VIII BROWNOVO GIBANJE

- Brown (1828)
- Bachelier (1900)
- Wiener (početak 20og stoljeća)

$\boxed{\text{DEF}}$ Sluč. proces $(B_t)_{t\geq 0}$ s vrijednostima u $\mathbb{R}$ zovemo <u>Brownovim gibanjem</u> ako vrijedi:

a) $t_0 < t_1 < \dots < t_n \Rightarrow B(t_0), B(t_1)-B(t_0), \dots, B(t_n)-B(t_{n-1})$ međ. nezavisne

b) $s,t \geq 0$ $\quad P(B(s+t)-B(s) \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\,dx$

c) put $t \mapsto B(t)$ je neprekidan g.s.

Iz def. slijedi:

- $(B_t - B_0)_{t\geq 0}$ je nez. proces od B_0 i ima isti rasd. kao B. gibanje t.d. $B_0 = 0$ (invarijantnost na translacije)

- Ako $B_0 = 0$, tada $\forall t \geq 0$
$$(B_{st})_{s\geq 0} \stackrel{d}{=} (\sqrt{t}\, B_s)_{s\geq 0}$$

tj. B. gibanje je sebisličan (selfsimilar) proces, s indeksom skaliranja $1/2$.

$\boxed{\text{DEF}}$ Brownovo gibanje koje kreće iz 0, je slučajan proces $(B_t)_{t\geq 0}$ td. $B_0 = 0$ i

a') (B_t) je gaussovski proces

b') $EB_s = 0$, $EB_sB_t = s \wedge t$

c') $t \mapsto B_t$ je neprekidan put g.s.

Q: Postoji li takav proces?

Porcijalan odgovor daje Kolmogorovljev teorem o proširenju.

TEOREM 1 Na skupu svih realnih funkcija na $[0,\infty)$ $\Omega_0 = \{ \omega : \omega : [0,\infty) \to \mathbb{R} \}$ i pripadnoj σ-algebri $\mathcal{F}_0$ generiranoj cilindrima $\{\omega : \omega(t_i) \in A_i \;\; i=1,\dots,n\}$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ postoji jedinstvena vjerojatnost ν_x t.d.

$$\nu_x(\omega : \omega(0) = x) = 1 \quad \text{i}$$

$$\forall\, t_1 < \dots < t_n \quad A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\nu_x(\omega : \omega(t_i) \in A_i) = \mathbb{P}(B_{t_1} \in A_1, \dots, B_{t_n} \in A_n)$$

gdje su sl. var. $B_0, B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ nez. $B_0 = x$, a $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} \sim N(0, t_k - t_{k-1})$

Problem :

$$C = \{ \omega : t \mapsto \omega(t) \text{ neprek} \} \notin \mathcal{F}_0$$

$\Rightarrow$ Pitanje $\nu_x(C) = 1$ ili ne nema smisla

Rješenje :

- iskoristiti Kolm. teorem da se definira proces indeksiran na $\mathcal{Q}_2 = \{ m/2^n : m, n \geq 0 \}$
- pokazati da je g.s. uniformno neprekidan na konačnim intervalima.
- proširiti proces na skup indeksa $[0, \infty)$ t.d. se dobije mjera na $(C, \mathcal{C})$ gdje je $\mathcal{C}$ ponovo generirana cilindrima.

Može se pokazati da su putevi B-gibanja čak Hölder neprekidni s eksponentom $\gamma < 1/2$, ali nisu Lipschitz neprekidni niti u jednoj točki g.s. $\Rightarrow$ nisu niti diferencijabilni niti u jednoj točki.

