation of algorithm 1
c     for calculating all non-vanishing discrete B-splines
c     according to a recurrence relation by Cohen,Lyche,Riesenfeld:
c     Discrete B-splines and subdivision Techniques in
c     computer-aided geometric design and computer graphics,
c     Computer graphics and image processing 14, 87-111 (1980)
c
c*****INPUT*****
c           tau    = initial sequence of knots
c           t      = knot refinement, may include some of the tau knots
c           k      = order of the spline space
c           j,left = integers such that tau(left).le.t(j).lt.tau(left+1)
c*****OUTPUT*****
c           alpha  = vector of k non-vanishing discrete B-splines
c
c     W A R N I N G: division by zero ocurrs if the condition
c           tau(left).le.t(j).lt.tau(left+1) is not satisfied
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension alpha(left-k+1:left),tau(1),t(1)
      alpha(left)=1.d0
      l2=left
```

```
      do 1 ir=1,k-1
         beta_1=0.d0
         tj=t(j+ir)
         do 2 i=l2,left
            d1=tj-tau(i)
            d2=tau(i+ir)-tj
            beta=alpha(i)/(d1+d2)
            alpha(i-1)=d2*beta+beta_1
            beta_1=d1*beta
2        continue
         alpha(left)=beta_1
         l2=l2-1
1     continue
      return
      end
```

5.2 Računanje g-spline-ova sa zadanim skokom druge derivacije

Kubični gB-spline u prostoru $\mathcal{P}(4, \boldsymbol{m}, \Lambda, \Delta)$ uz jedinični vektor multipliciteta i vektore incidencije:

$$\Lambda_i = [1, 1, w_i]^T, \qquad i = 1, \dots k$$

može se reprezentirati kao linearna kombinacija lokalnih kubičnih B-spline-ova (usp. primjer 3.3.5). Koeficijenti u kombinaciji su diskretni spline-ovi koji čine particiju jedinice, i takva je reprezentacija izuzetno numerički stabilna. Neprekidnost funkcije i derivacije, te mogućnost upravljanja zakrivljenošću čini ovakve spline funkcije dobrim u aproksimacijama koje čuvaju oblik [17]. Za primjene je zgodno imati algoritam koji vraća sve netrivijalne gB-spline funkcije u danoj točki (program `KNOTINS` u glavi o g-spline-ovima računa sve gB-spline-ove, uključivši i one koji su nula). Slijedeća rutina `GSPL` računa gB-spline-ove kao u primjeru 3.3.3.

```
      subroutine GSPL(t,n,wcoef,left,biatx,giatx)
c
c     calculates all nontrivial cubic g-splines with
c     prescribed discontinuities in second derivatives
c     at the knots as linear combination of local cubic B-splines
c
c*****INPUT*****
c           t    = extended knot sequence
c           n    = number of knots
c           wcoef= prescribed jumps of secnd deriv.
c           left = integer such that t(left).le.x.lt.t(left+1)
```

```
c          biatx= vector of 4 local non-vanishing B-splines
c
c*****OUTPUT*****
c
c          giatx= vector of 4 non-vanishing gB-splines
c
c*****METHOD*****
c
c     All gB-splines which do not vanish on (t(left),t(left+1))
c     are obtained as linear combinations of hermite cubic
c     B-splines. The coeff's in linear combination are discrete
c     cubic splines, which are calculated explicitly according
c     to the Theorem on discrete splines in thesis. The knot
c     sequence T and coef's WCOEF are expected in the form
c
c     t(1)=t(2)=t(3)=t(4)<t(5)<...<t(n-3)=t(n-2)=t(n-1)=t(n)
c        w(1) w(2) w(3) w(4)   ...     w(n-3) w(n-2) w(n-1).
c
c     The value of first (last) three coef's in WCOEF is
c     irrelevant and thus may be set to 1. The jumps in
c     second deriv's are determined so as to make the
c     the L_2 derivative of spline s continuous:
c
c        WCOEF(i+1)DDs(T_i+)-WCOEF(i)DDs(T_i-)=0 .
c
c     W A R N I N G...The restriction WCOEF(i)>0 imposed by
c     the theory of Chebyshev systems is nowhere checked for.
c     Unpredicted results (though not meanigless!) as well
c     as floating point zero divide may result otherwise.
