BESKONAČNO OČEKIVANJE

TEOREM 43 (Feller)

Neka je (X_n) njd niz t.d. $E|X_1| = +\infty$, a (a_n) niz pozitivnih brojeva t.d. a_n/n raste, tada

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{ako} \quad \sum P(|X_1| > a_n) < \infty \\ \\ \infty & \text{ako} \quad \sum P(|X_1| \geq a_n) = \infty \end{cases}$$

Dakle, ako $E|X_i| = +\infty$, S_n/a_n ne može konvergirati g.s. ka konačnom limesu.

VELIKE DEVIJACIJE

- $X_1, X_2, \ldots$ njd. $\quad EX_1 = \mu$
- za $a > \mu \Rightarrow$

$$P(S_n > na) \to 0 \qquad (1)$$

no pitanje je koliko brzo.

$\boxed{\text{DEF}}$ Za sluč. varijablu X definiramo funkciju izvodnicu momenata kao

$$\varphi(v) = Ee^{vX}$$

za sve v za koje je ovo očekivanje konačno

Pokazuje se: ako $Ee^{\vartheta X_1} = \varphi(\vartheta) < \infty$ za neki $\vartheta > 0$. Vjerojatnosti u (1) opadaju eksponencijalno brzo, čak ćemo odrediti

$$\gamma(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(S_n \geq na) \leq 0$$

Uočimo: $\pi_n = P(S_n > a\cdot n)$ zadovoljavaju

$$\pi_{m+n} \geq P(S_m \geq m\cdot a,\ S_{n+m} - S_m \geq na) = \pi_m \cdot \pi_n$$

nezavisne

tj. niz

$\gamma_n = \log \pi_n$ je superditivan

LEMA 44 Ako $\gamma_{m+n} \geq \gamma_m + \gamma_n$, tada

$$\gamma_n / n \longrightarrow \sup_m \gamma_m / m$$

Lema povlači

$$\lim \frac{1}{n} \log P(S_n \geq n \cdot a) = \gamma(a) \quad \text{postoji i} \leq 0$$

te

$$\frac{\gamma_m}{m} \leq \gamma(a) \quad \forall m \qquad \text{tj.}$$

$$P(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma(a)}$$

Jasno sad (D.Z.)

$$\gamma(a) = -\infty \iff P(|X_1| > a) = 0 \iff P(S_n \geq na) = 0 \ \forall n$$

U nastavku pretpostavljamo

$$(\#1) \qquad \varphi(\vartheta) = E e^{\vartheta X_i} < \infty \quad \text{za neki } \vartheta > 0$$

uvedimo

$$\vartheta_+ = \sup\{\vartheta : \varphi(\vartheta) < \infty\}, \quad \vartheta_- = \inf\{\vartheta : \varphi(\vartheta) < \infty\}.$$

Jasno

$$\vartheta \in (\vartheta_-, \vartheta_+) \Rightarrow \varphi(\vartheta) < \infty$$

$$(\#1) \Rightarrow EX_i^+ < \infty \Rightarrow \underset{\mu}{\underset{\|}{EX_i}} = EX_i^+ - EX_i^- \in [-\infty, \infty)$$

Markovljeva nejednakost $\rightarrow$

$$e^{\vartheta n a} P(S_n \geq na) \leq E e^{\vartheta S_n} = \varphi(\vartheta)^n$$

pa za $K(\vartheta) = \log \varphi(\vartheta)$

$$P(S_n \geq na) \leq \exp(-n(a\vartheta - K(\vartheta))) \quad (2)$$

LEMA 45 Za $a > \mu$ i $\vartheta > 0$ dovoljno mali

$$a\vartheta - K(\vartheta) > 0$$

---

(2) predstavlja gornju ogradu za svaki ϑ, no korisno je naći najmanju od njih tj.

$$\max_{\vartheta} \{a\vartheta - K(\vartheta)\}$$

Uočimo

$$\frac{d}{d\vartheta}\left\{a\vartheta - \kappa(\vartheta)\right\} = a - \varphi'(\vartheta)/\varphi(\vartheta)$$

pa bismo mogli očekivati da optimalni ϑ zadovoljava

$$\varphi'(\vartheta)/\varphi(\vartheta) = a$$

Definiramo

$$F_\vartheta(x) = \frac{1}{\varphi(\vartheta)} \int_{-\infty}^{x} e^{\vartheta y}\, dF(y) \qquad \text{za } \vartheta \in (\vartheta_-, \vartheta_+)$$

FUNKCIJE DISTRIBUCIJE

Iz dokaza leme $\Rightarrow$

$$\int x\, dF_\vartheta(x) = \frac{1}{\varphi(\vartheta)} \int x e^{\vartheta x}\, dF(x) = \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}$$

Koristeći tm o dom. konvergenciji funkciju φ možemo derivirati dva puta za $\vartheta \in (\vartheta_-, \vartheta_+)$ i tada

$$\varphi''(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{\vartheta x} \, dF(x)$$

$\Downarrow$

$$\frac{d}{d\vartheta} \frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} = \frac{\varphi''(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)} - \left(\frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}\right)^2 = \int x^2 \, dF_\vartheta(x) - \left(\int x \, dF_\vartheta(x)\right)^2$$

$$= \text{Var za } F_\vartheta \geq 0$$

ako F nije degenerirana

$\Rightarrow \dfrac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}$ je striktno rastuća

$\Rightarrow a\vartheta - \kappa(\vartheta)$ je konkavna funkcija