VARIJACIJA PUTEVA

Ako f-ja $t \mapsto f(t)$ ima ograničenu varijaciju na segmentu I onda joj i derivacija postoji gotovo svuda na I

$\Rightarrow$ B.g. ima g.s. puteve beskonačne varijacije na svakom konačnom intervalu

Ali su mu zato kvadratne varijacije vrlo pravilne

Neka
$$\Delta_{m,n} = B(t\, m/2^n) - B(t(m-1)/2^n)$$

$\Downarrow$

$$\sum_{m \le 2^n} \Delta_{m,n}^2 \xrightarrow{g.s.} t$$

(JAKO) MARKOVLJEVO SVOJSTVO

$$\mathcal{F}_s^\circ = \sigma(B_r : r \le s)$$ sadrže inform. o B. gibanju do časa s

no zgodnije su

$$\mathcal{F}_s^+ = \bigcap_{t>s} \mathcal{F}_t^\circ$$ koje su zdesna neprekidne

(dozvoljavaju "infinitezimalan pogled u budućnost")

Na $(C, \mathcal{C})$ imamo familiju vjeroj. P_x t.d. $B_t(\omega) = \omega(t)$ je B. gibanje koje kreće iz x.

Opet definiramo pomak $\vartheta_s : C \to C$

$$(\vartheta_s \omega)(t) = \omega(s+t) \quad t \geq 0$$

Ako je Y ograničena, $\mathcal{C}$ izmjeriva, a $s \geq 0$

$$\boxed{E_x(Y \circ \vartheta_s \mid \mathcal{F}_s^+) = E_{B_s} Y \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

MARKOVLJEVO SVOJSTVO

Kako je d.s. $\in \mathcal{F}_s^\circ \Rightarrow$

$$E_x(Y \circ \vartheta_s \mid \mathcal{F}_s^+) = E_x(Y \circ \vartheta_s \mid \mathcal{F}_s^\circ)$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow \quad E_x(Y \mid \mathcal{F}_s^+) = E_x(Y \mid \mathcal{F}_s^\circ)$

Posebno ako je Z $\mathcal{F}_s^+$ izmjeriva

$$Z = E_x(Z \mid \mathcal{F}_s^\circ) \text{ je } \mathcal{F}_s^\circ \text{ izmjeriva}$$

Dakle σ-algebre $\mathcal{F}_s^\circ$ i $\mathcal{F}_s^+$ se razlikuju ext. na skupovima mjere 0.

<u>TEOREM 2</u> (BLUMENTHALOV ZAKON 0-1)

Ako $A \in \mathcal{F}_0^+ \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ $P_x(A) = \{0, 1\}$

Dokaz $A \in \mathcal{F}_0^+ \Rightarrow$

No $\mathcal{F}_0^\circ = \sigma(B_0)$ je trivij. pod $P_x \Rightarrow$

$$1_A = E_x(1_A \mid \mathcal{F}_0^+) = E_x(1_A \mid \mathcal{F}_0^\circ) = P_x(A) \quad P_x \text{ g.s.}$$

TEOREM 3 $\tau = \inf\{t \geq 0 : B_t > 0\}$, $P_0(\tau = 0) = 1$.

TEOREM 4 $T_0 = \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$, $P_0(T_0 = 0) = 1$

Za $\mathcal{F}_t' = \sigma(B_s : s \geq t)$ i $\mathcal{J} = \bigcap_{t \geq 0} \mathcal{F}_t'$ vrijedi.

TEOREM 5 $A \in \mathcal{J} \Rightarrow P_x(A) = 0$ ili 1

TEOREM 6

$$\limsup \frac{B_t}{\sqrt{t}} = +\infty \qquad \liminf \frac{B_t}{\sqrt{t}} = -\infty \quad \text{g.s.}$$

$\boxed{\text{DEF}}$ Sluč. varijabla S s vrijednostima u $[0,\infty]$ je zaustavno vrijeme ako je $\{S<t\} \in \mathcal{F}_t$ za svaki $t \geq 0$.

