ASIMPTOTSKO PONAŠANJE

Što sa $p^n(x,y)$ za velike n?

$$N_n(y) = \sum_{m=1}^{n} 1_{(X_m = y)}$$

TEOREM 21 Ako je y povratno, tada za sve $x \in S$

$$\frac{N_n(y)}{n} \longrightarrow \frac{1}{E_y T_y} 1_{(T_y < \infty)} \quad P_x\text{-got. sigurno}$$

pri tom $1/\infty = 0$.

$\left| \frac{N_n(y)}{n} \right| \leq 1 \Rightarrow$ izračunamo li očekivanje u

tmu 21, tm o dom. konv. $\Rightarrow$

$$E_x N_n(y)/n \longrightarrow E_x(1_{(T_y<\infty)})/E_yT_y$$

tj. $\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} p^m(x,y) \longrightarrow \rho_{xy}/E_yT_y$

Dakle $p^n(x,y)$ konvergiraju za $n\to\infty$

u Cesaro smislu.

(čak i za prolazna y, ali k 0)

Nelka je x povratno stanje $\left(\equiv \underset{\displaystyle \overset{\|}{\sum_{n=1}^{\infty} p^n(x,x)}}{E_x N(x) = +\infty} \right)$

$$I_x = \{ n \geq 1 : p^n(x,x) > 0 \}$$

$d_x = $ n.z.d I_x $\leftarrow$ <u>period</u> stanja x

LEMA 22 ("period je svojstvo klase")

$$\rho_{xy} > 0 \Rightarrow d_y = d_x$$

LEMA 23

$d_x = 1 \Rightarrow p^m(x,x) > 0$ za sve $m \geq m_0$

TEOREM 24 (o konvergenciji M. lanaca)

Ako je P ireducibilna i aperiodična (tj. $d_x = 1 \ \forall x$) sa stacionarnom razdiobom π. Tada, za sve x

$$p^n(x,y) \to \pi(y)$$

Dokaz tm 24

$S^2 = S \times S$, prij. vjer. na S^2 definiramo sa

$$\bar{p}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = p(x_1, x_2)\, p(y_1, y_2)$$

dva nez. M. lanca.

i) $\bar{p}$ je ireducibilna (zbog aperiodičnosti !!!)

lema 23 $\Rightarrow$ $\exists\, K, L, M_0$ td.

$$p^{K+M}(x_1, x_2) > 0,\; p^{L+M}(y_1, y_2) > 0 \qquad \forall M > M_0$$

$$\Rightarrow \quad \bar{p}^{K+L+M}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) > 0$$

ii) $\pi(a,b) = \pi(a) \cdot \pi(b)$ je staci. razdioba za $\overline{P}$

tm 18: $\Rightarrow$ $\pi(y) > 0$ $\Rightarrow$ y je porr.

+ ireducib

$\Rightarrow$ sva su stanja povratna za $\overline{P}$

iii) $T_{(x,x)}$ = vnj. pog. stanja (x,x)

$\overline{P}$ ireduc. porr. $\Rightarrow$ $T_{(x,x)} < \infty$ g.s.

$\Rightarrow$ T = vnj. pog. dijagonale $D = \{(x,x) : x \in S\}$

također $T < \infty$ g.s.

iv) na $\{T \leq n\}$ $\quad X_n \stackrel{d}{=} Y_n$

$$P(X_n = y, T \leq n) = \sum_{m=1}^{n} \sum_{x} P(T=m, X_m = x) \cdot P(X_n = y \mid X_m = x)$$

$$\stackrel{\text{isto}}{=} P(Y_n = y, T \leq n)$$

v) $$P(X_n = y) = P(Y_n = y, T \leq n) + P(X_n = y, T > n)$$

$$\leq P(Y_n = y) + P(X_n = y, T > n)$$

i slično za Y_n

$$\Rightarrow |P(X_n = y) - P(Y_n = y)| \leq P(X_n = y, T > n) + P(Y_n = y, T > n)$$

$$\Rightarrow \sum_{y} |P(X_n = y) - P(Y_n = y)| \leq 2P(T > n)$$

vi) ako $X_0 = x$, $Y_0 \sim \pi \Rightarrow Y_n \sim \pi$

$$\Rightarrow \| P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \|_{TV} \leq P(T > n) \to 0$$

Primjer (miješanje karata)

špil od n karata

ispod jedne od ostalih $n-1$ na sluč. način

Koliko trebamo miješati da bismo dobili uniformnu razdiobu?

