Primjer (gama razdioba)

$\Gamma(\alpha,\lambda)$ ima gustoću

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Pokazuje se : tm 9 $\Rightarrow$

$X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, $Y \sim \Gamma(\beta,\lambda)$ nezavisne

tada $X+Y \sim \Gamma(\alpha+\beta,\lambda)$

$\Downarrow$

$X_1, \ldots, X_n$ nezavisne $\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

tada $X_1 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n,\lambda)$

Primjer (normalna razdioba)

$N(\mu, \sigma^2)$ ima gustoću

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

tm 9 $\Rightarrow$

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne

tada $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

Primjer (Poissonova razdioba)

$X, Y \sim P(\lambda_1), P(\lambda_2)$ nezavisne

$\Rightarrow X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

$\square$

KONSTRUKCIJA NEZAVISNIH SL. VAR.

Postoje li $X_1, \ldots, X_n$ t.d. $X_i \sim F_i$ te da su X_i nezavisne ?

Nađimo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ t.d. stavimo

$$\Omega = \mathbb{R}^n, \ \mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})^n, \ X_i(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \omega_i \quad \text{i}$$

$$P\big((a_1,b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]\big) = \big(F_1(b_1) - F(a_1)\big) \cdots \big(F(b_n) - F(a_n)\big).$$

tj. $\quad P = \mu_1 \times \cdots \times \mu_n$ gdje je

μ_i razdioba s fjom. dist. F_i

Ako želimo napraviti beskonačan niz (X_i) nezavisnih sl. var. postavimo

$$\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_i \in \mathbb{R}\}$$ skup svih realnih nizova

Produktna σ-algebra $\mathcal{R}^{\mathbb{N}}$ neka je generirana skupovima (cilindrima)

$$A_{B_1,\dots,B_n} = \{\omega : \omega_i \in B_i \ i = 1,\dots,n\}$$ za proizvoljne $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

Ako želimo $X_i \sim F_i$, možemo opet postaviti $X_i(\omega) = \omega_i$. Htjeli bismo i

$$P(A_{B_1,\dots,B_n}) = \mu_n(B_1 \times \dots \times B_n)$$ gdje je

μ_n razdioba sl. vek. $(X_1,\dots,X_n)$.

TEOREM 10 (Kolmogorovljev tm. o proširenju)

Neka su μ_n razdiobe na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ koje su konzistentne tj.

$$\mu_{n+1}((a_1,b_1] \times \cdots \times (a_n,b_n] \times \mathbb{R}) = \mu_n((a_1,b_1] \times \cdots \times (a_n,b_n])$$

Tada postoji jedinstvena vjeroj. mjera na $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{R}^{\mathbb{N}})$ t.d.

$$P(\omega : \omega_i \in (a_i,b_i],\ i=1,\dots,n) = \mu_n((a_1,b_1] \times \cdots \times (a_n,b_n])$$

Za općeniti metrički prostor s pripadnom Borelovom σ-algebrom $(S, \mathcal{S})$ možemo na isti način definirati $S^{\mathbb{N}}$ i $\mathcal{S}^{\mathbb{N}}$

Ako je S separabilan, tada je
$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots)$ sluč. element u $(S^{\mathbb{N}}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}})$

$\iff$ ξ_i su sluč. elementi u $(S, \mathcal{S})$

To inače ne mora vrijediti, pa vezano s tim ni Kolmogorovljev teorem ne vrijedi u općenitim metričkim prostorima.

Prostor $(S, \mathcal{S})$ je zgodan (standardni Borelov prostor) ako postoji bijekcija f sa S u $\mathbb{R}$ t.d su f i f^{-1} izmjerive

TEOREM 11 Ako je S Borelov podskup potpunog separabilnog metr. prostora M, a $\mathcal{S}$ je Borelova σ-algebra na S, tada je $(S, \mathcal{S})$ zgodan.

