TEOREM 27 Ako su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. t.d. $E|X_1| = +\infty$, tada $P(|X_n| \geq n \text{ b.č.}) = 1$. Tada vrijedi i

$$P\left(\lim \frac{S_n}{n} \text{ postoji u } (-\infty, \infty)\right) = 0$$

Dokaz: Iz leme 17 $\Rightarrow$

$$E|X_1| = \int_0^\infty P(|X_1| > x)\, dx \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(|X_1| > n)$$

Iz $E|X_1| = +\infty$, X_i njd & 2. B-C leme $\Rightarrow P(|X_n| \geq n \text{ b.č.}) = 1$

Uočimo

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{X_{n+1}}{n+1}$$

Neka je $C \equiv \left\{ \omega : \lim \frac{S_n}{n} \text{ postoji u } (-\infty, \infty) \right\}$

Na C vrijedi $\frac{S_n}{n(n+1)} \xrightarrow{g.s.} 0$

Dakle na $C \cap \{|X_n| \geq n \text{ b.č.}\}$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1}\right| > 2/3 \text{ b.č.}$$

$\Rightarrow$ S_n/n nije C-niz i ne konvergira u $(-\infty, \infty)$

$$\Rightarrow \quad C \cap \{|X_n| \geq n \text{ b.č.}\} = \emptyset$$

Kako je $P(|X_n| \geq n \text{ b.č.}) = 1$

$$\Rightarrow \quad P(C) = 0 \,.$$

$\square$

NAP Dakle za J.Z.V.B. nužno je $E|X_i| < \infty$, vidjet ćemo da je taj uvjet i dovoljan.

TEOREM 25 (profinjena 2. B.-C. lema)

Ako su događaji $A_1, A_2, \ldots$ po parovima nezavisni i $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, tada za $n \to \infty$

$$\sum_{m=1}^{n} 1_{A_m} \Big/ \sum_{m=1}^{n} P(A_m) \xrightarrow{g.s.} 1$$

NAP Iz dokaza $\Rightarrow$ ako $\exists$ podniz n_k t.d. $\frac{c_{n_{k+1}}}{c_{n_k}} \to 1$

& $\frac{X_{n_k}}{c_{n_k}} \xrightarrow{g.s.} 1 \Rightarrow \frac{X_n}{c_n} \xrightarrow{g.s.} 1$

Primjer (rekordi)

Neka su $X_1, X_2, X_3, \ldots$ n.j.d. i neprekidne sl. var., te

$$A_k = \{ X_k > \sup_{j<k} X_j \}$$

Vrijedi: A_k su nezavisni dog., $P(A_k) = 1/k$

Kako $\sum_1^n 1/m \sim \log n \Rightarrow$

TEOREM 26 Za $R_n = \sum_1^n 1_{A_m}$ (broj rekorda do trenutka n) vrijedi

$$R_n / \log n \xrightarrow{g.s.} 1 .$$

NAP Iz dokaza $\Rightarrow$ za X_i njd neprekidne i

$$Y_i = \#\{ j \le i : X_j > X_i \} \Rightarrow$$

Y_i su nezavisne i $P(Y_i = k) = \frac{1}{i}$ $k = 0, \dots, i-1$

Primjer (niz uspjeha ; Erdös-Renyi)

Neka su $X_i \overset{njd}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, za $i \in \mathbb{Z}$

$$\ell_n = \max \{ m : X_{n-m+1} = \dots = X_n = 1 \}$$

$$L_n = \max_{1 \le m \le n} \ell_m \quad \leftarrow \text{najdulji niz uspjeha do } n$$

$\Rightarrow P(\ell_n = k) = 1/2^{k+1}$, za $k \geq 0$. Pokazuje se

da $$L_n / \log_2 n \xrightarrow{g.s.} 1$$

i u slučaju $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ s istim razdiobama i

prilagođenom definicijom od ℓ_n.

JAKI ZAKON VELIKIH BROJEVA

TEOREM 28 (JZVB) Neka su X_i, $i \geq 1$ po parovima nezavisne i jedn. distrib. sl. var. t.d. $E|X_i| < \infty$. Za $\mu = EX_1$ i $n \to \infty$ vrijedi

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mu .$$

Dokaz (Etemadi, 1981)
Prvo trebamo tri leme

LEMA 29 Za $Y_k = X_k 1_{|X_k| \leq k}$ i $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ vrijedi

$$T_n/n \xrightarrow{g.s.} \mu \implies S_n/n \xrightarrow{g.s.} \mu$$

LEMA 30 Za $y \geq 0$ $\quad 2y \sum_{k > y} k^{-2} \leq 4$

LEMA 31 $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{var}(Y_k)/k^2 \le 4E|X_1| < \infty$

