KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE I SLABA KONVERGENCIJA

TEOREM 14 (teorem neprekidnosti)

Neka su $\mu_n, n \geq 1$, vj. mjere s karakter. funkcijama φ_n, tada

i) Ako $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$ tada $\varphi_n(t) \to \varphi(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

ii) Ako $\varphi_n(t)$ konvergira po točkama prema limesu $\varphi(t)$ koji je neprekidan u 0, tada je niz distribucija (μ_n) napet i

$$\mu_n \xrightarrow{w} \mu \quad \text{gdje} \quad \varphi_\mu = \varphi.$$

Dokaz

i) je lako dokazati $x \mapsto e^{itx}$ je omeđena i neprekidna $\Rightarrow$ $\int e^{itx}\mu_n(dx) \longrightarrow \int e^{itx}\mu(dx)$

ii) Pokazat ćemo prvo napetost.

Uočite
$$\int_{-u}^{u}(1-e^{itx})\,dt = 2u - \int_{-u}^{u}(\cos tx + i\sin tx)\,dt$$
$$= 2u - \frac{2\sin ux}{x} \qquad / : u \ \& \int \mu_n(dx)$$

Fubini $\Rightarrow$
$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u}(1-\varphi_n(t))\,dt = 2\int\left(1-\frac{\sin ux}{ux}\right)\mu_n(dx)$$

Kako je $$|\sin x| \le \left|\int_0^x \cos(y)\,dy\right| \le |x| \quad \forall x$$

$\Downarrow$

$$1 - \frac{\sin ux}{ux} \ge 0$$

Na d.s. u ■ možemo ograničiti integral na $|x| \ge 2/u$ i iskoristiti $|\sin ux| < 1$ da bismo dobili donju ogradu

$$\ge 2 \int_{|x| \ge 2/u} \left(1 - \frac{1}{|ux|}\right) \mu_n(dx) \ge \mu_n(\{x : |x| \ge 2/u\}) \qquad ▲$$

Kako $\varphi(t) \to 1$ za $t \to 0$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1 - \varphi(t))\,dt \to 0 \quad \text{za } u \to 0$$

No $\quad \varphi_n(t) \to \varphi(t)\ \forall t \quad$ povlači

$$\int_{-u}^{u} \varphi_n(t)\,dt \to \int_{-u}^{u} \varphi(t)\,dt \qquad \text{po t.d.k.}$$

Stoga $\quad \displaystyle\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1-\varphi_n(t))\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1-\varphi(t))\,dt$

$\Rightarrow \forall \varepsilon \quad \exists\, u >$ t.d. $\quad \displaystyle\frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1-\varphi(t))\,dt < \varepsilon$

ali $\exists$ i $N \in \mathbb{N}$ t.d. $\forall n \geq N$

$$2\varepsilon \geq \frac{1}{u}\int_{-u}^{u} (1-\varphi_n(t))\,dt \overset{(A)\,\&\,(B)}{\geq} \mu_n\left(\left\{x : |x| > \frac{2}{u}\right\}\right)$$

Budući je $\varepsilon > 0$ proizvoljan $\Rightarrow$
niz (μ_n) je napet

Nadalje ako $\mu_{n_k} \xrightarrow{w} \mu$ prema i)

μ ima karakt. fju φ, tj. pokazali smo
i jedinstvenost

$\square$

NAP $\mu(\{x : |x| > 2/u\}) \leq 1/u \int_{-u}^{u} (1-\varphi(t))\, dt$
jasno ukazuje da glatkoća od φ oko 0
utiče na brzinu opadanja vj. mase od μ.
To se može i dalje istraživati.

MOMENTI I DERIVACIJE

PROPOZICIJA 15

Ako je $\int |x|^n \mu(dx) < \infty$ (tj. $E|X|^n < \infty$)

tada φ ima neprekidnu derivaciju reda n

danu formulom

$$\varphi^{(n)}(t) = \int (ix)^n e^{itx} \mu(dx)$$

Dok. t.d.k. omogućuje derivaciju unesti pod integral.

Posebno je dakle

$$\varphi^{(n)}(0) = E\left[(iX)^n\right]$$

LEMA 16

$$\left| e^{ix} - \sum_{m=0}^{n} \frac{(ix)^m}{m!} \right| \leq \min\left\{ \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!} \right\}$$

Glej v. knjigo, ova gornja ograda je koristna za velike $|x|$ posebno jer tada je drugi član na d.s. bitno manji.

Primjenimo li gornju lemu na $x = tX \Rightarrow$

$$\left| E e^{itX} - \sum_0^n E \frac{(itX)^m}{m!} \right| \leq E \left| e^{itX} - \sum_0^n \frac{(itX)^m}{m!} \right|$$

$$\leq E \min \left\{ \frac{|tX|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|tX|^n}{n!} \right\} \Rightarrow$$

TEOREM 17

Ako je $E|X|^n < \infty$ tada

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^n \frac{E(itX)^m}{m!} + o(t^n) = \sum_{m=0}^n \frac{t^m}{m!} \varphi^{(m)}(0) + o(t^n)$$

Jer

$$\left| \varphi(t) - \sum_{m=0}^{n} \frac{E(itX)^m}{m!} \right| \le t^n \, E \min\left\{ |t| \frac{|X|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|X|^n}{n!} \right\}$$

Izraz u zagradi je za $t \to 0$ ograničen sa integrabilnom sl. var. $2|X|^n$, pa očekivanje ide k 0 za $t \to 0$ (t.d.k. opet) $\square$

NAP U c.g.t. bit će vrlo korisno što nam je za aproksimaciju kar. fje 2. reda dovoljan 2. moment.

TEOREM 18 (slabi zakon i karakt. fje)

Neka su $X_1, X_2, \ldots$ n.j.d. s karakterističnom fjom φ. Ako postoji $\varphi'(0) = ia$ tada

$$S_n/n \xrightarrow{P} a.$$

Obrnuto ako $S_n/n \xrightarrow{P} a$ tada $\varphi(\frac{t}{n})^n \to e^{iat}$ i postoji $\varphi'(0) = ia$

NAP) Kako sl. z. v. b. vrijedi ponekad i ako $E|X| = \infty$ postojanje $\varphi'(0)$ ne implicira $E|X| < \infty$.