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
      dimension t(n),wcoef(1)
      dimension giatx(4),biatx(4),ds(-2:2),gamma(3)
c
c     calcluating measures of subintervals with repect to WCOEF
c
      do, i=-2,2
          ds(i)=(t(left+i+1)-t(left+i))/wcoef(left+i)
      enddo
c
c     If one wishes to consider the gB-splines on a biinfinite
c     mesh, then all gB-splines have support of four intervals,
c     and the following two IF..ENDIF constructions should be
c     left out; the WCOEF sequence should then be modified
c     accordingly, that is, the supposition:
```

```
c          w(1)=w(2)=w(3) and w(n-2)=w(n-1)
c     is no longer required. Else, the IF...ENDIF enforces
c     deBoor's maxime: anything times zero is zero.
c
      if (left.eq.4) then
            ds(-2)=1.d0
            ds(-1)=0.d0
      endif
      if (left.eq.n-4) then
            ds(1)=0.d0
            ds(2)=1.d0
      endif
c
c     normalisation factors
c
      do, i=1,3
          gamma(i)=ds(i-3)/(ds(i-3)+ds(i-2))*(t(left+i-1)-t(left+i-3))+
     +             t(left+i-1)-t(left+i-2)+
     +             ds(i-1)/(ds(i-2)+ds(i-1))*(t(left+i)-t(left+i-2))
      enddo
c
c     calculating gB-splines as linear combination of B-splines
c
      giatx(1)=biatx(1)/gamma(1)*ds(0)/(ds(-1)+ds(0))*
     +                           (t(left+1)-t(left-1))
      temp    =ds(1)/(ds(0)+ds(1))*(t(left+2)-t(left))
      giatx(2)=biatx(1)/gamma(1)*( ds(-2)/(ds(-2)+ds(-1))*
     +                  (t(left)-t(left-2))+t(left)-t(left-1) )+
     +         biatx(2)/gamma(2)*( t(left+1)-t(left)+temp ) +
     +         biatx(3)/gamma(2)*temp
      temp    =ds(-1)/(ds(-1)+ds(0))*(t(left+1)-t(left-1))
      giatx(3)=biatx(2)/gamma(2)*temp+
     +         biatx(3)/gamma(2)*(temp+t(left+1)-t(left))+
     +         biatx(4)/gamma(3)*( t(left+2)-t(left+1)+ds(2)
     +                 /(ds(1)+ds(2))*(t(left+3)-t(left+1)) )
      giatx(4)=biatx(4)/gamma(3)*ds(0)/(ds(0)+ds(1))*
     +                 (t(left+2)-t(left))
      return
      end
```

Rutina GSPL računa netrivijalne gB-spline-ove u x, ali ne ovisi o x, već ta ovisnost ulazi preko netrivijanih lokalnih kubičnih B-spline-ova (polje BIATX). Njih možemo generirati klasičnim deBoor-ovim algoritmom (v. BSPLVB u [4]), koji također lako možemo ugraditi u izmijenjenu rutinu. Čini se zgodnijim ostaviti mogućnost zamjene BSPLVB nekim drugim, skromnijim potprogramom, koji računa samo lokalne kubične spline-ove. "Driver" rutina koja pokreće `GSPL` mora sadržavati naredbe:

```
do i=1,2*n-9,2
      tau(i)  = t( (i+5)/2 )
      tau(i+1)= t( (i+5)/2 )
enddo
call INTERV (tau,2*n-8,x,ileft,mflag)
call BSPLVB(tau,4,1,x,ileft,biatx)
call INTERV (t,n,x,left,mflag)
call GSPL(t,n,wcoef,left,biatx,giatx)
```

Pri tom je `TAU` polje koje sadrži "profinjenu" mrežu potrebnu za generiranje lokalnih kubičnih spline-ova deBoor-ovom rutinom `BSPLVB`. Odnos između indeksa `LEFT` i `ILEFT`, definiranih tako da je za dano x

$$\mathtt{T(LEFT)} \leq x < \mathtt{T(LEFT+1)} \qquad \mathtt{TAU(ILEFT)} \leq x < \mathtt{TAU(LEFT+1)}$$

može se očito i unaprijed odrediti, bez još jednog poziva rutine za binarno pretraživanje.

