VI MARKOVLJEVI LANCI

$(S, \mathcal{S})$ izmjeriv prostor

DEF Niz sluč. varijabli $(X_n)_{n\geq 0}$ s vrijednostima u S je Markovljev lanac u odn. na filtraciju $\mathcal{F}_n$, ako $X_n \in \mathcal{F}_n$ i za sve $B \in \mathcal{S}$

$$P(X_{n+1} \in B \mid \mathcal{F}_n) = P(X_{n+1} \in B \mid X_n)$$

---

tipično $\quad \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$

$\boxed{\text{DEF}}$ Funkcija $p : S \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ je <u>prijelazna vjerojatnost</u> ako

i) $\forall x \in S$, $A \mapsto p(x, A)$ je vjeroj. na $(S, \mathcal{S})$

ii) $\forall A \in \mathcal{S}$ $x \mapsto p(x, A)$ je izmjeriva funkcija

---

Kažemo da je (X_n) M. lanac s prijelaznom vjerojatnosti p ako

$$P(X_{n+1} \in B \mid \mathcal{F}_n) = p(X_n, B) \qquad (*)$$

Ako je uz prijelaznu vjerojatnost zadana još i vjerojatnost μ na $(S, \mathcal{S})$ možemo konstruirati niz konzistentnih konačnodim. razdioba

$$P(X_j \in B_j \, ; \, j=0,\dots,n) = \int_{B_0} \mu(dx_0) \int_{B_1} p(x_0, dx_1) \cdots \int_{B_n} p(x_{n-1}, dx_n) \qquad (1)$$

<u>inicijalna razdioba</u>

Ako je $(S, \mathcal{S})$ zgodan prostor, Kolmogorovljev teorem o proširenju pokazuje ...

postoji vj. mjera P_μ na $(S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0})$ t.d. preslikavanja $X_n(\omega) = \omega_n$ imaju kon.-dim. razdiobe kao u (1)

Ako $\mu = \delta_x$ pišemo $P_x = P_{\delta_x}$,

Uočite, preko

$$P_\mu(A) = \int \mu(dx)\, P_x(A)$$

možemo definirati P_μ za sve μ čim su zadane vjerojatnosti P_x

TEOREM 1

Gore uvedeni X_n predstavlja Mark. lanac (u odn. na $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$) s prijelaznom vjerojatnosti P.

Dkaz. · iskoristite $\pi - \lambda$ teorem

· treba vidjeti

$$\int_A 1_{X_{n+1} \in B} \, dP_\mu = \int_A p(X_n, B) \, dP_\mu \quad \forall A \in \mathcal{F}_n, \; B \in \mathcal{S}$$

v. (*)

· $A = \{X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n\}$ čine π-sistem i zadovoljavaju ↑ ....

TEOREM 2

Ako je (X_n) Mark. lanac s prijelaznom vjerojatnosti p i inicijalnom razdiobom μ, tada mu kon-dim. razdiobe zadovoljavaju relaciju (1).

Dkz. prvo se pokaže

$$E(f(X_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \int p(X_n, dy)\, f(y)$$

za sve

$f \in \mathcal{H}$ = klasa ogr. fja za koje to vrijedi
i $\mathcal{H} \ni 1_A$

TEOREM 3 (o monotonim klasama)

Ako je $\mathcal{A}$ π-sistem koji sadrži Ω, a $\mathcal{H}$ klasa realnih fja t.d.

i) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow 1_A \in \mathcal{H}$

ii) $f, g \in \mathcal{H}, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g$ & $c \cdot f \in \mathcal{H}$

iii) $f_n \in \mathcal{H}$ nenegativne i $f_n \nearrow f \Rightarrow f \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \mathcal{H}$ sadrži sve ograničene fje izmjerive u odn. na $\sigma(\mathcal{A})$.

Dkz. · ii) + iii) + $\Omega \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{G} = \{A : 1_A \in \mathcal{H}\}$ je λ-sistem $\Rightarrow \mathcal{G} \supseteq \sigma(\mathcal{A})$

· ii) $\Rightarrow \mathcal{H} \supseteq \forall$ jedn. fje

· iii) $\Rightarrow \mathcal{H} \supseteq \forall$ ogr. izmj. fje

-

Dok. tm 2 (nastavak)

- tm 3 $\Rightarrow$ $\mathcal{H} \supseteq$ sve ogr. fje

- sad

$$E\Big(\prod_{m=1}^{n} f_m(X_m)\Big) = E\, E\Big(\prod_{m=1}^{n} f_m(X_m) \,\Big|\, \mathcal{F}_{n-1}\Big)$$

$$= E\Big(\prod_{1}^{n-1} f_m(X_m) \cdot \int p_{n-1}(X_{n-1}, dy)\, f_n(y)\Big)$$

- (1) slijedi indukcijom $\square$

Činjenica da za $(\Omega, \mathcal{F})$ možemo uzeti

$$(S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0})$$

a za

$$X_n(\omega) = \omega_n$$

ima dvije prednosti:

- $\forall \mu$, $\exists P_\mu$ na $(\Omega, \mathcal{F})$ td. (X_n) je M. lanac i $X_0 \sim \mu$
- operatori pomaka [shift]

$$(\vartheta_n \omega)(m) = \omega_{m+n}$$

su dobro definirani.