T_k = vrij. ubacivanja k-te karte ispod originalno donje

↳ svih $k!$ permutacija tih karata je jednako vjerojatno

$\Rightarrow$ u $T_n = T_{n-1} + 1$ svih $n!$ permutacija su jednako njenoj.

Uz $t_k = T_k - T_{k-1}$, $k \geq 1$, $T_0 = 0$

$\Rightarrow$ $t_k \sim$ geometrijske s vj. uspjeha $k/_{n-1}$

nezavisne !!

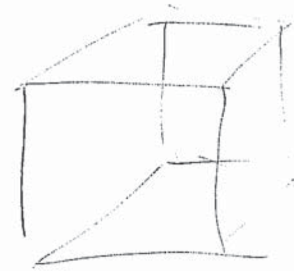
baš kao u coupon's collector problemu (pog 2)

$\Downarrow$

$$\frac{T_n}{n \log n} \xrightarrow{P} 1$$

Primjer (slučajna šetnja na hiperkocki)

$S = \{0,1\}^d$



X_n sluc. šetnja na S

- ostaje na mjestu s vj. $1/2$
- prelazi u neki od d susj. vrhova s vj. $1/2d$

Y_n — stacionarna verzija tj.

Y_0 kreće iz uniformne razdiobe

Neka su $U_i \overset{njd}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & d \\ 1/d & & 1/d \end{pmatrix}$, $V_i \overset{njd}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

$X_n = (X_{n1}, \ldots, X_{nd}) \qquad X_{n,i} \in \{0,1\}$

U n-tom koraku koordinate od X_n, Y_n na mjestu U_n postavimo na V_n

$\to$ dobijemo <u>sparivanje</u> / <u>coupling</u> lanaca (X_n) i (Y_n)

$$T_d = \inf\{m : \{U_1, \dots, U_m\} = \{1, 2, \dots, d\}\}$$

ponovo coupon's collector problem

Za $n \geq T_d$, $X_n = Y_n$

$\Rightarrow$ ponovo

$$\frac{T_d}{d \log d} \longrightarrow 1$$

OPĆENITI PROSTOR STANJA

Prebrojiv prostori često smo tretirali koristeći jednu točku x koju M. lanac pogađa s vjerojatnošću 1

Za tzv. Harrisove lance takva točka se može dodati na umjetan način i na neprebrojivom skupu stanja.

Ova klasa uključuje mnoge važne primjere.

$\boxed{\text{DEF}}$ Mark. lanac (X_n) je Harrisov ako postoje $A, B \in \mathcal{S}$ i funkcija g t.d. $g(x,y) \geq \varepsilon > 0$ $\forall x \in A$, $y \in B$ i vj. mjera ϱ na B t.d.

i) $T_A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$ zadov. $P_z(T_A < \infty) > 0$ $\forall z \in S$

ii) $x \in A$, $C \subseteq B$

$$p(x,C) \geq \int_C g(x,y)\, \varrho(dy)$$

Primjer (prebrojiv S)

- Ako postoji a t.d. $\varrho_{xa} > 0 \quad \forall x$

  Možemo postaviti $A = \{a\}$

  $B = \{b\}$ gdje b izaberemo takav da

  $p(a,b) > 0$, a $\varrho = \delta_b$, te

  $g(a,b) = p(a,b)$

- Ako vrijede i) ii) u prebrojivom S

  A i B uvijek možemo izabrati jednočlane

Primjer (neprekidne gustoće)

Ako $\exists$ neprekidna f-ja $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$

t.d.

$$p(x, dy) = p(x,y)\, dy$$

nađemo (x_0, y_0) t.d.