5.3 Funkcije paraboličkog cilindra

Kao test primjer u glavi o kolokaciji iracionalnim spline funkcijama koristili smo rubni problem

$$D\sqrt{x}Du(x) - \sqrt{x}u(x) = 0, \tag{5.1}$$

uz rubne uvjete

$$u(0) = 1, \qquad u(1) = 0 \tag{5.2}$$

kao modelni primjer kod kojeg $\sqrt{x}Du \notin C^2[0,1]$ iako je $u \in C^\infty(0,1]$. Uz supstituciju $t = 2\sqrt{x}$ jednadžba glasi

$$D^2u(t) - \frac{t^2}{4}u(t) = 0$$

uz rubne uvjete

$$u(0) = 1, \qquad u(2) = 0.$$

Rješenje je

$$u(t) = AU(0,t) + BU(0,t)$$

gdje su U, V definirane pomoću funkcija paraboličkog cilindra K i J:

$$\begin{aligned} U(0,t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{t}{2})^{1/2}K_{1/4}(\frac{t^2}{4}) \\ V(0,t) &= \frac{1}{2}(\frac{t}{2})^{1/2}J_{1/4}(\frac{t^2}{4}). \end{aligned}$$

(Vidi: [1, 19.15.9 i 19.15.13]). Konstante A i B odredimo iz rubnih uvjeta ($A \approx 0.893098$ $B \approx -0.12571$. Stoga je

$$u(x) = AU(0, 2\sqrt{x}) + BV(0, 2\sqrt{x})$$

i, kada $x \to 0$, $u'(x)$ se ponaša kao $\frac{1}{\sqrt{x}}[AU'(0,0) + BV'(0,0)]$. Kako je ([1, 19.3.5 i 19.3.6])

$$\begin{aligned} U'(0,0) &= -\frac{\sqrt{\pi}2^{1/4}}{\Gamma(\frac{1}{4})} \\ V'(0,0) &= \frac{2^{1/4}}{\Gamma(\frac{1}{4})} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} 2^{1/4} &= 1.18920711500272 \\ \sqrt{\pi} &= 1.77245385090552 \\ \Gamma(\frac{1}{4}) &= 3.625609908221908 \end{aligned}$$

slijedi da je u okolini nule

$$u'(x) \approx -0.560457421136\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Slijedeći program računa (analitičko) rješenje rubnog problema koristeći razvoj funkcija paraboličkog cilindra po potencijama (v. [1, 19.2]).

```
      subroutine dpcy12(a,x,y1,y2)
c
c     The parabolic cylinder functions y1(a,x) and y2(a,x)
c     according to Abramowitz,Stegun: Handbook of Math. Functions,
c     relations 19.2.5 - 19.2.7;
c     EPS is chosen so as to calculate y1,y2 to almost machine
c     precision on a PC. Should be changed to machine epsilon.
c
c*****INPUT****
c           a = parameter in difequ
c           x = point at which we seek the values of y1(x), y2(x)
c*****OUTPUT****
c           y1,y2 = two linearly independent solutions at x
c                   of difequ: DDy+(x**2/4-a)y=0
c
      implicit double precision (a-h,o-z)
```

```
      dimension y(2),p(2),t(2),c(6)
      eps=2.d-16
      s=x*x
      c(1)=1.d0
      c(2)=1.d0
      c(3)=a
      c(4)=a
      p(1)=s/2.d0
      p(2)=s/6.d0
      y(1)=1.d0+a*p(1)
      y(2)=1.d0+a*p(2)
      do 2 i=1,100,2
         do 1 k=1,2
            q=i+k
            c(k+4)=a*c(k+2)+0.25d0*q*(q-1.d0)*c(k)
            p(k)=p(k)*s/((q+1.d0)*(q+2.d0))
            c(k)=c(k+2)
            c(k+2)=c(k+4)
            t(k)=c(k+2)*p(k)
  1      y(k)=y(k)+t(k)
         if(mod(i,4).eq.3) go to 2
         if(dabs(t(1)/y(1)).lt.eps.and.dabs(t(2)/y(2)).lt.eps) go to 3
  2   continue
      stop
  3   y1=y(1)
      y2=x*y(2)
      return
      end
```

Rješenje modelnog primjera je oblika

$$u(t) = y_1(0,t) - \text{const}.y_2(0,t)$$

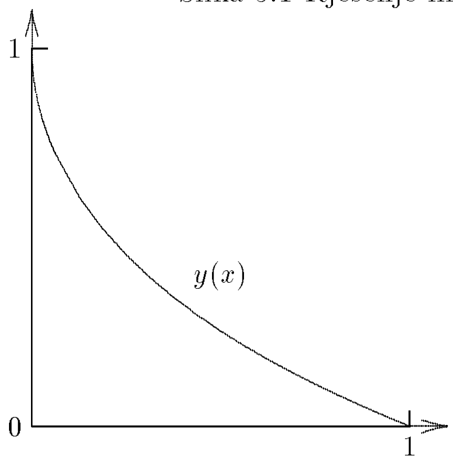
gdje su y_1, y_2 funkcije paraboličkog cilindra kao u programu, dok se konstanta const. može dobiti iz omjera u točki $t = 2$:

```
      call dpcy12(0.d0,2.d0,y12,y22)
      const=-y12/y22
```

Na slici 5.1 prikazano je rješenje rubnog problema (5.1, (5.2) generirano programom `DPCY12`:

$y(x) = y_1(x) - .560457 \cdot y_2(x)$			
x	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y(x)$
.0000	1.000000	.000000	1.000000
.1250	1.005214	.709318	.607671