Uočite mogli smo uzeti i $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ u definiciji jer

ako $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \{S<t\} = \bigcup_n \{S \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$

$$\{S<t\} \in \mathcal{F}_t \Rightarrow \{S \leq t\} = \bigcap_n \{S < t + \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_t$$

ako su $\mathcal{F}_t$ zdesna neprekidne

Uobičajene σ-algebre

$$\mathcal{N}_x = \{ A : A \subset D \ \& \ P_x(D) = 0 \}$$ nul skupovi u odn. na P_x

$$\mathcal{F}_s^x = \sigma\{ \mathcal{F}_s^+ \cup \mathcal{N}_x \}$$ upotpunjenje σ-algebri za P_x

$$\mathcal{F}_s = \bigcap_x \mathcal{F}_s^x$$ filtracija koja ne ovisi o poč. stanju

Definiramo :

$$(\vartheta_S \omega)(t) = \begin{cases} \omega(S(\omega)+t) & \text{na } \{S<\infty\} \\ \Delta & \text{na } \{S=\infty\} \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_S = \{A : A \cap \{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \geq 0\}$$

Ako je Y ograničena i t.d. $(s,\omega) \mapsto Y(s,\omega)$ $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}$ izmjeriva, a S zaustavno vrijeme $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$E_x(Y_S \circ \vartheta_S \mid \mathcal{F}_S) = E_{B(S)} Y_S \quad \text{na } \{S<\infty\}$$

JAKO MARKOVLJEVO SVOJSTVO

SKOROHODOVA ULAGANJA

Cilj: za sluč. šetnju naći zaustavna vremena $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \ldots$ t.d.

$$B_{\tau_n} \stackrel{d}{=} S_n$$

bez obzira na razdiobu koraka (koji imaju očekiv. 0 i varijancu σ^2 po pretpostavci)

Dobit ćemo čak da su $(\tau_k - \tau_{k-1})$ njd s očekivanjem σ^2

$$\mathcal{J} = \{ \text{zaustavna vremena za koja vrijedi } EB_\tau = 0,\ E\tau = EB_\tau^2 \ \& \ E\tau^2 \leq 4EB_\tau^4 \}$$

Sva ograničena zaustavna vremena ulaze u klasu $\mathcal{J}$. (v. Billingsley str. 514)

TEOREM 7 Ako je X sl. varij. s očekiv. 0 i varijancom $< \infty$ $\Rightarrow$ $\exists$ zaustavno vrijeme τ td.

$$X \stackrel{d}{=} B_\tau, \quad E\tau = EX^2 \ \& \ E\tau^2 \leq 4EX^4$$

TEOREM 8 Ako su $X_1, X_2, \ldots$ njd. s očekiv. 0 i varijancom $< \infty$ $\Rightarrow$ $\exists$ mon. rastuća zaustavna vremena $\tau_1, \tau_2, \ldots$

$$(S_1, \ldots, S_n) \stackrel{d}{=} (B_{\tau_1}, \ldots, B_{\tau_n}) \quad \text{te}$$

su $(\tau_k - \tau_{k-1})$ njd. i

$$E(\tau_n - \tau_{n-1}) = EX_1^2$$
$$E(\tau_n - \tau_{n-1})^2 \leq 4EX_1^4$$

$\square$

Neka je $\qquad Y_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor tn \rfloor} \qquad t \in [0,1]$

$X_i \overset{n.j.d.}{\sim}, \ EX_i = 0, \ Var X_i = 1$

TEOREM 9

Ako (X_i) imaju konačan i 4-ti moment, tada postoje procesi $(B_n)_{t\in[0,1]}$ i $(Z_n(t))_{t\in[0,1]}$ t.d. je prvi od njih B. gibanje, a drugi ima iste kon. dim. razdiobe kao $(Y_n^{(t)})_{t\in[0,1]}$ te vrijedi

$$P(\|Z_n - W_n\|_\infty \geq \varepsilon) \longrightarrow 0 \qquad \forall \varepsilon > 0 .$$