V MARTINGALI

- elegantno i višestruko korisno poopćenje pojma sluč. šetnje s korakom čije je očekivanje 0

- dvije osnovne činjenice
  - očekivanje martingala ostaje uvijek isto tj. kladeći se na njih ne možemo zaraditi
  - submartingali kao stohast. analog rastućih nizova uvijek konvergiraju g.s. ako su ograničeni odozgo tj. $\sup EX_n^+ < \infty$

UVJETNO OČEKIVANJE

- $(\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P})$ vj. prostor, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_0$ pod σ-algebra

$\boxed{\text{DEF}}$ Za $\mathcal{F}_0$-izmjerivu sl. var X t.d. $E|X| < \infty$

<u>uvjetno očekivanje</u> <u>od X u odn. na</u> $\mathcal{F}$ $(E(X|\mathcal{F}))$

je proizvoljna sluč. varijabla Y t.d.

i) Y je $\mathcal{F}$ izmjeriva

ii) $$\int_A X \, dP = \int_A Y \, dP \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

tj. $E[I_A X] = E[I_A Y]$

Jasno, takvih Y može biti više no mi ipak kažemo da je uvj. očekivanje g.s. jedinstveno.

LEMA 1 Iz i) & ii) $\Rightarrow$ Y je integrabilna

Dokaz: Kako $A = \{Y > 0\} \in \mathcal{F}$ po i) $\Rightarrow$

$$\int_A Y \, dP = \int_A X \, dP \leq \int_A |X| \, dP \qquad \text{iz ii)}$$

$$\int_{A^c} -Y \, dP = \int_{A^c} -X \, dP \leq \int_{A^c} |X| \, dP$$

$\Rightarrow E|Y| \leq E|X|$ $\square$

JEDINSTVENOST

Ako su y, y' dvije verzije uvj. očekivanja $E(X|\mathcal{F})$ tada

$$\int_A y\,dP = \int_A y'\,dP \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

za $A = \{y - y' \geq \varepsilon > 0\}$ $\Rightarrow$

$$P(A)\cdot\varepsilon \leq \int_A (y-y')\,dP = \int_A (X-X)\,dP = 0$$

$\Rightarrow P(A) = 0 \quad \forall \varepsilon \quad \Rightarrow \quad y \leq y'$ g.s.

pa i obratno $\quad \Rightarrow \quad y = y'$ g.s. $\quad \square$

EGZISTENCIJA

<u>Radon-Nikodymov</u> : μ, ν σ-konačne mjere na $(\Omega, \mathcal{F})$

$\nu \ll \mu \Rightarrow \exists f \in \mathcal{F}$ t.d.

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \qquad \forall A \in \mathcal{F}; \text{ pišemo } f = \frac{d\nu}{d\mu}.$$

<u>Ako $X \geq 0$</u>, neka $\mu = P$

$$\nu(A) = \int_A X \, dP, \quad A \in \mathcal{F} \quad \text{zadovoljava } \nu \ll \mu$$

$\Rightarrow \exists \; d\nu/d\mu \in \mathcal{F}$ t.d. $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\underline{\int_A X \, dP = \nu(A)} = \underline{\int_A \frac{d\nu}{d\mu} \, dP} \qquad \text{tj. } \frac{d\nu}{d\mu} = E(X|\mathcal{F})$$

<u>općenito</u> : $X = X^+ - X^-, \ldots$

Primjer ($X \in \mathcal{F}$)

Po def: X zadovoljava i) & ii) tj. $E(X|\mathcal{F}) = X$

$\mathcal{F}$ – modelira informacije koje su nam dostupne, a $E(X|\mathcal{F})$ je najb. što možemo reći o X u odn. na $\mathcal{F}$, posebno ako znamo X naš "best guess" mora biti X. (intuitivno!)

Za X td. $EX^2 < \infty$ vidjet ćemo $E(X|\mathcal{F})$ je zapravo projekcija od X na $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tj. zaista "best guess" u nekom smislu.

Primjer (X nezavisna od $\mathcal{F}$)

Ne znamo ništa o X, dakle, "best guess" mora biti EX tj. broj. (intuitivno!)

