II ZAKONI VELIKIH BROJEVA

NEZAVISNOST

$\boxed{\text{DEF}}$ $A, B \in \mathcal{F}$ su <u>nezavisni</u> događaji ako

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Sl. var X, Y su <u>nezavisne</u> ako $\forall C, D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(X \in C) P(Y \in D) = P(X \in C, Y \in D)$$

σ-algebre $\mathcal{F}'$ i $\mathcal{G}'$ su <u>nezavisne</u> ako $\forall A \in \mathcal{F}', B \in \mathcal{G}'$

A i B su nezavisni

Jasno $\mathcal{F}', \mathcal{G}' \subseteq \mathcal{F}$.

...

$\boxed{\text{DEF}}$ σ-algebre $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ su <u>nezavisne</u> ako

za sve $A_i \in \mathcal{F}_i$ $i=1,\dots,n$

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Sl. var. $X_1, \dots, X_n$ su <u>nezavisne</u> ako

za sve $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i=1,\dots n$

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \in B_i\}\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$$

Događaji $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ su <u>nezavisni</u> ako za

sve $I \subseteq \{1,\dots,n\}$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Beskonačna familija σ-algebri / sluč. varijabli / događaja je <u>nezavisna</u> ako to vrijedi za svaku njenu konačnu potfamiliju.

DEF Za familije $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{F}$ kažemo da su nezavisne ako za sve $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i \in I$ gdje $I \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

NAP Očito: ako su $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ nezavisne $\Rightarrow$ $\mathcal{A}_1 \cup \{\Omega\}, \dots, \mathcal{A}_n \cup \{\Omega\}$ također nezavisne

TEOREM 1

Ako su $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ nezavisne i $\mathcal{A}_i$ je π-sistem za sve i, tada su i

$$\sigma(\mathcal{A}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{A}_n) \text{ nezavisne}$$

KOROLAR 2

Ako za sve $x_i \in (-\infty, +\infty]$ $i=1,\dots,n$ vrijedi

$$P(X_1 \le x_1, \dots, X_n \le x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i)$$

$\Rightarrow$ $X_1, \dots, X_n$ su nezavisne

Dokaz: Po tm, naime $\mathcal{A}_i = \{\{X_i \le x\} : x \in (-\infty, \infty]\}$ su

π - sistem za sve i.

A $\sigma(X_i) = \sigma(\mathcal{A}_i)$ $\Rightarrow$ tvrdnja $\square$

ZAD 1) Ako je $(X_1, \dots, X_n)$ neprekidan ili diskretan sl. vektor ako se gustoća $f_{X_1, \dots, X_n}$ može faktorizirati sl. varij. $X_1, \dots, X_n$ su neprekidne

– – –

TEOREM 3

Ako su $\mathcal{F}_{ij}$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m(i)$ nezavisne σ-algebre, tada su $\mathcal{G}_i = \sigma\left(\bigcup_{j=1}^{m(i)} \mathcal{F}_{ij}\right)$ $i=1,\dots,n$ također nezavisne

TEOREM 4

Ako su X_{ij}, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m(i)$ nezavisne, a $f_i : \mathbb{R}^{m(i)} \to \mathbb{R}$ izmjerive $\Rightarrow$

$f_i(X_{i,1},\dots,X_{i,m(i)})$ su nezavisne

NAP) Za X_i, $i = 1, \ldots, n$ nezavisne $\Rightarrow$

npr. X_1 i $X_2 \ldots X_n$ su nezavisne

ili $\max(S_1, \ldots, S_m)$ i $S_n - S_m$ su nezavisne $(m < n)$

gdje $S_m = X_1 + \cdots + X_m$, $m \in \mathbb{N}$

– – —

NEZAVISNOST i OČEKIVANJE

TEOREM 5

Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne sl. var. s razdiobama $\mu_1, \dots, \mu_n$ tada $(X_1, \dots, X_n)$ ima razdiobu $\mu_1 \times \dots \times \mu_n$.

Dokaz. Po definiciji produktnog vj. prostora $\forall A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \dots \times A_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in A_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i) = \mu_1 \times \dots \times \mu_n (A_1 \times \dots \times A_n)$$

tm 31, Pog 1 $\Rightarrow$ tvrdnju $\square$

TEOREM 6 Ako su X, Y nezavisne s razdiobama μ odn. ν, a $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ izmjeriva td. $h \geq 0$ ili $E|h(X,Y)| < \infty$ tada

$$Eh(X,Y) = \int\int h(x,y)\,\mu(dx)\,\nu(dy)$$

Posebno, ako su f, g izmjerive i $f, g \geq 0$ ili $E|f(X)|, E|g(Y)| < \infty$ tada

$$Ef(X)g(Y) = Ef(X) \cdot Eg(Y).$$

Dokaz: tm 30 i 32 (Fubini) Pog 1 povlače tvrdnju

$\square$

KOROLAR 7 Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne i $X_i \geq 0$ $\forall i$ ili $E|X_i| < \infty$ $\forall i$ $\Rightarrow$

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} EX_i$$

tj. očekivanje na l.s postoji i zadovoljava jednakost

D. Jasan, primijetite samo da su po napomeni

X_1 & $X_2 \cdots X_n$ nezavisne

pa iskoristite indukciju $\square$

KONVOLUCIJA

TEOREM 8 Neka su X i Y nezavisne s fjama distribucije F odn G tada

$$P(X+Y \le z) = \int F(z-y)\, dG(y)$$

— —

Integral na d.s. se naziva <u>konvolucija</u> od F i G u točki z.

Dokaz Po korolaru 7 za $\mu \sim F$, $\nu \sim G$ razdiobe

$$P(X+Y \le z) = \iint 1_{\{x+y \le z\}}\, \mu(dx)\, \nu(dy)$$
$$= \int F(z-y)\, dG(y) \qquad \square$$

— — —

TEOREM 9 Ako je X neprekidna i nezavisna od Y koja ima fju distrib G, tada $X+Y$ ima gustoću

$$h(x) = \int f(x-y)\, dG(y),$$

gdje je f gustoća od X. Ako Y ima gustoću g tada je

$$h(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy$$