BESKONAČNO DJELJIVE RAZDIOBE

Neka je $(X_{n,m})$ trokutasti niz sl. varijabli t.d.

$X_{n,1}, X_{n,2}, \dots X_{n,n}$ su njd

Pitanje je za koje nedegenerirane sl. varijable Z možemo naći nizove (a_n) (b_n) t.d.

$$\frac{S_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} Z \quad ? \qquad (1)$$

$\boxed{\text{DEF}}$ Razdioba sl. var. Z je beskonačno djeljiva ako $\exists$ njd $Y_{n,1}, \dots, Y_{n,n}$ t.d. $Z \overset{d}{=} Y_{n,1} + \dots + Y_{n,n}$.

TEOREM 36

Sl. var. Z je limes suma kao u (1) $\iff$ Z je besk. djeljiva

Jasno: sve stabilne razdiobe, uključujući normalnu su besk. djeljive.

Beskonačno djeljive su i Poissonova odn. složena Poissonova razdioba.

Ako je μ besk. djeljiva razdioba, pripadna karakt. funkcija je svuda različita od 0.

TEOREM 37 (Lévy-Hinčinova formula)

Sl. var. Z ima beskon. djeljivu razdiobu $\Longleftrightarrow$ ima karakt. funkciju oblika

$$\log \varphi(t) = ict - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \mu(dx)$$

za neku mjeru μ t.d. $\mu\{0\} = 0$, $\int \frac{x^2}{1+x^2} \mu(dx) < \infty$.

NAP • μ nazivamo Lévyevom mjerom (od Z).

• za $\mu = 0$ dobijemo Gaussovu razdiobu $N(c, \sigma)$

• za $\sigma = 0$, Z je limes sume točaka Poissonovog procesa s intenzitetom μ.

TEOREM 38 (Kolmogorov)

Sl. var. Z ima besk. djeljivu razdiobu s očekivanjem nula i varijancom $< \infty$ $\iff$ ima karakt. funkciju oblika

$$\log \varphi(t) = \int (e^{itx} - 1 - itx) \frac{1}{x^2} \nu(dx)$$

gdje je ν konačna mjera, $\nu(\mathbb{R}) = \operatorname{Var} Z$; a integrand je $-t^2/2$ za $x = 0$.

GRANIČNI TEOREMI U $\mathbb{R}^d$

Za sl. vektor $X = (X_1, \dots, X_d)$ definiramo fju distribucije $F : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ sa

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, \dots, X_d \le x_d) .$$

Za (funkcije) distribucije $F_i(x) = \mathbb{P}(X_i \le x)$ kažemo da su marginalne razdiobe od F.

Ako postoji $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ td.

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(y) \, dy_k \cdots dy_1$$

zovemo ji gustoćom od F, a za F kažemo da je neprekidna.

Ako su $F, F_n, n \in \mathbb{N}$ f-je distribucije na $\mathbb{R}^d$ i

$$F_n(x) \to F(x) \qquad \forall x \in C(F)$$

opet pišemo $F_n \xrightarrow{w} F$ (rei. $F_n \xrightarrow{d} F$), tj.

F_n <u>slabo konvergiraju</u> ka F.

TEOREM 39

Ekvivalentno je

i) $X_n \xrightarrow{d} X$ u $\mathbb{R}^d$ (tj. $F_{X_n} \xrightarrow{w} F_X$)

ii) $Ef(X_n) \to Ef(X)$ $\forall$ f ogr. nepr.

iii) $Ef(X_n) \to Ef(X)$ $\forall$ f ogr. i Lipschitz. neprek.

⋮

$\boxed{\text{DEF}}$ Niz razdioba (vjer. mjera) na $\mathbb{R}^d$ je <u>napet</u> ako $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M$ t.d.

$$\liminf_{n\to\infty} \mu_n\left([-M,M]^d\right) \geq 1-\varepsilon .$$

I ovdje vrijedi

napetost $\Rightarrow$ relativnu kompaktnost

tj. $\exists$ slabo konvergentan podniz napetog niza.

$\boxed{\text{DEF}}$ Karakter. funkcija sl. vektora $(X_1,\dots,X_d)$ je

$$\varphi(t) = E\, e^{i\langle t, X\rangle} \quad \text{gdje } \langle t, X\rangle = \left(t_1 X_1 + \dots + t_d X_d\right).$$

—

Formula inverzije također ima analogon u $\mathbb{R}^d$, a suma nezavisnih sl. vektora karakt. fju koja je produkt karakterističnih funkcija.

TEOREM 40

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff \varphi_{X_n}(t) \to \varphi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^d.$$

TEOREM 41 (Cramér - Woldovo sredstvo)

$$X_n \xrightarrow{d} X \iff \langle v, X_n \rangle \xrightarrow{d} \langle v, X \rangle \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$$

TEOREM 42 (c.g.t u $\mathbb{R}^d$)

Neka su $X_1, X_2, \dots$ n.j.d. sl. vektori s konačnim kovarijancama

$$\Gamma_{ij} = E((X_{ni} - \mu_i)(X_{nj} - \mu_j))$$

tada

$$\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z$$

gdje je Z višedim. normalni sl. vektor s očekivanjem 0 i kovarijacijskom matricom $\Gamma = (\Gamma_{ij})$.