U slučaju: S prebrojiv i $\mathcal{S} = \mathcal{P}(S)$

sve je jednostavnije

- dvostruki niz $p(i,j) \geq 0$, $\sum_j p(i,j) = 1$ $\forall i,j \in S$

zadaje prij. vjeroj.:

$$p(i,A) = \sum_{j \in A} p(i,j)$$

- $(*) \iff$

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p(i,j)$$

$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

<u>LEMA 4</u> Ako su X, Y sl. var u $(S, \mathcal{S})$, t.d. $X \in \mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ & Y nezavisne, a φ fja t.d. $E|\varphi(X,Y)| < \infty$ tada

$$E(\varphi(X,Y) | \mathcal{F}) = g(X)$$

gdje $g(x) = E(\varphi(x, Y))$

Dk. · treba vidjeti

$$E(\varphi(X,Y) \cdot 1_C) = E(g(X) \cdot 1_C) \quad \forall C \in \mathcal{F} \quad (**)$$

· lako za $\varphi(x,y) = 1_A(x) \cdot 1_B(y)$

· $A \times B$, $A, B \in \mathcal{S}$ čine π-sistem, tm o monotonim klasama $\Rightarrow (**)$ istina za sve φ

$\square$

PRIMJERI

<u>Primjer</u> (slučajna šetnja)

Nelka su $\xi_n \overset{iid}{\sim} \mu$, $X_0 = x$, $X_n = X_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$

$\Rightarrow$ (X_n) je M. lanac s prij. vjeroj.

$$p(x, A) = \mu(A - x)$$

koristeći lemu 4 za

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_n, \; X = X_n, \; Y = \xi_{n+1}, \; \varphi(x, y) = \mathbb{1}_{(x+y \in B)}$$

$\Rightarrow$ $(*)$

Primjer (proces grananja)

$S = \mathbb{N}_0$, ξ_i nj.jd. s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$

$$p(i,j) = P\left(\sum_{m=1}^{i} \xi_m = j\right)$$

Primjer (Lanac obnavljanja)

$S = \mathbb{N}_0$, $f_k \geq 0$, $\sum_1^\infty f_k = 1$ razdioba na $\mathbb{N}$

$\xi_i \overset{njd}{\sim} (f_j)$ tj. $P(\xi_m = j) = f_j$

$T_0 = i_0$, $T_k = T_{k-1} + \xi_k$ ← dolasci (obnavljanja)

$$Y_m = \begin{cases} 1 & m \in \{T_0, T_1, \dots\} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$ ← indikator obnavljanja

-

$$X_n = \inf\{m-n : m \geq n, \ y_m = 1\}$$

y_n	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1
X_n	4	3	2	1	0	1	0	0	2	1	0

(X_n) je M. lanac i vrijedi

$$p(0,j) = f_{j+1} \qquad j \geq 0$$

$$p(i,i-1) = 1 \qquad i \geq 1$$

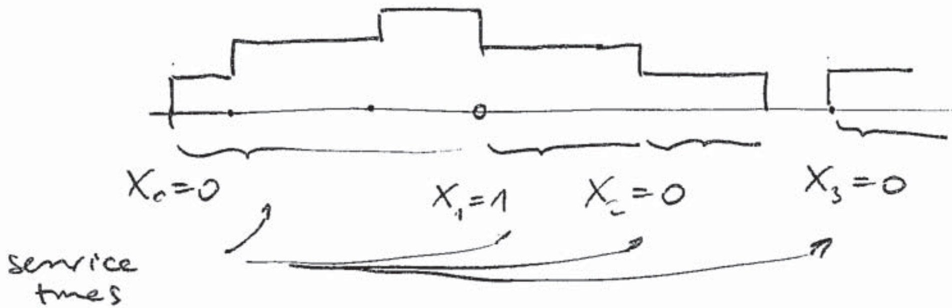
$$p(i,j) = 0 \qquad \text{inače}$$

Primjeri (M/G/1 rep)

M - Markov tj. Poisson arrivals (Poissonov proces dolazaka)

G - general service time $\sim F$

1 - server



X_n = # klijenata koji čekaju u repu u času kada n-ti klijent biva uslužen

$X_0 = x$

neka je $a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \, dF(t)$ = vj. da će k klijenata stići tokom jednog posluživanja

Neka su

$\xi_i \overset{iid}{\sim} \quad P(\xi_i = k-1) = a_k$

= neto broj novih klijenata tokom 1 posluživanja

sada

$X_{n+1} = (X_n + \xi_{n+1})^+$ čini M. lanac t.d.