Rezanje i gornje leme su standardne u dokazima, no Etemadi je uočio da kako X^+, X^- zadovoljavaju uvjete teorema,

$$\text{b.s.o.m.p. } X_n \geq 0 .$$

Također dokazat ćemo da $\dfrac{T_{k(n)}}{k(n)} \xrightarrow{g.s.} EX_1$

za podniz $k(n)$ t.d.

$$k(n) = \lfloor \alpha^n \rfloor \quad \text{za proizvoljan } \alpha > 1$$

Za $\varepsilon > 0$, Čebiševljeva n. $\Rightarrow$

$$\sum_{1}^{\infty} P\left(\left|T_{k(n)} - ET_{k(n)}\right| > \varepsilon k(n)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{1}^{\infty} Var\left(T_{k(n)}\right) \cdot \frac{1}{k(n)^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k(n)^2} \sum_{m=1}^{k(n)} Var\, Y_m \overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} Var\, Y_m \sum_{n:\, k(n) \geq m} \frac{1}{k(n)^2}$$

Iz $k(n) = \lfloor \alpha^n \rfloor$ i $\lfloor \alpha^n \rfloor \geq \alpha^n/2$ $\Rightarrow$

$$\sum_{n:\, \alpha^n \geq m} \lfloor \alpha^n \rfloor^{-2} \leq 4 \sum_{n:\, \alpha^n \geq m} \alpha^{-2n} \leq 4 \left(1 - \alpha^{-2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{m^2}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{1}^{\infty} P\left(\left|T_{k(n)} - ET_{k(n)}\right| > \varepsilon k(n)\right) \leq 4 \frac{\left(1-\alpha^{-2}\right)^{-1}}{\varepsilon^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Var\, Y_m}{m^2} < \infty$$

$\Rightarrow$ $\left(T_{k(n)} - ET_{k(n)}\right)/k(n) \xrightarrow{g.s.} 0$ po 1. B.C. lemi

Tm o dominiranoj konvergenciji $\Rightarrow$ $EY_k \to EX_1$

$$\Rightarrow \quad \frac{ET_{k(n)}}{k(n)} \to EX_1$$ također (Césaro means)

$$\Rightarrow \quad \frac{T_{k(n)}}{k(n)} \xrightarrow{g.s.} EX_1$$

Za $m \in [k(n), \dots, k(n+1))$ jasno iz $Y_1 \geq 0 \Rightarrow$

$$\frac{T_{k(n)}}{k(n+1)} \leq \frac{T_m}{m} \leq \frac{T_{k(n+1)}}{k(n)}$$

kako $k(n+1)/k(n) \to \alpha \quad \Rightarrow$

$$\frac{1}{\alpha} EX_1 \leq \liminf \frac{T_m}{m} \leq \limsup \frac{T_m}{m} \leq \alpha EX_1$$

Za sve $\alpha > 1$

$\square$

TEOREM 32 Neka su (X_i) njd t.d. $EX_i^+ = \infty$ i $EX_i^- < \infty$, tada $S_n/n \xrightarrow{g.s.} +\infty$.

Dokaz Za $M > 0$, stavimo $X_i^M = X_i \wedge M$, $\Rightarrow X_i^M$ njd i $E|X_i^M| < \infty \Rightarrow$ (JZVB)

$$S_n^M/n = (X_1^M + \cdots + X_n^M)/n \xrightarrow{g.s.} EX_1^M$$

Iz $S_n \geq S_n^M \Rightarrow$

$$\liminf S_n/n \geq \lim S_n^M/n = EX_i^M \quad g.s.$$

Tm o monoton. konverg $\Rightarrow E(X_i^M)^+ \nearrow EX_i = +\infty$

$\Rightarrow EX_i^M \nearrow +\infty$

$\square$

Primjer (teorija obnavljanja)

(X_i) njd., $X_i > 0$, $T_n = X_1 + \dots + X_n$, $T_0 = 0$

$$N_t = \sup \{ n : T_n \le t \}$$ ← "broj žarulja zamijenjenih do t"

TEOREM 33 Ako $EX_1 = \mu \le +\infty$, za $t \to \infty$

$$N_t / t \xrightarrow{g.s.} 1/\mu \qquad \left(1/\infty = 0 \right)$$

i

Za (X_i) njd. s fjom distribucije F, definiramo

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \mathbb{1}_{(X_m \leq x)}$$

J.Z.V.B. $\Rightarrow$ $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{g.s.} F(x)$ no vrijedi i uniformna konvergencija

TEOREM 34 (Glivenko Cantelli)

Za $n \to \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{g.s.} 0$$

Primjer (Shannonov teorem)

Neka su $X_i \overset{nid}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ p(1) & p(2) & & p(r) \end{pmatrix}$

$$\Pi_n = p(X_1)\cdots p(X_n)$$ ← vjeroj. danog uzorka

$$\overset{\text{JZVB}}{\Longrightarrow} \quad -\frac{\log \Pi_n}{n} \xrightarrow{g.s.} H = -E \log p(X_i)$$

$$= -\sum_{k=1}^{r} p(k)\cdot \log p(k)$$

entropija izvora (koji odašilje niz (X_i))

$$\Rightarrow \quad P\left(e^{-n(H+\varepsilon)} \le \Pi_n \le e^{-n(H-\varepsilon)} \right) \to 1$$

za sve $\varepsilon > 0$.