Jasno EX zadovoljava i), broj je $\mathcal{F}$-izmjeriv.

a zbog nezavisnosti: X i 1_A su nezavisne sluč. varij. za $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \int_A X \, dP = E[X 1_A] = EX \cdot 1_A = \int_A EX \, dP$$

$\Rightarrow$ ii)

NAP) U oba primjera $E(X \mid \mathcal{F})$ smo pogodili i zatim potvrdili.

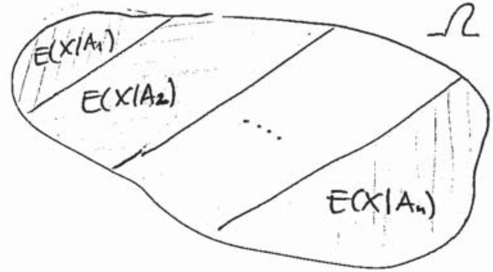
<u>Primjer</u> (prebrojiva particija)

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad A_i \text{ disjunktni}, \quad \mathcal{F} = \sigma(A_1, A_2, \dots)$$

tada

$$E(X|\mathcal{F})(\omega) = E(X|A_i) = \frac{E(X \cdot 1_{A_i})}{P(A_i)} \text{ za } \omega \in A_i$$

(provjeri i) & ii) D.Z.)



Posebno

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X|\Omega) = EX.$$

Primjer (neprekidan sl. vektor)

- (X,Y) imaju zajed. gustoću f tj.

$$P((X,Y)\in B) = \int_B f(x,y)\,dx\,dy \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

neka $\int f(x,y)\,dx > 0 \quad \forall y$ zbog jednostavnosti;

ako $E|g(X)| < \infty$ tada

$$E(g(X)\,|\,Y) = h(Y) \quad \text{gdje je}$$

$$h(y) = \int g(x) f(x,y)\,dx \Big/ \int f(x,y)\,dx$$

i) je očito

ii) Σα $A \in \sigma(Y)$ $\exists B$ t.d. $A = \{\omega : Y(\omega) \in B\}$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$E(h(Y)1_A) = \int_B \int h(y) f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_B \int g(x) f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= E(g(X)1_B(Y)) = E(g(X)\cdot 1_A)$$

Ako su X, Y nezavisne, a φ t.d. $E|\varphi(X,Y)| < \infty$

te $g(x) := E(\varphi(x,Y)) \Rightarrow$

$$\boxed{E(\varphi(X,Y)|X) = g(X)}$$

~~Dokaz~~ jasno $g(X) \in \sigma(X) \Rightarrow$ vrijedi i)

ii) $A \in \sigma(X) \Rightarrow \exists C$ t.d. $A = \{X \in C\} \Rightarrow$

$$\int_A \varphi(X,Y)\, dP = E[\varphi(X,Y)\, 1_C(X)] =$$

$$= \iint \varphi(x,y)\, 1_C(x)\, \nu(dy)\, \mu(dx)$$

$$= \int 1_C(x)\, g(x)\, \mu(dx) = \int_A g(X)\, dP$$

$\square$

SVOJSTVA UVJ. OČEK.

TEOREM 2

a) $E(aX + bY|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + bE(Y|\mathcal{F})$ linearnost

b) $X \le Y \Rightarrow E(X|\mathcal{F}) \le E(Y|\mathcal{F})$

c) $X_n \geq 0,\ X_n \nearrow X,\ EX < \infty \Rightarrow$

$$E(X_n|\mathcal{F}) \nearrow E(X|\mathcal{F})$$

Vrijede i nejednakosti:

$$\boxed{P(|X| > a\ |\mathcal{F}) \le \frac{E(X^2|\mathcal{F})}{a^2}}$$

$\forall a > 0$ ČEBIŠEV

$\forall \varphi$ konveksne, td $E|X|, E|\varphi(X)| < \infty$

$$\boxed{\varphi(E(X|\mathcal{F})) \le E(\varphi(X)|\mathcal{F})}$$

JENSEN

CAUCHY - SCHWARZ Σ

$$E(XY|\mathcal{G})^2 \leq E(X^2|\mathcal{G})\,E(Y^2|\mathcal{G})$$

TEOREM 3

Uvjetno očekivanje je kontrakcija u L^p, $p \geq 1$

Dok. Jensen nej. $\Rightarrow$ $$|E(X|\mathcal{F})|^p \leq E(|X|^p|\mathcal{F})$$

uzimajući oček $\Rightarrow$
$$E(E(X|\mathcal{F}))^p \overset{*}{\leq} E(E(|X|^p|\mathcal{F})) = E|X|^p$$
$\square$

