TEOREM 4 Ako $F_n \xrightarrow{d} F$ tada postoji vj. prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i sluč. varijable Y_n, Y t.d. $F_{Y_n} = F_n$, $F_Y = F$ & $Y_n \xrightarrow{g.s.} Y$.

...

DEF Ako je F funkcija distribucije, tada funkciju

$$F^{\leftarrow}(x) = \sup\{y : F(y) < x\}, \quad F^{\leftarrow} : (0,1) \to \mathbb{R}$$

nazivamo generalizirani inverz funkcije F.

Alternativno:

$$F^{\leftarrow}(x) = \inf\{y : F_n(y) \geq x\}$$

$F^{\leftarrow}$ je naravno monotono rastuća.

—

Dem Neka je $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(0,1)$, $\mathbb{P} =$ Leb. mj.

Definiramo

$$Y_n(x) = F_n^{\leftarrow}(x) \qquad x \in (0,1)$$

$$Y(x) = F^{\leftarrow}(x) \qquad x \in (0,1)$$

Direktno se provjeri da: $F_Y = F$, $F_{Y_n} = F_n$.

Pokazat ćemo

$$Y_n(x) \longrightarrow Y(x)$$

za sve osim najviše prebrojivo x.

Neka

$$a_x = \sup\{y : F(y) < x\}$$

$$b_x = \inf\{y : F(y) > x\} \qquad x \in (0,1)$$

$\Omega_0 = \{ x : (a_x, b_x) = \emptyset \}$ tj. za x u Ω_0 F raste striktno oko $F^{\leftarrow}(x)$

$\Downarrow$

Ω_0^c = najviše prebrojiv

(svaki $x \in \Omega_0^c$ određuje jedan otv. interval disjunktan sa ostalima)

Za $x \in \Omega_0$, $F(y) < x$ za $y < F^{\leftarrow}(x)$ i

$F(z) > x$ za $z > F^{\leftarrow}(x)$

Pokažimo

$x \in \Omega_0 \Rightarrow F_n^{\leftarrow}(x) \to F^{\leftarrow}(x)$, u 2 koraka

a) $\liminf F_n^{\leftarrow}(x) \geq F^{\leftarrow}(x)$

Nađimo $y < F^{\leftarrow}(x)$, td. F neprekidna u y

Kako $x \in \Omega_0 \Rightarrow F(y) < x$

$\Rightarrow$ za sve n dovoljno velike $F_n(y) < x$

$\Rightarrow F_n^{\leftarrow}(x) \geq y$ $\forall$ takav y i n ✓
pa onda i $\forall y < F^{\leftarrow}(x)$

b) $\limsup F_n^{\leftarrow}(x) \leq F^{\leftarrow}(x)$

Nađimo $y > F^{\leftarrow}(x)$ td. F neprekidna u y

Kako $x \in \Omega_0 \Rightarrow F(y) > x$

$\Rightarrow$ za sve n dovoljno velike $F_n(y) > x$

$\Rightarrow F_n^{\leftarrow}(x) \leq y$ $\forall$ takav y i n ✓
pa onda i $\forall y > F^{\leftarrow}(x)$ $\square$

Posljedica tm 4 je npr sljedeće poopćenje Fatouove leme

$$g \text{ neprek.},\ X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow \liminf Eg(X_n) \geq Eg(X)$$

te sljedeća karakterizacija konvergencije po distribuciji

TEOREM 5 $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow$ za svaku ograničenu neprekidnu funkciju g vrijedi

$$Eg(X_n) \to Eg(X).$$

Dokaz

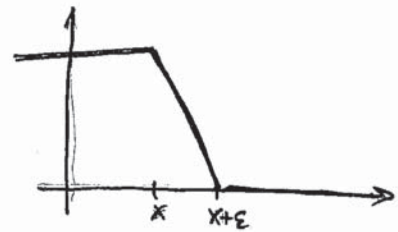
(⇒) Po tm 5 $\exists\ Y_n, Y$ t.d. $X_n \stackrel{d}{=} Y_n,\ X \stackrel{d}{=} Y$ & $Y_n \xrightarrow{g.s.} Y$

