

BESKONAČNO OČEKIVANJE

TEOREM 43 (Feller)

Neka je (X_n) njd niz t.d. $E|X_1| = +\infty$, a (a_n) niz pozitivnih brojeva t.d. a_n/n raste, tada

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n|}{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{ako } \sum P(|X_1| > a_n) < \infty \\ \infty & \text{ako } \sum P(|X_1| \geq a_n) = \infty \end{cases}$$

Dakle, ako $E|X_1| = +\infty$, S_n/a_n ne može konvergirati g.s. ka koničnom limesu.

VELIKE DEVIJACIJE

- X_1, X_2, \dots njd. $EX_i = \mu$

- za $a > \mu \Rightarrow$

$$P(S_n > na) \rightarrow 0 \quad (1)$$

no pitanj je koliko brzo.

DEF Za sluč. varijablu X definiramo funkciju izrodnih momenata kao

$$\ell(u) = E e^{uX}$$

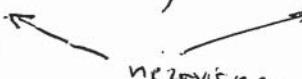
za sve u za koje je sro očekivanje konačno

Pokazuje se : ako $E e^{\alpha X_i} = p(\alpha) < 0$ za neki $\alpha > 0$. Vjerojatnosti u (1) opadaju eksponencijalno brzo, čak ćemo odrediti

$$\gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(S_n \geq n\alpha) \leq 0$$

Uočimo: $\pi_n = P(S_n > n\alpha)$ zadovoljavaju

$$\pi_{m+n} \geq P(S_m \geq m\alpha, S_{m+n} - S_m \geq n\alpha) = \pi_m \cdot \pi_n$$


nezavisne

tj. niz

$$\gamma_n = \log \pi_n \quad \text{j.e. superditivan}$$

LEMMA 44 Alko $\gamma_{m+n} \geq \gamma_m + \gamma_n$, tada

$$\frac{\gamma_n}{n} \longrightarrow \sup_m \frac{\gamma_m}{m}$$

Lema porlaci:

$$\lim \frac{1}{n} \log P(S_n \geq n \cdot a) = \gamma(a) \quad \text{postoji} \quad \gamma \leq 0$$

te $\frac{\gamma_m}{m} \leq \gamma(a) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$$P(S_n \geq na) \leq e^{n\gamma(a)}$$

] asno sad (D.z.)

$$\gamma(a) = -\infty \iff P(|X_1| > a) = 0 \iff P(S_n \geq na) = 0 \quad \forall n$$

U nastavku pretpostavljamo

$$(H1) \quad \ell(v) = E e^{v X_i} < \infty \quad \text{za svaki } v > 0$$

Uvedimo

$$v_+ = \sup \{v : \ell(v) < \infty\}, \quad v_- = \inf \{v : \ell(v) < \infty\}.$$

Jasno

$$v \in (v_-, v_+) \Rightarrow \ell(v) < \infty$$

$$(H1) \Rightarrow EX_i^+ < \infty \Rightarrow EX_i = EX_i^+ - EX_i^- \in [-\infty, \infty)$$

$$\begin{matrix} \| \\ \mu \end{matrix}$$

Markovljeva nejednakost \rightarrow

$$e^{\alpha n} P(S_n \geq n\alpha) \leq E e^{v S_n} = \ell(v)^n$$

pa za $K(v) = \log \ell(v)$

$$P(S_n \geq n\alpha) \leq \exp(-n(\alpha v - K(v))) \quad (2)$$

LEMA 45 Za $\alpha > \mu$ i $v > 0$ dovoljno mali
 $\alpha v - K(v) > 0$

(2) predstavlja gornju ogranicu za svaki v , no
korisno je naci najmanju od njih tj.

$$\max_v \{ \alpha v - K(v) \}$$

Uočimo

$$\frac{d}{dv} \{ \alpha v - \ell(v) \} = \alpha - \frac{\ell'(v)}{\ell(v)}$$

pa bismo mogli očekivati da optimalni
 v zadovoljava

$$\ell'(v)/\ell(v) = \alpha$$

Definiramo

$$F_v(x) = \frac{1}{\ell(v)} \int_{-\infty}^x e^{vy} dF(y) \quad \text{za } v \in (v_-, v_+)$$

FUNKCIJE
DISTRIBUCIJE

i z dodatnom leme \Rightarrow

$$\int x dF_v(x) = \frac{1}{\ell(v)} \int x e^{vx} dF(x) = \frac{\ell'(v)}{\ell(v)}$$

Konstrukciји тим овом конвергенцији функције ℓ
 можемо денирати два пута за $v \in (v_-, v_+)$
 i тада

$$\ell''(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{vx} dF(x)$$

↓

$$\frac{d}{dv} \frac{\ell'(v)}{\ell(v)} = \frac{\ell''(v)}{\ell(v)} - \left(\frac{\ell'(v)}{\ell(v)} \right)^2 = \int x^2 dF_v(x) - \left(\int x dF_v(x) \right)^2 = \text{Var}_{dF_v} \geq 0$$

ако F nije degenerirana

$\Rightarrow \frac{\ell'(v)}{\ell(v)}$ је стриктно растућа

$\Rightarrow av - \kappa(v)$ је конкавна функција