* slijedi jer po ii) iz def. uvj oček.
za $A = \Omega$ $\Rightarrow$
$$E(E(Y|\mathcal{F})) = E(Y) \qquad \forall Y, \forall \mathcal{F}.$$

TEOREM 5

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G},\ E(X|\mathcal{G}) \in \mathcal{F} \Rightarrow E(X|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{G})$$

Dokaz: Jasno $E(X|\mathcal{G}) \in \mathcal{F} \Rightarrow$ i) po pretp.

ii) za $A \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ $\quad \int_A X\,dP = \int_A E(X|\mathcal{G})\,dP$

TEOREM 6

$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \Rightarrow$

i) $E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) = E(X|\mathcal{F}_1)$

ii) $E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1) = E(X|\mathcal{F}_1)$

"smaller σ-field always wins"

ZAD) Na $\Omega = \{a,b,c\}$ nađite $X, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ t.d.

$$E(E(X|\mathcal{F}_1)|\mathcal{F}_2) \neq E(E(X|\mathcal{F}_2)|\mathcal{F}_1)$$

TEOREM 7

Ako $X \in \mathcal{F}$, $E|Y|, E|XY| < \infty \Rightarrow$

$$E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F})$$

Dokaz: d.s. $\in \mathcal{F} \Rightarrow$ i) ostaje vidjeti ii) u 4 koraka.

1) $X = 1_B$ $B \in \mathcal{F}$ za $A \in \mathcal{F}$

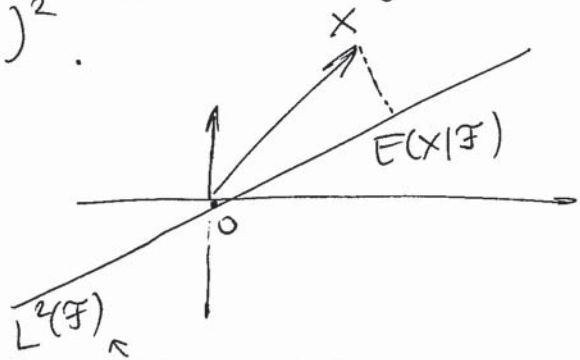
$$\int_A 1_B E(Y|\mathcal{F})dP = \int_{A\cap B} E(Y|\mathcal{F})dP = \int_{A\cap B} Y dP = \int_A 1_B Y dP$$

2) jednostavne X, 3) neneg. X, 4) $\forall X$, ...

$\square$

TEOREM 8

Ako $EX^2 < \infty$, $E(X|\mathcal{F})$ je $\mathcal{F}$ izmjeriva sl. var. Y koja minimizira $E(X-Y)^2$.



zatv. potprostor Hilbertovog prostora $L^2(\mathcal{F})$

Dokaz: $Z \in L^2(\mathcal{F}) \Rightarrow E|XZ| < \infty$ (C.S.)

tm7 $\Rightarrow$

$$Z E(X|\mathcal{F}) = E(ZX|\mathcal{F}) \quad /E$$

$$\Rightarrow E(Z(X - E(X|\mathcal{F}))) = 0 \Rightarrow$$

$$X - E(X|\mathcal{F}) \perp L^2(\mathcal{F})$$

Ako $Y \in L^2(\mathcal{F})$, $Z = E(X|\mathcal{F}) - Y \Rightarrow$

$$E(X-Y)^2 = E[X - E(X|\mathcal{F}) + Z]^2 = E[X - E(X|\mathcal{F})]^2 + EZ^2$$

minimalno za $Z = 0$

$\square$

Ако $EX^2 < \infty$, за $Var(X|\mathcal{F}) = E(X^2|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})^2$

$\Rightarrow$

$$Var(X) = E(Var(X|\mathcal{F})) + Var(E(X|\mathcal{F}))$$

REGULARNE UVJETNE VJEROJATNOSTI

• $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$; $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$ $\quad \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ σ-algebra

