VJEROJATNOST • BLIC TEST

1) Koji od sljedećih uvjeta povlači $P(\|S_n\| < \varepsilon \text{ b.č.}) = 0$ za sluč. šetnju (S_n)

a) $P(\|S_n\| > \varepsilon) \to 0$ b) $\sum P(\|S_n\| < \varepsilon) < \infty$ c) $\sum P(\|S_n\| < 2\varepsilon) = \infty$

2) Za povratnost (S_n) u $d=1$, po Chung-Fuchs tm-u dovoljno je

a) $S_n/n \xrightarrow{P} 0$ b) $S_n/n \xrightarrow{g.s.} 0$ c) $\limsup \frac{E|S_n|}{n} < \infty$

3) (S_n) je povratna akko za $\delta > 0$

a) $\displaystyle\int_{(-\delta,\delta)^d} \operatorname{Re} \frac{1}{1-\varphi(y)}\, dy = +\infty$ b) $\displaystyle\int_{[(-\delta,\delta)^d]^c} \operatorname{Re} \frac{1}{1-\varphi(y)}\, dy < \infty$ c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \frac{1}{1-r\varphi(y)}\, dy < \infty$ za neki $r < 1$

4) Niz vj. mjera (μ_n) je napet ako $\forall \varepsilon > 0 \ \exists M$ t.d.

a) $\limsup \mu_n((-M,M)^c) < \varepsilon$ b) $\liminf \mu_n((-M,M)^c) < \varepsilon$ c) $\liminf \mu_n((-M,M)) \geq 1-\varepsilon$

5) Lindebergov uvjet za CGT je: $\forall \varepsilon > 0$

a) $\lim \sum_1^n E(|X_{n,m}|^2 \mid |X_{n,m}| > \varepsilon) < \infty$ b) $\lim \sum_1^n E(|X_{n,m}|^2; |X_{n,m}| > \varepsilon) = 0$

c) $\lim \sum_1^n E(|X_{n,m}|^{2+\delta}; |X_{n,m}| \geq \varepsilon) = 0$

za neki $\delta > 0$

6) Optimalan dovoljni uvjet za SZVB je

a) $\lim x P(|X_i| > x) = 0$ b) $E|X_i| < \infty$ c) $\limsup x P(|X_i| > x) < \infty$

TEORIJA OBNAVLJANJA

Neka su (ξ_i) njd. sluč. varijable s vrijednostima u $[0, \infty)$, definiramo

$$T_0 = 0$$
$$T_k = T_{k-1} + \xi_k \quad , k \geq 1$$

NIZ OBNAVLJANJA

$\boxed{\text{DEF}}$ Proces obnavljanja je slučajni proces (N_t) t.d. $N_t = \inf\{ k : T_k > t \}$ ← BROJ OBNAVLJANJA DO ČASA t

TEOREM 24

Ako $\mu = E\xi_i \leq +\infty \Rightarrow N_t / t \xrightarrow{g.s.} 1/\mu$

v. tm 33 pog 2.

TEOREM 25 (ELEMENTARNI TEOREM OBNAVLJANJA)

Funkcija $U(t) = EN_t$ zadovoljava

FUNKCIJA OBNAVLJANJA

$$U(t)/t \to 1/\mu$$

Dokaz Prva Waldova jednakost $\Rightarrow$

$$t \le ET_{N_t} = \mu \cdot EN_t \qquad \text{za } \mu < \infty \qquad (1)$$

ako $EN_t < \infty$, no to je istina čim $P(\xi_i > 0) > 0$ (D.Z.)