SLABI ZAKONI VELIKIH BROJEVA

$\boxed{\text{DEF}}$ Kažemo Y_n <u>konvergira</u> ka Y <u>po vjerojatnosti</u> ako $\forall \varepsilon > 0$

$$P(|Y_n - Y| > \varepsilon) \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty$$

oznaka $\qquad Y_n \xrightarrow{P} Y$

Prisjetimo se: prvi slabi zakoni slijede iz Čebiševljeve nejed. i činjenice da za X_i, $i=1,\dots,n$ nekorelirane, t.d. $EX_i^2 < \infty$

$\Downarrow$

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$$

LEMA 12 Ako $E|Z_n|^p \to 0$ za $p>0$ tada

$$Z_n \xrightarrow{P} 0 \quad , n \to \infty$$

Dokaz

Markovljeva nejedn. $\Rightarrow$

$$P(|Z_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|Z_n|^p}{\varepsilon^p} \longrightarrow 0 \quad . \qquad \square$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X-EX)^2 = EX^2 - (EX)^2$$

$$\mathrm{Var}(cX) = c^2 \,\mathrm{Var}\, X$$

TEOREM 13 (L^2 slabi zakon)

Ako su $X_1, X_2, \ldots$ nekorelirane t.d. $EX_i = \mu$ i $\mathrm{Var}\, X_i \leq C < \infty$ $\forall i$. Tada

$$S_n/n \xrightarrow{P} \mu \quad \text{i} \quad S_n/n \xrightarrow{L_2} \mu$$

Dokaz. Dokažimo L_2 konvergenciju

$$E\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)^2 = \mathrm{Var}\,\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\, S_n \leq \frac{C}{n} \longrightarrow 0$$

sad konv. po vjeroj. slijedi iz Čebiš. nejedn.

$\square$

Najvažniji specijalni slučaj je kada su X_i također n.j.d., pokazat ćemo da je za $S_n/n \xrightarrow{P} \mu$ dovoljno tada i $E|X_i| < \infty$

<u>Primjer</u> (visokodimenzionalna kocka je "skoro sfera")

Neka su $X_i \overset{njd}{\sim} U(-1,1)$, $Y_i = X_i^2$ jasno $\operatorname{Var} Y_i < \infty$, $EY_i = 1/3 \Rightarrow \dfrac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \xrightarrow{P} 1/3$

$\Rightarrow A_{n,\varepsilon} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : (1-\varepsilon)\sqrt{n/3} < \|x\|_2 < (1+\varepsilon)\sqrt{\frac{n}{3}} \right\}, \forall \varepsilon > 0$

zadovoljava $\lambda(A_{n,\varepsilon})/2^n \to 1$ tj.

$$\lambda(A_{n,\varepsilon})/2^n = P((X_1, \dots, X_n) \in A_{n,\varepsilon})$$

$\Rightarrow$ najveći dio volumena kocke dolazi od $A_{n,\varepsilon}$ koji je "približno" sfera radijusa $\sqrt{n/3}$

TROKUTASTI NIZOVI

- $(X_{n,k})$ $k=1,\dots,n$, $n\in\mathbb{N}$ ← čest objekt graničnih teorema u vjerojatnosti (tipično nezavisni po recima)
- $S_n = X_{n,1}+\dots+X_{n,n}$

TEOREM 14

Za proizvoljan niz sl.var. (S_n) t.d. $\sigma_n^2 = \operatorname{Var} S_n < \infty$ i $\mu_n = ES_n$, ako $\sigma_n^2/b_n^2 \to 0$ tada

$$\frac{S_n-\mu_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$$

NAP 12

$$\sum_1^n 1/m \geq \int_1^n \frac{dx}{x} \geq \sum_2^n \frac{1}{m} \Rightarrow$$

$$\log n \leq \sum_1^n \frac{1}{m} \leq 1+\log n$$

–

Primjer (coupon's collector problem)

$X_i \overset{njd}{\sim}$ uniformne na $\{1, 2, \ldots, n\}$

$$\tau_k^n = \inf\{m : |\{X_1, \ldots, X_m\}| = k\}$$

$$T_n = \tau_n^n, \quad \text{stavimo i } \tau_0^n = 0$$

Za $X_{n,k} = \tau_k^n - \tau_{k-1}^n$ jasno vrijedi :

$X_{n,k} \sim$ geometrijska s par. $1 - \frac{(k-1)}{n} = p_k^n$

& nezavisna od $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k-1}$

$$\Rightarrow \quad E X_{n,k} = 1/p_k^n \qquad \operatorname{Var} X_{n,k} \leq 1/(p_k^n)^2$$

$$\Rightarrow ET_n = \sum_{1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-1} = n \sum_{1}^{n} \frac{1}{m} \sim n \log n$$

$$\operatorname{Var} T_n \leq \sum_{1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^{-2} = n^2 \sum_{1}^{n} \frac{1}{m^2} \leq n^2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2}$$