.2500	1.020926	1.012544	.453439
.3750	1.047348	1.259461	.341474
.5000	1.084833	1.485912	.252042
.6250	1.133885	1.707373	.176975
.7500	1.195163	1.933084	.111752
.8750	1.269493	2.169726	.053454
1.0000	1.357877	2.422801	.000000

Slika 5.1 Rješenje modelnog singularnog rubnog problema



Sažetak

Izvodi se rekurzivna relacija za derivacije Čebiševljevih spline funkcija. U slučaju težina koje su po dijelovima konstantne, pokazuje se da se može konstruirati algoritam za računanje lokalnih baza B–spline-ova za paraboličke i kubične spline-ove sa skokovima u derivacijama. Za hermitske spline-ove dobivena je općenita dvočlana rekurzija deBoor–Cox-ovog tipa. Za kubične spline-ove sa skokovima u drugim derivacijama opisan je stabilan algoritam za dodavanje čvorova i problem računanja lokalne baze spline-ova potpuno riješen. Neki Čebiševljevi i polinomni spline-ovi upotrijebljeni su u metodama kolokacionog tipa za rješavanje rubnih problema. Diskutiraju se algoritmi za numeričko rješavanje tih problema i izbor optimalnih točaka kolokacije.

Summary

A recurrence relation for derivatives of Chebyshev splines is developed. In case of piecewise constant weights, it is shown that an algorithm for computing local basis of B–splines can be deduced for parabolic and cubic splines with jumps in derivatives. For hermitic splines a most general two–term recursive relation of deBoor–Cox type is obtained. A stable knot insertion algorithm is given for cubic splines with jumps in second derivatives, and a problem of computing a local basis thus solved completely. Some Chebyshev and polynomial splines are used in methods of collocation type for solving boundary value problems. Algorithms for solving these problems numerically, and an optimal choice of collocation points are discussed.

Literatura

[1] M. Abramowitz, I. Stegun: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, AMS ser.55, (1964)

[2] R. E. Bellman and R. E. Kalaba: Quasilinearisation and Nonlinear Boundary-Value Problems, American Elsevier Publ. Co., N.Y., (1965)

[3] F. Chatelin: Spectral Approximation of Linear Operators, Academic Press, N.Y., (1983)

[4] C. deBoor: A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, N.Y., (1978)

[5] C. deBoor, B. Swartz: Collocation at Gaussian points, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 10 No 4., 582-606 (1973)

[6] C. deBoor: On Calculating with B-splines, J. of Approx. Theory 6, 50-62 (1972)

[7] C. deBoor: Local Piecewise Polynomial Projection Methods for an O.D.E. Which Give High-Order Convergence at Knots, Math. Comp. 36, No.153, 21-33 (1981)

[8] F.R.de Hoog, R. Weiss: Difference Methods for Boundary Value Problems with a Singularity of the First Kind, SIAM J. Numer. Anal. 13, No.5, 775-813 (1976)

[9] F.R.de Hoog, R. Weiss: Collocation Methods for Singular Boundary Value Problems,SIAM J. Numer. Anal. 15, No.5, 198-217 (1978)

[10] K. R. Butterfield: The Computation of all the Derivatives of a B-spline Basis, J. Inst. Maths Applics 17, 15-25 (1976)

[11] E. Cohen, T. Lyche, R. Riesenfeld: Discrete B-splines and Subdivision Techniques in Compter-Aided Geometric Design and Computer Graphics, Comp. Graphics and Image Processing 14, 87-111 (1980)

[12] E. Cohen, T. Lyche, L.L. Schumaker: Degree Raising for Splines, J. of Approx. Theory 46, 170-181 (1986)

[13] W. A. Coppel: Disconjugacy, Lecture notes in Math.,220, Springer-Verlag, N.Y., (1971)

[14] M. G. Cox: Practical spline approximation, NPL Report 1/82, 1982.