$p(0,0) = a_0 + a_1$

$p(j, j+k-1) = a_k \qquad j \geq 1, k > 1$

tipično pretpostavljamo zbog jednostavnosti:

$a_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$

Primjer (Ehrenfest chain)

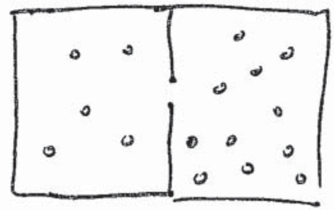
$$S = \{0, 1, \dots, r\}$$

$$p(k, k+1) = \frac{r-k}{r}$$

$$p(k, k-1) = k/r$$

$$p(i, j) = 0 \quad \text{inače}$$

2 urne : k u prvoj
s kuglicama $r-k$ u drugoj



↑ molekule zraka

– biramo kuglicu slučajno i premjestamo ju u drugu (obrnutu) urnu

Primjer (birth & death chains)

$S = \mathbb{N}_0 \qquad p(i,j) = 0 \qquad$ za $|i-j| > 1$

U prebrojivom slučaju dakle

$$\mathbb{P}_\mu(X_k = i_k \;\; k=0,\dots,n) = \mu(i_0) \cdot \prod_{m=1}^{n} p(i_{m-1}, i_m)$$

$\Downarrow$

$$\mathbb{P}_\mu(X_n = j) = \sum_i \mu(i)\, p^n(i,j)$$

(i,j) element matrice P^n

gdje $P = (p_{ij})$

POOPĆENJA MARKOVLJEVOG SVOJSTVA

Vidjeli smo po definiciji

$$P(X_{n+1} \in B \mid \mathcal{F}_n) = p(X_n, B)$$

no prvo poopćenje kaže da događaj tj. varijablu $1_{\{X_{n+1} \in B\}}$ možemo zamijeniti bilo kojom ogr. varijablom oblika $h(X_n, X_{n+1}, \ldots)$ na obje strane slučaja

Pretpostavljamo

$$(\Omega, \mathcal{F}) = (S^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{S}^{\mathbb{N}_0})$$

$$X_n(\omega) = \omega_n, \quad (\vartheta_n \omega)(m) = \omega_{m+n}$$

TEOREM 5 (Markovljevo svojstvo)

Ako je $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ogr. & izmjeriva

$$E_\mu(Y \circ \vartheta_n \mid \mathcal{F}_n) = E_{X_n} Y$$

NAP D.s. je zapravo $\varphi(X_n)$ gdje je

$$\varphi_x = E_x Y$$

Dokaz tm o monotonim klasama

Posljedica je M. svojstva

$$A \in \sigma(X_0, \dots, X_n), \quad B \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

za svaku inic. razdiobu μ

$$P_\mu(A \cap B \mid X_n) = P_\mu(A \mid X_n) \cdot P_\mu(B \mid X_n)$$

uvjetno na danas
prošlost i budućnost
su nezavisne
za Mark. procese

TEOREMA 6 (Chapman Kolmogorov)

$$P_x(X_{m+n}=z) = \sum_y P_x(X_m=y)\,P_y(X_n=z)$$

Dim

$$P_x(X_{n+m}=z) = E_x\big(P_x(X_{n+m}=z \mid \mathcal{F}_m)\big)$$

$$= E_x\big(P_{X_m}(X_n=z)\big) \quad = \quad \text{d.s.} \qquad \square$$

tm 5.

TEOREM 7

Ako je (X_n) M. lanac i

$$P\left(\bigcup_{n+1}^{\infty} \{X_n \in B_n\} \mid X_n\right) \geq \delta > 0$$

na $\{X_n \in A_n\}$

$\Downarrow$

$$P\left(\{X_n \in A_n \text{ b.č}\} \setminus \{X_n \in B_n \text{ b.č.}\}\right) = 0$$

"pedestrian ... will not be crossing indefinitely"

Doeblin, Chung

Dokaz:

$$\Lambda_n = \{X_{n+1} \in B_{n+1}\} \cup \{X_{n+2} \in B_{n+2}\} \cup \dots$$

$$\Lambda = \bigcap \Lambda_n = \{X_n \in B_n \text{ b.č.}\}$$

$\Gamma = \{X_n \in A_n \text{ b.č.}\}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$

$\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$, koristeći M. svojstvo

$$E(1_{\Lambda_n} \mid X_n) = E(1_{\Lambda_n} \mid \mathcal{F}_n) \to E(1_\Lambda \mid \mathcal{F}_\infty) = 1_\Lambda$$

za $\omega \in \Gamma$ e.s. je $\geq \delta$ b.č.

$\Rightarrow$ $1_\Lambda(\omega) = 1$ za $\omega \in \Gamma$

$\Rightarrow$ $\Gamma \subseteq \Lambda$ $\square$