VJEROJATNOST
2010/2011
ZADAĆA 2

1) Pokažite da su normalna i Cauchyjeva razdioba stabilne, a Poissonova nije (v. dno str. 142 u Durrett (2010) za def. stabilnosti).

2) Neka su (Y_n) sluč. varij. s karakterističnim funkcijama φ_n. Pokažite: $Y_n \xrightarrow{d} 0 \iff$ postoji $\delta > 0$ t.d. $\varphi_n(t) \to 1$ za sve $|t| \leq \delta$.

3) Neka su (X_i) n.j.d., $EX_i = c$, $\sigma^2 = \mathrm{Var}\, X_i \in (0, \infty)$ t.d. $\sqrt{n}(\bar{X}_n - c) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$ za $\bar{X}_n = S_n / n$. Ako je f derivabilna u točki c i $f'(c) \neq 0$, pokažite da vrijedi $\sqrt{n}(f(\bar{X}_n) - f(c)) \xrightarrow{d} N(0, a)$. Odredite a. (Uputa: koristite teorem 3.2.2, Durrett (2010)).

4) Neka su $c, \varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funkcije t.d. $\lim_{x \to \infty} c(x) = c \in (0, \infty)$, $\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0$. Pokažite:

$$L(x) = c(x) \exp\left[\int_1^x \varepsilon(t)/t \, dt\right], \quad x > 0$$

je sporo promjenjiva (tzv. Karamatina reprezentacija sp. pr. fja.).