$$p(x,y) > 0 \qquad \forall x \in A \leftarrow \text{kugla oko } x_0$$
$$\qquad \forall y \in B \leftarrow \text{kugla oko } y_0$$

i za neki $\varepsilon > 0$

$$p(x,y) > \varepsilon \qquad \forall (x,y) \in A \times B$$

Neka $\quad \varrho(C) = \lambda(B \cap C) / \lambda(B)$

$\Rightarrow$ (ii) odmah vrijedi, $\Rightarrow$ ako možemo pokazati (i) lanac je Harrisov

Primjer ($GI/G/1$)

ξ_i njd. $\qquad W_n = (W_{n-1} + \xi_n)_+$

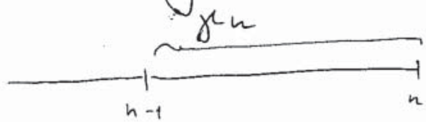
Ako $P(\xi_n < 0) > 0$, za

$A = B = \{0\}$ vrijede i) i ii)

η_n = vrij. posluživanja n tog klijenta

μ_n = vrij. između dolazaka $n-1$. i n. klijenta

W_n = vrij. čekanja n tog klijenta



$\xi_n = \eta_{n-1} - \mu_n$

- Doeblin je prvi postavio uvjet:
  - $\exists n$ t.d. $\quad p^n(x,C) \geq \varepsilon \varrho(C) \quad \forall x \in S, \ \forall C \in \mathcal{S}$

- Harris ga je generalizirao traživši da
  - $\exists A$ koji zadovoljava i), te

$$y_k = X(T_A^k) \qquad T_A^k = \inf\{n > T_A^{k-1} : X_n \in A\}$$
$$T_A^0 = 0$$

zadovoljava Doeblinov uvjet

Za Harrisov lanac na $(S, \mathcal{S})$ konstruiramo lanac na $(\bar{S}, \bar{\mathcal{S}})$ gdje

$$\bar{S} = S \cup \{\alpha\}$$

$$\bar{\mathcal{S}} = \{B, B \cup \{\alpha\} : B \in \mathcal{S}\}$$

t.d. lanac posjeti α s vjeroj. 1 u povratnom slučaju

$$\bar{p}(x, C) = p(x, C) \qquad \underline{x \in S \setminus A}$$

$$= \bar{p}(x, \{\alpha\}) = \varepsilon \qquad \underline{x \in A}$$

$$\bar{p}(x, C) = p(x, C) - \varepsilon \varrho(C) \qquad C \in \mathcal{S}$$

$$= \int \varrho(dx)\, \bar{p}(x, D) \qquad D \in \bar{\mathcal{S}}, \ \underline{x = \alpha}$$

Intuitivno: Kad posjeti A lanac

- ili ode u α s.vj. ε
- ili nastavi po $p(x, C) - \varepsilon \varrho(C)$ s.vj. $1-\varepsilon$

Kad posjeti α lanac

- izabere točku u B s razdiobom ϱ i iz nje nastavi kao gore

Kad je u $S \setminus A$

- prati tranzicijsku vjeroj. orig. lanca

Neka je ν tranz. vjerojatnost td.

$$\nu(x, \{x\}) = 1 \qquad x \in S$$

$$\nu(\alpha, C) = \xi(C)$$

LEMA 25

$$\nu\bar{P} = \bar{P} \quad i \quad \bar{P}\nu = P$$

LEMA 26

Ako je Y_n nehomog. M. lanac td.

$P_{2k} = \nu$, $P_{2k+1} = \bar{P}$ $\Rightarrow$ $\bar{X}_{2n} = Y_{2n}$ je M. lanac

s prij. vjeroj. $\bar{P}$, $X_n = Y_{2n+1}$ je M. lanac

s prij. vjeroj. P.