$\mu : \Omega \times \mathcal{S} \to [0,1]$ je <u>regularna uvjetna razdioba od X za dani $\mathcal{G}$ ako</u>

i) $\forall A$, $\omega \mapsto \mu(\omega, A)$ je verzija od $\mathbb{P}(X \in A \mid \mathcal{G})$

ii) za g.s. ω $\quad A \mapsto \mu(\omega, A)$ je vj. mjera na $(S, \mathcal{S})$

Npr. za (X,Y) s gustoćom $f > 0$

i $\mu(y, A) = \int_A f(x,y)\,dx \Big/ \int f(x,y)\,dx \Rightarrow \mu(Y(\omega), A)$ je r.u.r. od X uz $\sigma(Y)$

Nažalost reg. uvj. razdiobe ne postoje uvijek.

Ako $S = \Omega$, $X = id$; μ se naziva <u>regularna</u> uvjetna vjerojatnost.

Ipak, ako je $(S, \mathcal{S})$ <u>zgodan</u> : [(v. pog II) $\exists$ bijekcija $\varphi : S \to \mathbb{R}$ td. φ, φ^{-1} izmjerive, npr.

ako S izmjeriv podskup
- potpunog
- separabilnog
- metričkog prostora

& $\mathcal{S} = \mathcal{B}(S)$

$\Rightarrow (S, \mathcal{S})$ zgodan]

<u>r.u.r. uvijek postoje</u>.

MARTINGALI, KONVERGENCIJA G.S.

- $(\mathcal{F}_n)$ = filtracija (rastući niz σ-algebri)
- (X_n) je adaptiran na $(\mathcal{F}_n)$ ako $X_n \in \mathcal{F}_n \ \forall n$.

$\boxed{\text{DEF}}$ Niz sl. var (X_n) t.d.

i) $E|X_n| < \infty$

ii) X_n adaptiran na $\mathcal{F}_n$

iii) $E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad \forall n$

naziva se martingal, ako umjesto = piše

$\leq$ supermartingal

$\geq$ submartingal

(u odn. na $(\mathcal{F}_n)$).

<u>Primjer</u> (sim. jedn. sluč. šetnja)

$\xi_i \overset{\text{njd}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $X_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$

$\Rightarrow (X_n)$ je $(\mathcal{F}_n)$-martingal

Ovdje $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ uočimo

$\Uparrow$ filtracija koju koristimo ako $\mathcal{F}_n$ nije eksplicitno navedena.

TEOREM 9

Ako je (X_n) supermartingal

$$E(X_n \mid \mathcal{F}_m) \leq X_m \qquad \forall n > m.$$

Dokaz: po def. za $n = m+1$ je istina, nastavimo indukcijom, naime za $k \geq 2$

$$E(X_{m+k} \mid \mathcal{F}_m) = E(E(X_{m+k} \mid \mathcal{F}_{m+k-1}) \mid \mathcal{F}_m)$$

$$\leq E(X_{m+k-1} \mid \mathcal{F}_m) \leq \dots$$

TEOREM 10

i) Ako je (X_n) submartingal

$$\Rightarrow E(X_n | \mathcal{F}_m) \geq X_m \qquad \forall n > m$$

ii) Ako je (X_n) martingal

$$\Rightarrow E(X_n | \mathcal{F}_m) = X_m \qquad \forall n > m.$$

TEOREM 11

Ako je (X_n) martingal i φ konveksna & $E|\varphi(X_n)| < \infty \ \forall n \Rightarrow (\varphi(X_n))$ je <u>submartingal</u>

Posebno ako $E|X_n|^p < \infty \ \forall n$ i neki $p \geq 1$

$\Rightarrow |X_n|^p$ je <u>submartingal</u>.

TEOREM 12

Ako je (X_n) submartingal i φ rastuća i konveksna & $E|\varphi(X_n)|<\infty$ $\forall n$ $\Rightarrow$

$(\varphi(X_n))$ je submartingal

$\Downarrow$

- (X_n) submartingal $\Rightarrow$ $(X_n-a)^+$ je submartingal

- (X_n) supermartingal $\Rightarrow$ $X_n \wedge a$ je supermartingal