Diskretna matematika

Zadaci za vježbu - drugi ciklus 2008/2009

1. Nađite sve Pitagorine trokute kojima je jedna stranica jednaka

   a) 15;

   b) 20;

   c) 29;

   d) 38.

2. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak broja

   a) $\frac{51}{97}$;

   b) $\frac{101}{31}$;

   c) $\frac{58}{269}$.

3. Odredite razvoj u jednostavni verižni razlomak broja

   a) $\sqrt{23}$;

   b) $\sqrt{47}$;

   c) $\sqrt{57}$.

4. Nađite najmanje rješenje u prirodnim brojevima Pellove jednadžbe $x^2 - 71y^2 = 1$.

5. Nađite sva rješenja Pellove jednadžbe $x^2 - 146y^2 = 1$ za koja vrijedi $1 < x < 100000$.

6. Neka je X skup svih funkcija $f : S \to G$ sa skupa S u grupu $(G, \cdot)$. Na X je definirana binarna operacija $*$ na sljedeći način:

   $$(f * g)(s) = f(s) \cdot g(s), \quad f, g \in X,\ s \in S.$$

   Dokažite da je $(X, *)$ grupa.

7. Odredite red
   a) elementa i u grupi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$;
   b) elementa 4 u grupi $(\mathbb{Z}_6, +_6)$;
   c) elementa 4 u grupi $(\mathbb{Z}_7, +_7)$;
   d) elementa 4 u grupi $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot_7)$.

8. Neka je H normalna podgrupa grupe G i neka su $a, b \in G$. Dokažite da vrijedi:
$$ab \in H \quad \Longleftrightarrow \quad ba \in H.$$

9. Jesu li grupe $(\mathbb{Z}, +)$ i $(2\mathbb{Z}, +)$ izomorfne?

10. Jesu li grupe $\mathbb{Z}_{12}$ i $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ izomorfne?

11. Neka je $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ multiplikativna grupa racionalnih brojeva različitih od nule, te neka je $\varphi : \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ preslikavanje zadano sa $\varphi(x) = x^2$. Dokažite da je φ homomorfizam grupa, te odredite jezgru $\operatorname{Ker} \varphi$ i sliku $\operatorname{Im} \varphi$.

12. Dokažite da brojevi oblika $a + b\sqrt{5}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, uz uobičajeno zbrajanje i množenje, čine polje. Odredite inverz, obzirom na množenje, elementa $x = 2 - 3\sqrt{5}$. Je li to polje izomorfno polju racionalnih brojeva $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$?

13. Dokažite da matrice oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, gdje su a i b racionalni brojevi, uz uobičajeno zbrajanje i množenje matrica, čine polje.

14. Dokažite da je polinom $g(t) = t^3 + t + 1$ ireducibilan nad $\mathbb{Z}_2$. Nađite jedan generator multiplikativne grupe $\mathbb{F}_8^*$ polja $\mathbb{F}_8$ reprezentiranog kao $\mathbb{Z}_2[t]/(g(t))$. Odredite inverz elementa $a = t + 1$ u $\mathbb{F}_8^*$.