LEMA 27

Ako je μ vjeroj. na $(S, \mathcal{S})$ $\Rightarrow$

$$E_\mu f(X_n) = \overline{E}_\mu \overline{f}(\overline{X}_n)$$

gdje za ogr. izmjerivu f na S, $\overline{f} = r f$

tj. $\overline{f}(x) = f(x) \quad x \in S$

$\quad = \int f \, d\varrho \quad x = \alpha$

$\Downarrow$ razumijeti $(\overline{X}_n)$ je dovoljno za razumijeti ponašanje od (X_n)

POVRATNOST i PROLAZNOST

$$R = \inf\{n \geq 1 : \overline{X}_n = \alpha\} = R_1$$

$$R_k = \inf\{n > R_{k-1} : \overline{X}_n = \alpha\}$$

Ako $P_\alpha(R<\infty)$ kažemo da je lanac <u>povratan</u>, inače je <u>prolazan</u>

$$I_2 \qquad P_\alpha(R_k < \infty) = P_\alpha(R<\infty)^k$$

$$\Rightarrow \qquad P_\alpha(\overline{X}_n = \alpha \text{ b.č.}) = \begin{matrix} 1 & \text{u povratnom} \\ 0 & \text{u prolaznom} \end{matrix}$$

slučaju

$\bar{X}_n$ je povratan ako $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}^n(\alpha,\alpha) = \infty$

TEOREM 28

Neka je $\lambda'(C) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \bar{p}^n(\alpha, C)$, u

povratnom slučaju

$$\lambda'(C) > 0 \Rightarrow P_\alpha(\bar{X}_n \in C \text{ b.č.}) = 1$$

Za λ'-gotovo sve x $\quad P_x(R < \infty) = 1$

Može se (i treba) pokazati da povratnost za (X_n) ne ovisi o izboru skupova A, B i mjere ξ u i) & ii)

Primjer (GI/G/1)

$$S_n = X_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n = W_n \quad \text{za } n \le N$$

$$N = \inf\{n : S_n < 0\}$$

a $W_N = 0$

Kao i u M/G/1 modelu $\Rightarrow$

GI/G/1 je povratan za $\mu = E\xi_i \le 0$

prolazan za $\mu = E\xi_i > 0$

STACIONARNE MJERE

TEOREM 29

U povratnom slučaju postoji stacionarna mjera i to

$$\bar{\mu}(C) = E_\alpha\left(\sum_{n=0}^{R-1} 1_{\{\bar{X}_n \in C\}}\right) \qquad C \in \mathcal{S}$$

$$R = \inf\{n \geq 1 : \bar{X}_n = \alpha\}$$

$\Rightarrow$ GI/G/1 ima stac. mjeru ako $\mu \leq 0$

TEOREM 30

U povratnom slučaju, ako je ν σ-konačna stacionarna mjera, tada $\nu = \bar{\nu}(\alpha) \cdot \mu$ za μ iz teorema 29.

KONVERGENCIJA

Harrisov lanac koji je povratan nazivamo **aperiodičnim** ako je

n.z.d. $\{n \geq 1 : \bar{P}^n(\alpha, \alpha) > 0\} = 1$

TEOREM 31

Ako je (X_n) aperiodičan povratan Markovljev lanac sa stacionarnom razdiobom π, za x t.d. $P_x(R<\infty) = 1 \Rightarrow$

$$\| p^n(x,\cdot) - \pi(\cdot)\|_{TV} \longrightarrow 0 \quad , n \to \infty$$

NAP tm 28 $\Rightarrow$ konvergencija vrijedi za π-gotovo sve x.

Primjer (GI/G/1)

$$W_n = (W_{n-1} + \zeta_n)_+ \qquad \zeta_n \text{ njd}$$

$E\zeta_n < 0$ pokazuje se

- (W_n) ima stacionarnu razdiobu

$$W_n \xrightarrow{d} M = \max(0, \zeta_1, \zeta_1 + \zeta_2, \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3, \dots)$$

- Za Laplaceov transformaciju od M vrijedi ako

$$\zeta_n = \eta_{n-1} - \mu_n$$

$$P(\mu_n > x) = e^{-\alpha x}$$

Pollaczek - Hinčin formula

$$Ee^{-sM} = \frac{(1+\alpha \cdot E\eta)\cdot s}{s-\alpha+\alpha B(s)}$$

gdzie $B(s) = E e^{-s\eta}$

tj. za općenite service times

& Poisson arrivals.