Za $\mu = +\infty$ (1) vrijedi trivijalno

Nađimo gornju ogradu uz dodatni uvjet $P(\xi_i \le c) = 1$

Sada ponovo Wald. jedn. $\Rightarrow$

$$\mu E N_t = E T_{N_t} \leq t + c \Rightarrow$$ rezultat za ogr. razdiobe

Općenito definiramo $\bar{\xi}_i = \xi_i \wedge c$, $\bar{T}_n$, $\bar{N}_t$ analogno

Jasno

$$E N_t \leq E \bar{N}_t \leq (t+c) / E \bar{\xi}_i$$

pustimo pro $t \to \infty$, a zatim $c \to \infty$ $\Rightarrow$

$$\limsup E N_t / t \leq 1/\mu$$

$\square$

Korisno je definirati i

$$U(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T_n \in A) = E \# \{ i : T_i \in A \}$$ $\leftarrow$ MJERA OBNAVLJANJA

Uočite $\quad U(t) = U([0,t])$

ponašanje mjere / funkcije U bitno ovisi o tome da li je razdioba koraka ξ_i aritmetička ili ne.

$$P\{\xi_i \in \delta \cdot \mathbb{N}_0\} = 1$$ za neko $\delta > 0$ ← aritmetička razdioba

Proces N_t, odn. niz T_n možemo promatrati i uz odgodu tj. pretpostavimo

$T_0 \sim G$ sluč. varijabla ≥ 0

nezavisna od (ξ_i)

Uočite, za ovaj N_t, $V(t) = EN_t$ zadovoljava

$$V(t) = \int_0^t U(t-s)\, dG(s) = U * G(t)$$

KONVOLUCIJA

uvjetovanjem na 1. korak T_0.

Slično računajući bez odgode:

$$U(t) = EN_t = E\sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{T_k \le t\}} = \underset{\displaystyle 1_{[0,\infty)}(t)}{\overset{\|}{P(T_0 \le t)}} + \sum_{1}^{\infty} P(T_k \le t)$$

$$= 1_{[0,\infty)}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} P(T_j' + T_1 \le t) \quad \leftarrow \begin{cases} T_j' = T_{j+1} - T_1 \\ T_0' = 0 \end{cases}$$

$$= 1_{[0,\infty)}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t P(T_j' + x \le t)\, dF(x) \qquad \overset{\overset{d}{\|}}{(T_j)}$$

$$= 1_{[0,\infty)}(t) + \int_0^t U(t-x)\, dF(x)$$

U konvolucijskim oznakama $\Rightarrow$

$$U = \mathbb{1}_{[0,\infty)} + U * F$$

Iz $V = U * G$ $\quad$ (i $G * U = U * G$) $\Rightarrow$

$$V = G + V * F$$

Tm 25 $\Rightarrow$ $U(t) \sim t/\mu$, no za

$$G(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t (1 - F(x))\, dx$$

RAZDIOBA INTEGRIRANOG REPA

tj. ODGODA STACIONARNOG PROCESA OBNAVLJANJA

je $\quad V(t) = t/\mu$

U slučaju $\xi_i \sim Exp(\lambda)$, $\mu = 1/\lambda$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} = G(t)$$

tada je proces obnavljanja zapravo Poissonov proces (homogen i s intenzitetom λ).

TEOREM 26 (BLACKWELLOV TM OBNAVLJANJA)

Ako je F nearitmetička tada

$$U([t, t+h]) \to h/\mu \qquad \forall h > 0$$

NAP) Nešto slično vrijedi i u aritmetičkom slučaju, a dokazuje se preko Markovljevih lanaca.

—

Dokaz tm 26.

Neka je (T_n) niz obnavljanja s početka, a (T_n') od njega nezavisan niz obnavljanja td. $T_0' \sim G$; naći ćemo J, K td. $|T_J - T_K'| < \varepsilon$ i td su nizovi $\{T_{J+i} - T_J\}_i$ i $\{T_{K+j}' - T_K'\}_j$ nezavisni od $T_0', T_1', \dots, T_K', T_1, \dots, T_J$.