Kako je g neprek, tm o domin. konv. povlači:

$$Eg(X_n) = Eg(Y_n) \to Eg(Y) = Eg(X).$$

(⇐)

$$g_{x,\varepsilon}(y) = \begin{cases} 1 & y \le x \\ 0 & y \ge x+\varepsilon \\ \text{linearno} & \text{između} \end{cases}$$



$$\limsup P(X_n \le x) \le \limsup E g_{x,\varepsilon}(X_n) = E g_{x,\varepsilon}(X)$$

$$\le P(X \le x+\varepsilon) \qquad \text{pustimo } \varepsilon \to 0$$

$\Downarrow$

$$\limsup P(X_n \le x) \le P(X \le x)$$

Za obrnutu nejednakost uočimo

$$\liminf_n P(X_n \le x) \ge \liminf E g_{x-\varepsilon,\varepsilon}(X_n) = E g_{x-\varepsilon,\varepsilon}(X)$$

$$\ge P(X \le x-\varepsilon)$$

Ako je x točka neprekidnosti od F_X
pustimo $\varepsilon \to 0 \Rightarrow$

$$\liminf P(X_n \le x) \ge P(X < x). \qquad \square$$

TEOREM 6 (o neprek. preslikavanju)

Neka je g izmj. funkcija, $D_g = \{x : g \text{ ima prekid u } x\}$. Ako $X_n \xrightarrow{d} X$ & $P(X \in D_g) = 0$, tada $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$; ako je g ogr. vrijedi i $Eg(X_n) \to Eg(X)$.

Dokaz Uočimo D_g je izmjeriv skup (D.Z.)

Opet konstruiramo $X_n \stackrel{d}{=} Y_n \xrightarrow{g.s.} Y \stackrel{d}{=} X$.

Ako je f neprek. $D_{f\circ g} \subseteq D_g$

$\Rightarrow \quad P(Y \in D_{f\circ g}) = 0$

$\Rightarrow \quad f(g(Y_n)) \xrightarrow{g.s.} f(g(Y))$

Ako je f ogr. tm. o dom. konv. $\Rightarrow E f(g(Y_n)) \to E(f(g(Y)))$

Zadnja tvrdnja također slijedi iz tm. o dom. konvergenciji

$\square$

TEOREM 7

Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne

i) $X_n \xrightarrow{d} X$

ii) $\forall$ otvoreni G $\quad \liminf_n P(X_n \in G) \geq P(X \in G)$

iii) $\forall$ zatvoreni K $\quad \limsup P(X_n \in K) \leq P(X \in K)$

iv) $\forall$ skup A t.d. $P(X \in \partial A) = 0$

$$\lim P(X_n \in A) = P(X \in A)$$

Dokaz i) $\Rightarrow$ ii) uzmemo opet $\overset{\overset{d}{=} X_n}{Y_n} \xrightarrow{g.s.} Y \overset{d}{=} X$

ako $Y \in G \Rightarrow$ za sve dov. velike n $\quad Y_n \in G$ s vjeroj. 1

$\Rightarrow \quad \liminf 1_G(Y_n) \geq 1_G(Y)$, Fatou $\Rightarrow$ ii)

Pokaže se još ii) $\Leftrightarrow$ iii) ; iii) & ii) $\Rightarrow$ iv) ; iv) $\Rightarrow$ i) (D.Z.)

$\square$

NAP Da biste zapamtili nejednakosti u ii), iii)

npr. $X_n \equiv x_n \xrightarrow{=1/n} \overset{=0}{x} \equiv X$, $G = (0, \infty)$

kako $x_n \in G$, $x_n \to x \in \partial G$

$$P(X_n \in G) = 1 \quad \forall n \,, \; P(X \in G) = 0 \,.$$

Za iii) stavimo $K = (-\infty, 0]$

TEOREM 8 (Hellyjev teorem)

Za svaki niz f-ja distribucija $(F_n)_n$ postoji podniz $(F_{n(k)})_k$ i zdesna neprek. monot. rastuća f-ja F t.d.

$$F_{n(k)}(y) \to F(y) \quad \text{za } \forall y \in C(F).$$

Jasno F ne mora biti f-ja distribucije (no je Stieltjesova funkcija, pa određuje mjeru), npr

$$F_n \sim U(n-1, n) \quad \longrightarrow \quad F \equiv 0$$

naime vj. masa pobjegne u $+\infty$!!