[15] P. G. Ciarlet, F. Natterer, R. S. Varga: Numerical Methods of High-Order Accuracy for Singular Boundary Value Problem, Numer. Math. 15, 87-99 (1970)

[16] E.J. Doedel, G.W. Reddien: Finite Difference Methods for Singular Two-Point Boundary Value Problems, SIAM J. Numer. Anal. 21, No.2, 300-313 (1984)

[17] T. A. Foley: A shape preserving interpolant with tension controls, CAGD 5, 105-118 (1988)

[18] I.G. Graham, I.H. Sloan: On the Compactness of Certain Integral Operators, J. Math. Anal. Appl. 68, 580-594 (1979)

[19] P. Jamet: On the Convergence of Finite–Difference approximations to One–Dimensional Singular Boundary value Problems, Numer. Math. 14, 87-99 (1970)

[20] J.W. Jerome: On Spline functions Determined by Singular Self-Adjoint Differential Operators, J. of Approx. Theory 5, 15-40 (1972)

[21] J.W. Jerome, L.L. Schumaker: Local Support Bases for a Class of Spline Functions, J. of Approx. Theory 16, 16-27 (1976)

[22] S. Karlin, "Total positivity", Stanford Univ. Press, Stanford, Calif. (1968)

[23] S. Karlin, W.J.Studden: "Tchebycheff Systems: with Applications in Analysis and Statistics", Interscience, N. Y. (1966)

[24] Per Erik Koch: Collocation by L-splines at Gaussian Points, Research report, Inst. of Informatics, Oslo (1982)

[25] Some Collocation Methods for Nonlinear Boundary Value Problems, SIAM J. Numer. Anal. 9, No.2 341-356 (1972)

[26] T. Lyche: A Recurrence Relation for Chebyshevian B–splines, Constr. Approx. 155-173, (1985)

[27] T. Lyche: Chebyshevian B-splines and Knot Insertion, private communication

[28] T. Lyche, R. Winther: A stable recurrence relation for Trigonometric B-splines, J. of Approx. Theory 25, 166-279 (1979)

[29] G. Mülbach: A Recurrence Formula for Generalized Divided Differences and Some Applications, J. of Approx. Theory 9, 165-172 (1973)

[30] M. A. Naimark: Linear Differential operators, part II, F. Ungar publ. co. ,N. Y. (1968)

[31] F. Natterer: Über die punktweise Konvergenz Finiter Elemente, Numer. Math. 25, 67-77 (1975)

[32] J.A. Nitsche: Der Einflußvon Randsingularitäten beim Ritzchen Verfahren, Numer. Math. 25, 263-278 (1976)

[33] G. Nürnberger: Approximation by Spline Functions, Springer–Verlag,Berlin (1989)

[34] S. V. Parter: Numerical Methods for Generalized Axially Symmetric Potentials, J. SIAM ser. B Numer. Anal. 2, 500-516 (1965)

[35] S. Pruess: Solving Linear Boundary Value Problems by Approximating the Coefficients, Math. Comp. 27, No.123, 551-561 (1973)

[36] S. Pruess: Estimating the Eigenvalues os Sturm-Liouville Problems by Approximating the Differential Equation, SIAM J. Numer. Anal. 10, No.1, 55-68 (1973)

[37] S. Pruess: Achieving Global Error Control in SLEDGE, a material presented at the Gregynog Workshop on Spectral Computation, July 1993., Gregynog, Wales

[38] S. Pruess, C. Fulton: Routines for `SLEDGE`, Release 2.2 04/12/93, S. Pruess, private communication

[39] G. W. Reddien: Projection Methods and Singular Two Point Boundary Value Problems, Numer. Math. 21, 193-205 (1973)

[40] G. W. Reddien, L. L. Schumaker: On a Collocation Method for Singular Two Point Boundary Value Problems, Numer. Math. 25, 427-432 (1976)

[41] G. W. Reddien: Projection Methods for Two-point Boundary Value Problems, SIAM J. Review 22, No 2., 156-171 (1980)

[42] Rong-Qing Jia, Total Positivity of the Discrete Spline Collocation Matrix, J. of Approx. Theory 39, 11-23 (1983)

[43] M. Rogina: TB-spline funkcije i primjene, magisterij, Prirodoslovno matematički fakultet sveučilišta u Zagrebu (1984)

[44] M. Rogina: Basis of Splines Associated with Some Singular Differential Operators, **BIT** 32, 496-505 (1992)

[45] M. Rogina: Collocation by Tchebycheffian Splines of order 3, VI Seminar iz primijenjene matematike, Zbornik radova, 174-182 (1989) B.Jovanović ed.,Bg.