Neka su

$$\eta_i, \eta_i' \overset{njd}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ nezavisne od } (T_n), (T_n')$$

Definiramo

$$\nu_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$$

$$\nu_n' = 1 + \eta_1' + \cdots + \eta_n'$$

te

$$S_n = T_{\nu_n} \quad i \quad S_n' = T'_{\nu_n'}$$

uočite $\quad P(S_n - S_n' = 0) \geq 1/4$

$(S_n - S_n')_n$ je slučajna šetnja sa simetrično distribuiranim koracima. Nosač razdiobe koraka uključuje nosač razdiobe od ξ_i

$\Rightarrow$ ako je $(S_n - S_n')$ povratna

skup povratnih točaka $= \mathbb{R}$

(čak ireducibilna)

Kako je očekivanje koraka od $S_n - S_n'$ 0

Chung-Fuchs $\Rightarrow$ za

$$N = \inf\{ n : |S_n - S_n'| < \varepsilon \}$$

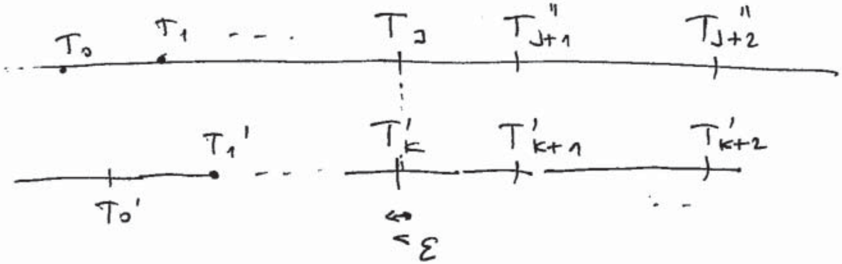
$$P(N < \infty) = 1$$

Neka $J = \nu_N$, $K = \nu'_N$ i neka

$$T_n'' = \begin{cases} T_n & J \geq n \\ T_J + T'_{K+(n-J)} - T'_K & J < n \end{cases}$$

uobičajeni koraci do J

nakon toga koraci šetnje T'



Iz konstrukcije je jasno

$$(T_n) \stackrel{d}{=} (T_n'')$$

Neka

$$N'[s,t] = \#\{n : T_n' \in [s,t]\}, \quad N''[s,t] = \#\{n : T_n'' \in [s,t]\}$$

na skupu $\{T_j \le t\}$ jasno

$$N''[t, t+h] \ge N'[t+\varepsilon, t+h-\varepsilon]$$
$$\le N'[t-\varepsilon, t+h+\varepsilon]$$

Ako $\varepsilon < h/2$

$$U([t,t+h]) = EN''[t,t+h] \ge E(N'[t+\varepsilon, t+h-\varepsilon]; T_j \le t)$$

$$\ge E(N'[t+\varepsilon, t+h-\varepsilon] \cdot (1 - \mathbb{1}_{T_j > t})$$

$$\geq \frac{h-2\varepsilon}{\mu} + P(T_j > t)\, U(h)$$

Jer za N'_t vrijedi točno

$$V[t,t+h] = EN'[t,t+h] = \frac{h}{\mu}$$ (direktnom provjerom)

Za drugi smjer slično

$$U([t,t+h]) \leq E(N'[t-\varepsilon, t+h+\varepsilon]; T_j \leq t) + E(N''[t,t+h]; T_j \geq t)$$

$$\leq \frac{h+2\varepsilon}{\mu} + P(T_j > t)\, U(h)$$

Kako je $P(T_j > t) \to 0$, a ε proizvoljan

$\Rightarrow$ tvrdnja. $\square$

Jednadžbe oblika

$$H = h + H * F \qquad (1)$$

gdje je F poznata (čak i ne prava) razdioba, a h poznata funkcija zovemo jednadžbama obnavljanja.

Već smo vidjeli 2 primjera

$$h \equiv 1 \ : \quad U = 1_{[0,\infty)} + U * F$$

$$h(t) = G(t) \ : \quad V = G + V * F$$

teorija obnavljanja se bavi proučavanjem upravo ovakvih jednadžbi

—

Naivnim iteriranjem (1) naslućujemo rješenje

$$H = h + (h + H * F) * F = h + h * F + h * F^{2*} + H * F^{3*}$$

$$= \cdots = h * \underbrace{(1 + F + F^{2*} + F^{3*} + F^{4*} + \cdots)}_{= U \text{ po definiciji}}$$

<u>TEOREM</u>. 27

Ako je h ograničena tada fja

$$H(t) = \int_0^t h(t-s)\, dU(s)$$

predstavlja jedinstveno rješenje od (1) ograničeno na ograničenim intervalima.