Ako $F_n \xrightarrow{w} F$ kažemo da i pripadne mjere zadovoljavaju $\mu_{F_n} \xrightarrow{w} \mu_F$

U gornjem primjeru i općenito i u tm 8 dio vjerojatnosne mase može pobjeći u ± beskonačno, kažemo da za pripadne mjere vrijedi

$$\mu_{F_n} \xrightarrow{v} \mu_F$$

<u>vague convergence</u>

Dem. $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ na $\{F_m(q_1)\}_m$ je omeđen

$\Rightarrow \exists$ podniz $m_1(i) \to +\infty$ t.d.

$$F_{m_1(i)}(q_1) \to G(q_1)$$ ← oznaka za limes

nastavimo induktivno

$\forall k > 1$ $\{F_m(q_k)\}_m$ je omeđen pa

$\Rightarrow \exists$ podniz $m_k(i) \to \infty$ podniz od $m_{k-1}(i)$

t.d. $$F_{m_k(i)}(q_k) \longrightarrow G(q_k) \qquad i \to \infty$$

Stavimo $$n(k) = m_k(k)$$ ← dijagonalni podniz

$$\Rightarrow \quad F_{n(k)}(q) = F_{m_k(k)}(q) \longrightarrow G(q) \qquad \forall q \in \mathbb{Q}$$

Definiramo $F(x) = \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q}, q > x\}$

tada je F neopadajuća, zdesna neprek,

zaista

$$\lim_{x_n \searrow x} F(x_n) \overset{*}{=} \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q},\ q > x_n \text{ za neki } n\}$$

$$= \inf\{G(q) : q \in \mathbb{Q},\ q > x\} = F(x)$$

Preostaje pokazati

$$F_{n(k)}(x) \to F(x) \qquad x \in C(F)$$

uzmimo $r_1, r_2, s \in \mathbb{Q}$ t.d. $r_1 < r_2 < x < s$
i $\varepsilon > 0$

$$F(x) - \varepsilon < F(r_1) \leq F(r_2) \leq F(x) \leq F(s) < F(x) + \varepsilon$$

kako

$$F_{n(k)}(r_2) \to G(r_2) \geq F(r_1) \quad \text{i}$$

$$F_{n(k)}(s) \to G(s) \leq F(s)$$

$\Downarrow$

za dovoljno veliki k

$$F(x) - \varepsilon < F_{n(k)}(r_2) \leq F_{n(k)}(x) \leq F_{n(k)}(s) \leq F(x) + \varepsilon$$

$\square$

NAPETOST

Ako želimo spriječiti gubitak vjeroj. mase u nizu $(F_n)_n$ treba nam dodatna pretpostavka

$\boxed{\text{DEF}}$ Kažemo da je niz funkcija distribucije (vjeroj. mjera) <u>napet</u> ako za $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M_\varepsilon > 0$ t.d.

$$\limsup \mu_{F_n}\left((-M_\varepsilon, M_\varepsilon]^c\right) =$$

$$= \limsup \left[\overline{F_n}(M_\varepsilon) + F_n(-M_\varepsilon)\right] \le \varepsilon$$

tj. $$\limsup P(|X_n| \geq M_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

TEOREM 9 Svaki podniz niza funkcija distribucije (F_n) koji konvergira (vaguely), konvergira prema nekoj funkciji distribucije (i vaguely i weakly) $\Longleftrightarrow$ je niz $(F_n)_n$ napet.

Dokaz ($\Leftarrow$) Ako je (F_n) napet niz i $F_{n(k)} \xrightarrow{v} F$

uzmimo $r < -M_\varepsilon$ i $s > M_\varepsilon$, $r, s \in C(F)$

$$\Rightarrow F_{n(k)}(r) \to F(r), \quad F_{n(k)}(s) \to F(s)$$

$$\overline{F}(s) + F(r) = \lim\left(\overline{F}_{n(k)}(s) + F_{n(k)}(r)\right)$$

$$\leq \limsup\left(\overline{F}_n(M_\varepsilon) + F_n(-M_\varepsilon)\right) \leq \varepsilon$$

Dakle

$$\limsup_{x\to\infty} \overline{F}(x)+F(-x) \le \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0$$

$\Rightarrow$ F je f-ja distribucije

$\Rightarrow$ Pretp. (F_n) nije napet niz

$\exists \varepsilon > 0$: $n(k) \to \infty$ t.d.

$$\overline{F_{n(k)}}(k) + F_{n(k)}(-k) \ge \varepsilon$$

tm 8 $\Rightarrow$ $F_{n(k_j)} \xrightarrow{v} F$ za neku pseudodistribuciju F

za $\forall\ r < 0 < s \in C(F)$ $\Rightarrow$

$$\overline{F}(s) + F(r) = \lim_{j\to\infty} \left(\overline{F_{n(k_j)}}(s) + F_{n(k_j)}(r) \right)$$

$$\ge \liminf \overline{F_{n(k_j)}}(k_j) + F_{n(k_j)}(-k_j) \ge \varepsilon$$

$\Rightarrow$ F nije f-ja distr., jer s, r su po volji veliki $\square$ 11