KONVERGENCIJA SLUČ. REDOVA

Za niz sl. var. (X_i) definiramo

$$\mathcal{F}_n' = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

& $\mathcal{T} = \bigcap \mathcal{F}_n'$ $\leftarrow$ repna σ-algebra = "događaji koji ne ovise o konačnom broju $X_i$eva"

Npr.

- $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\quad \{X_n \in B_n \text{ b.č.}\} \in \mathcal{T}$

- $\{\lim S_n \text{ postoji}\} \in \mathcal{T}$

  $\{\limsup S_n > 0\} \notin \mathcal{T}$

  $\{\limsup \frac{S_n}{c_n} > x\} \in \mathcal{T}$ ako $c_n \to +\infty$

TEOREM 35 (Kolmogorovljev 0-1 zakon)

Ako su (X_i) nezavisne, $A \in \mathcal{J} \Rightarrow P(A) = 0$ ili 1

TEOREM 36 (Kolmogorovljeva nejednakost za maksimume)

Ako su (X_i) nezavisne t.d. $EX_i = 0$, $\operatorname{Var} X_i < \infty$ tada

$$P\left(\max_{1 \le k \le n} |S_k| \geq x\right) \leq \frac{1}{x^2} \operatorname{Var} S_n$$

TEOREM 37 Neka su (X_i) nezavisne, $EX_i=0$, ako $\sum_1^\infty \mathrm{Var}\, X_n < \infty$ tada

$$\sum_1^\infty X_n \quad \text{konvergira g.s.}$$

Dokaz

$$P\left(\max_{M\le m\le N} |S_m - S_M| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{Var}(S_N - S_M) = \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{M+1}^{N} \mathrm{Var}\, X_n$$

$$\Rightarrow \quad P\left(\sup_{M\le m} |S_m - S_M| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=M+1}^{\infty} \mathrm{Var}\, X_n \to 0 \quad \text{za } M\to\infty$$

Neka

$$W_M = \sup_{n,m\ge M} |S_m - S_n| \Rightarrow W_M \text{ pada za } M \nearrow$$

$$P(W_M > 2\varepsilon) \le P\left(\sup_{m\ge M} |S_m - S_M| > \varepsilon\right) \to 0 \quad \forall \varepsilon>0$$

$$\Rightarrow \quad W_M \searrow 0 \text{ g.s. za } M\to\infty \Rightarrow S_n \text{ je C-niz g.s.}$$

$\square$

TEOREM 38 (Kolmogorovljev o 3 reda)

Neka su (X_i) nezavisne, $A > 0$, $Y_i = X_i \mathbb{1}_{|X_i| \leq A}$

Da bi $\sum_1^\infty X_n$ konvergirao g.s. nužno je i dovoljno da

i) $\sum_1^\infty P(|X_n| > A) < \infty$

ii) $\sum_1^\infty EY_n$ konvergira

iii) $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{var} Y_n < \infty$

TEOREM 39 (Kroneckerova lema)

Ako $a_n \nearrow +\infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k/a_k$ konvergira tada

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} x_k \longrightarrow 0$$

Iz zadnja dva teorema slijedi

TEOREM 40 (JZVB ponovo)

Neka su (X_i) njd i $E|X_1|<\infty$. Za $\mu = EX_1$ i $n \to \infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{g.s.} \mu$$

BRZINA KONVERGENCIJE

TEOREM 41 Za (X_i) njd. t.d. $EX_i = 0$, $EX_i^2 = \sigma^2 < \infty$,

i $\forall \varepsilon > 0$

$$\frac{S_n}{\sqrt{n (\log n)^{1+\varepsilon}}} \xrightarrow{g.s.} 0$$

NAP Pokazuje se (npr. koristeći Brownovo gibanje kao aproks. šetnje)

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n \log\log n}} = \sigma\sqrt{2} \quad g.s.$$

(zakon ponovljenog algoritma, Kolmogorov)

TEOREM 42 (Marcinkiewicz - Zygmund)

Za (X_i) njd. i $EX_i = 0$, $E|X_1|^p < \infty$ $p \in (1,2)$

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \xrightarrow{g.s.} 0 \qquad (1)$$

Dakle, čak i za X_i td. $EX_i^2 = +\infty$, možemo reći nešto o brzini kojom $S_n/n \xrightarrow{g.s.} 0$.

(1) znači $S_n = o(n^{1/p})$ g.s.

tj. $\frac{S_n}{n} = o(n^{1/p - 1})$ g.s.

—