Dok tm 27

$$U_n(A) = \sum_{m=0}^{n} \mathbb{P}(T_m \in A)$$

$$H_n(t) = \int_0^t h(t-s)\, dU_n(s) = \sum_{m=0}^{n} (h * F^{m*})(t)$$

gdje je F^{m*} razdioba od T_m, a $h(r) = 0$, $r < 0$ po definiciji tj dogovorom. Jasno

$$H_{n+1} = h + H_n * F \qquad (*)$$

Kako $U(t) < \infty \Rightarrow U(t) - U_n(t) \to 0$, a h je ograničena

$$|H_n(t) - H(t)| \le \|h\|_\infty |U(t) - U_n(t)|$$

$\Rightarrow$ $H_n(t) \to H(t)$ uniformno na ograniči. intervalima

$$|H_n * F(t) - H * F(t)| \leq \sup_{s \leq t} |H_n(s) - H(s)|$$

$$\leq \|h\|_\infty \, |U(t) - U_n(t)|$$

Kako je $U - U_n = \sum_{n+1}^{\infty} F^{m*}$ rastuća po t.

Pustimo li $n \to \infty$ u $(*)$ $\Rightarrow$ H rješava jednadžbu i ograničena je na ograničenim intervalima.

Pretp. H_1 & H_2 su rješenja tada $K = H_1 - H_2$ zadovoljava $K = K * F$, kako je K ogr. na ogr. intervalima $K = K * F^{n*} \to 0$ $\Rightarrow$ $H_1 = H_2$.

Prema Blackwellovom tm

$$U(t-h,t] \to h/\mu \qquad \text{za } t\to\infty \qquad (2)$$

no
$$G'(t)-G'(t-h) = \int_{t-h}^{t} dG'(y)$$
$$= \int_0^t I_{(0,h]}(t-y)\, dG'(y)$$
$$= G' * I_{(0,h]}(t) \qquad \forall\, G' \text{ callog}$$

$\Downarrow$

$$(2) \Rightarrow \qquad U * I_{(0,h]}(t) \to h/\mu \qquad t\to\infty$$

ako je $\quad z = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i I_{A_i} \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad A_i = (a_i, b_i]$ disjunktni

$=$

$$\Rightarrow \quad U * z(t) \rightarrow \frac{\int_0^\infty z(s)\,ds}{\mu}$$

No ako je z bilo kakva funkcija koja se može jako dobro aproksimirati step funkcijama vrijedit će isto

$\boxed{\text{DEF}}$ Funkcija $z: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je <u>direktno</u> <u>Riemann integrabilna</u> ako za

$$I_k = [(k-1)h, kh) \qquad h>0, \ k\in\mathbb{N}$$

$$m_k(h) = \inf_{I_k} z, \quad M_k(h) = \sup_{I_k} z$$

$$s(h) = \sum_{k\geq 1} h\, m_k, \quad S(h) = \sum_{k\geq 1} h M_k \quad \text{vrijedi}$$

$$S(h) - s(h) \to 0 \qquad \text{za } h \to \infty$$

TEOREM 28.

Ako je F nearitmetička td $\mu = ET_1 < \infty$

i $G(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^t (1-F(x))\,dx$, tada vrijede

sljedeće ekvivalentne tvrdnje

1) Blackwellov teorem obnavljanja

$$\lim U(t, t+h] \to h/\mu \qquad \forall h > 0$$

2) Ključni teorem obnavljanja (W. Smith)

$$\lim U * z(t) = \frac{\int_0^\infty z(s)\,ds}{\mu}$$

za sve dRi funkcije z.

3) Za $A(t) = t - T_{N(t)-1}$ vrijeme obnav. unatrag

$$A \xrightarrow{d} G, \quad t \to \infty$$

4) Za $B(t) = T_{N(t)} - t$ vrijeme doživljaja unaprijed

$$B \xrightarrow{d} G \ , \quad t \to \infty$$