[46] R.D. Russell, L.F. Shampine: Numerical Methods for Singular Boundary Value Problems, SIAM J. Numer. Anal. 12, No.1, 13-36 (1975)

[47] M. Sakai, R.A. Usmani: On Exponential Splines, J. of Approx. Theory 47, 122-131 (1986)

[48] K. Scherer, L. Schumaker: A Dual Basis for L-splines and Applications, J. of Approx. Theory 29, 151-169 (1980)

[49] R. Schreiber, S. Eisenstat: Finite Element Methods for Spherically Symmetric Elliptic Equations, SIAM J. Nmer. Anal. 18, No.3, 546-558 (1981)

[50] L. L. Schumaker: On Tchebycheffian Spline Functions, J. of Approx. Theory 18, 278-303 (1976)

[51] L. L. Schumaker: On Recursions for Generalized Splines, J. of Approx. Theory 36, 16-31 (1982)

[52] L. L. Schumaker: Spline Functions: Basic Theory, John Wiley and Sons, N.Y., (1981)

[53] L. L. Schumaker: On Hyperbolic Splines, J. of Approx. Theory 38, 144-166 (1983)

[54] M. Sommer, H. Strauss: Weak Descartes Systems in Generalized Spline Spaces, Constr. Approx. 4, 133-145 (1988)

[55] K.A. Wittenbrink: High Order Projection Methods of Moment and Collocation Type for Nonlinear Boundary Value Problems, Computing 11, 255-274 (1973)

[56] Yuesheng Li: On the Recurrence Relations for B-splines Defined by Certain L-splines, J. of Approx. Theory 43, 359-369 (1985)

Indeks

Curriculum vitae

Rođen sam 16.1.1957. u Zagrebu. Pohađao sam 5. gimnaziju, sudjelovao na nekoliko saveznih natjecanja iz matematike i fizike. Godine 1975. upisao sam studij matematike na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu sveučilišta u Zagrebu. Diplomirao sam na smjeru "primijenjena matematika" 1980. i te iste godine upisao postdiplomski studij iz matematike na istom fakultetu. Od 1.10.1980. izabran sam za asistenta iz teorije upravljanja i optimizacije, prvo na određeno a kasnije i na neodređeno vrijeme. 1983. god. biran sam za asistenta iz numeričke analize i mehanike kontinua. U razdoblju od 1980. do 1984. godine bavio sam se problemima iz metode konačnih elemenata, a kasnije i teorijom spline–funkcija. Magistrirao sam 1984. obranivši magistarski rad pod nazivom "TB– spline funkcije i primjene". Od 1985. god. na dalje radim na razvoju algoritama za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi, naročito na metodama tipa projekcije, koristeći pri tom Čebiševljeve i L-spline-ove. Većina rezultata je objavljena u domaćim i inozemnim časpoisima, te referirana na znanstvenim skupovima i seminarima. U isto vrijeme radio sam i na problemima iz teorijske fizike u suradnji sa zavodom za teorijsku fiziku Prirodoslovno–matematičkog fakulteta u Zagrebu i institutom Ruđer Bošković. Ovaj rad bio je vezan uz neke matematičke probleme kako teorijske, tako i numeričke prirode (računanje singularnih integrala, rješavanje diferencijalnih jednadžbi). Od 1.11.1992. do 1.7.1993. sudionik sam domovinskog rata, a poslije demobilizacije volonter i suradnik Hrvatskog Crvenog križa, gdje sam pomogao u razvoju informatičkog sustava službe traženja. Od tada do 1994. bavim se konstrukcijom baza generaliziranih spline funkcija, te aproksimacijama koje čuvaju monotonost i konveksnost podataka.