Iskoristimo tm za $b_n = n \log n$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_n - n \sum_{1}^{n} \frac{1}{m}}{n \log n} \xrightarrow{P} 0$$

$$\Rightarrow \quad T_n / n \log n \xrightarrow{P} 1$$

REZANJE

Ako je X sl. var., a $M>0$ za

$$\overline{X} = X \cdot 1_{(|X| \leq M)}$$

kažemo da je X odrezana na nivou M

TEOREM 15 (S.Z. ZA TROKUTASTE NIZOVE) Neka su za $\forall n$ $X_{n,k}$ $k=1,\dots,n$ nezavisne i neka $b_n>0$, $b_n \to \infty$, te $\overline{X}_{n,k} = X_{n,k} 1_{|X_{n,k}|<b_n}$. Pretpostavite

i) $\sum_1^n P(|X_{n,k}|>b_n) \to 0$

ii) $b_n^{-2} \sum_1^n E\overline{X}_{n,k}^2 \to 0$

Tada $\frac{S_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$, za $a_n = \sum_1^n E\overline{X}_{n,k}$

TEOREM 16 (SLABI ZAKON VELIKIH BROJEVA)

Neka su $X_1, X_2, \dots$ njd i neka

$$x P(|X_i| > x) \to 0 \qquad x \to \infty$$

Za $\mu_n = E(X_1 1_{|X_1| \le n})$ i $S_n = X_1 + \dots + X_n$ vrijedi

$$S_n/n - \mu_n \xrightarrow{P} 0$$

NAP Uvjet u tm-u je nužan za postojanje niza a_n t.d. $S_n/n - a_n \xrightarrow{P} 0$

Dokaz Iskoristimo prethodni tm za $X_{n,k} = X_k$, $b_n = n$

uočite $\sum_1^n P(|X_{nk}| > n) = n P(|X_i| > n) \to 0$ ✓

LEMA 17 Za $Y \geq 0$, $p > 0$

$$EY^p = \int_0^\infty p y^{p-1} P(|Y| > y)\, dy$$

Dokaz

$$\int_0^\infty p y^{p-1} P(Y > y)\, dy = \int_0^\infty \int_\Omega p y^{p-1} 1_{Y > y}\, dP\, dy \quad = \text{Fubini}$$

$$= \int_\Omega \int_0^\infty p y^{p-1} 1_{Y > y}\, dy\, dP = \int_\Omega Y^p\, dP = EY^p \qquad \square$$

Za dokaz tm-a ostaje vidjeti još ii) iz prethodnog tm-a $\mathfrak{h}$.

$$\underbrace{n^{-2} \cdot n}_{= 1/n} \cdot E\bar{X}_{n,1}^{2} \longrightarrow 0$$

TEOREM 18 Neka su $X_1, X_2, \dots$ njd t.d. $E|X_1| < \infty$

za $\mu = EX_1$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ vrijedi

$$S_n/n - \mu \xrightarrow{P} 0 \quad \text{tj.} \quad S_n/n \xrightarrow{P} \mu$$

Dokaz Tm o d.k. $\Rightarrow$

$$x P(|X_1| > x) \le E(|X_1| \mathbb{1}_{|X_1| > x}) \to 0 \qquad x \to \infty$$

i

$$\mu_n = E(X_1 \mathbb{1}_{|X_1| \le n}) \to \mu = EX_1 \qquad n \to \infty$$

$\Downarrow$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \le \underbrace{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu_n\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\downarrow \atop 0 \text{ po J.Z.V.B.}} + \underbrace{P\left(|\mu_n - \mu| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\downarrow \atop 0 \quad \mu_n \to \mu}$$

$\square$

NAP Uočite da po lemi 17 $E|X_1|^{1-\varepsilon} < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$

čim $\quad x P(|X_1| > x) \to 0$

Dakle postojanje 1. momenta i nije puno jači zahtjev u odn. na taj prije.

Primjer (Cauchyeva razdioba)

$$P(|X_1| > x) = \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{2}{\pi} \int_x^\infty \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} \qquad x \to \infty$$

Po nap. o nužnosti $\Rightarrow \nexists\ a_n$ t.d. $S_n/n - a_n \xrightarrow{P} 0$

Pokazuje se

$$S_n/n \stackrel{d}{=} X_1 \quad .$$

BOREL-CANTELLIJEVE LEME

(A_n) niz u $\mathcal{F}$

$$\limsup A_n = \lim_{m\to\infty} \bigcup_{m}^{\infty} A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ b.č.}\}$$

$$\liminf A_n = \lim_{m\to\infty} \bigcap_{m}^{\infty} A_n = \{\omega : \omega \in A_n \text{ z.s.o.k.m.}\}$$

Uočite

$$1_{\limsup A_n} = \limsup 1_{A_n}$$

$$1_{\liminf A_n} = \liminf 1_{A_n}$$

$$X_n \xrightarrow{g.s.} 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad P\{|X_n| > \varepsilon \text{ b.č.}\} = 0$$

TEOREM 19 (prva Borel-Cantelli lema)

Ako $\sum_1^\infty P(A_n) < \infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$.

Dem Za $N = \sum_1^\infty 1_{A_n}$ Fubinijev tm povlači

$$EN = \sum_1^\infty P(A_n) < \infty \Rightarrow P(N = +\infty) = 0 \qquad \square$$

TEOREM 20 $X_n \xrightarrow{P} X \iff$ za svaki podniz $X_{n(m)}$, postoji podpodniz $X_{n(m_k)}$ t.d. $X_{n(m_k)} \xrightarrow{gs} X$

NAP Tvrdnja vrijedi i za sluč. elemente, a i dokaz je u suštini isti.

$\boxed{\text{DEF}}$ Za slučajne elemente $(X_n), X$ u metričkom prostoru (S, ϱ) kažemo $X_n \xrightarrow{P} X$ ako

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(\varrho(X_n, X) > \varepsilon) \longrightarrow 0$$

$\Updownarrow$

- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ t.d. $\forall n \geq n_0$

$$P(\varrho(X_n, X) > \varepsilon) < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

- $E[\varrho(X_n, X) \wedge 1] \longrightarrow 0$

TEOREM 21 Slučajni elementi $(X_n), X$ zadovoljavaju $X_n \xrightarrow{P} X \iff$ za svaki podniz $(X_{n(m)})$ postoji podpodniz $(X_{n(m_k)})$ t.d. $X_{n(m_k)} \xrightarrow{g.s.} X$

NAP Iz teorema 20 i 21 je jasno da konvergencija po vjerojatnosti ovisi samo o topologiji na $(S, \mathcal{S})$ a ne o konkretnoj metrici.

Također je očito sada da i za sluč. elemente $X_n \xrightarrow{g.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$

TEOREM 22 Ako $X_n \xrightarrow{P} X$, a f je neprekidna

$\Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$. Ako je f još ograničena

$\Rightarrow Ef(X_n) \to Ef(X)$.

Dokaz Ako je $X_{n(m)}$ podniz $\Rightarrow \exists\, (X_{n(m_k)})$ t.d. $X_{n(m_k)} \xrightarrow{g.s.} X$

$\Rightarrow f(X_{n(m_k)}) \xrightarrow{g.s.} f(X) \Rightarrow f(X_n) \xrightarrow{P} f(X)$ jer je $n(m)$ proizvoljan

Druga tvrdnja je posljedica tm. o dom. konv. $\square$

TEOREM 23 Ako su X_1, X_2 njd $EX_i = \mu, EX_i^4 < \infty$

$\Rightarrow S_n/n = (X_1 + \cdots + X_n)/n \xrightarrow{g.s.} \mu$ prva verzija J.Z.V.B.

TEOREM 24 (druga Borel-Cantelli lema)

Ako su događaji A_n nezavisni

$$\sum P(A_n) = +\infty \Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$$

Dokaz: Za $M < N < \infty$, iz $1 - x \leq e^{-x} \Rightarrow$

$$P\left(\bigcap_M^N A_n^c\right) = \prod_M^N (1 - P(A_n)) \leq \prod_M^N \exp(-P(A_n))$$

$$= \exp\left(-\sum_M^N P(A_n)\right) \to 0 \quad \text{za } N \to \infty$$

$\Downarrow$

$$P\left(\bigcup_M^\infty A_n\right) = 1 \quad \forall M \quad \text{kako } \bigcup_M^\infty A_n \searrow \limsup A_n$$

$$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 1$$