Dokaz iz c.g.t. (tm 20) i tm-a 41. $\square$

TEOREM 43

Ako su (X_n), (Y_n) nizovi k odn. m-dimenz. slučajnih vektora t.d. $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{P} b \in \mathbb{R}^m$

tada
$$\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} X \\ b \end{pmatrix}$$

Dokaz Jasno $\begin{pmatrix} X_n \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \begin{pmatrix} X \\ b \end{pmatrix}$ po tm 40 npr.

Također $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_n \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{P} 0$ po pretp. dakle

tvrdnja slijedi korištenjem iduće leme $\square$

LEMA 44

Ako su $(X_n), (Y_n)$ nizovi sl. vektora t.d.

$$X_n - Y_n \xrightarrow{P} 0 \quad i \quad X_n \xrightarrow{d} X \Rightarrow Y_n \to X.$$

Dokaz: Po tm 40 dovoljno je vidjeti:

$$|\varphi_{Y_n}(t) - \varphi_X(t)| \longrightarrow 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}^d$$

$$\leq |\varphi_{Y_n}(t) - \varphi_{X_n}(t)| + \underbrace{|\varphi_{X_n}(t) - \varphi_X(t)|}_{\to 0}$$

Ali:

$$|\varphi_{Y_n}(t) - \varphi_{X_n}(t)| = E|e^{i\langle t, Y_n\rangle} - e^{i\langle t, X_n\rangle}| \leq \underbrace{E|1 - e^{it\langle X_n - Y_n\rangle}|}_{\to 0} \qquad \square$$

KOROLAR 45 (Slutsky)

Za nizove sl. vektora (X_n), (Y_n) t.d. $X_n \xrightarrow{d} X$

i $Y_n \xrightarrow{P} b$ $\Rightarrow$ i) $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + b$

ii) $\langle Y_n, X_n \rangle \xrightarrow{d} \langle b, X \rangle$

PROPOZICIJA 46

Neka su (X_n), (Y_{nj}) k-dimenzionalni slučajni vektori t.d.

i) $Y_{nj} \xrightarrow{d} Y_j$

ii) $Y_j \to Y$

iii) $\lim\limits_{j\to\infty} \limsup\limits_{n\to\infty} P(|X_n - Y_{nj}| > \varepsilon) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{d} Y$

$$\boxed{\begin{array}{cccccc}
\approx X_1 & \approx X_2 & \approx X_3 & & & \\
Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & \cdots & & \\
Y_{21} & Y_{22} & \cdots & & & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
Y_1 & Y_2 & \cdots & & \xrightarrow{d} & Y
\end{array}}$$

IV SLUČAJNE ŠETNJE

VREMENA ZAUSTAVLJANJA

Za nizove njd. sl. varijabli (elemenata) u prostom $(S, \mathcal{S})$ pretpostavljamo (b.s.o.) da su definirane na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ t.d.

$$\Omega = \{ (\omega_1, \omega_2, \ldots) : \omega_i \in S \}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \cdots$$

$$\mathbb{P} = \mu \times \mu \times \cdots$$

$$X_n(\omega) = \omega_n$$

$\boxed{\text{DEF}}$ Preslikavanje $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je <u>konačna permutacija</u> ako je π permutacija t.d. $\pi(i) \neq i$ za najviše konačno mnogo $i \in \mathbb{N}$.

Događaj A je <u>izmjenjiv</u> ako $\pi^{-1} A = A$ (gdje $(\pi\omega)_i = \omega_{\pi(i)}$) za svaku konačnu permutaciju π.

Klasa <u>izmjenjivih</u> <u>događaja</u> čini <u>σ-algebru</u> <u>izmjenjivih događaja</u> u oznaci $\mathcal{E}$.

Primjer (izmjenjivi događaji)

Za X_i njd kao gore izmjenjivi su događaji

i) $\{ S_n \in B \text{ b.č.} \}$

ii) $\{ \limsup S_n / c_n \geq 1 \}$

iii) svi repni događaji tj. $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{E}$.

TEOREM 1 (Hewitt - Savage zakon 0-1)

Ako su $X_1, X_2, \ldots$ njd. i $A \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$.

Dok. Uzmimo $A \in \mathcal{E}$, pokazat ćemo A je nezavisan sa samim sobom pa tvrdnja odmah slijedi.

Neka su $A_n \in \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ t.d.

$$\mathbb{P}(A_n \triangle A) \longrightarrow 0$$

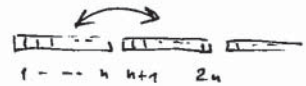
gdje $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ predst. simetričnu razliku (oni postoje po LA 2.1 u knjizi)

Kako $A_n \in \sigma(X_1, \dots, X_n) \Rightarrow \exists\ B_n \in \mathcal{B}^n$ t.d.

$$A_n = \{\omega : (\omega_1, \dots, \omega_n) \in B_n\} \quad ;$$

neka

$$\pi(j) = \begin{cases} j+n & j = 1, \dots, n \\ j-n & j = n+1, \dots, 2n \\ j & j \geq 2n+1 \end{cases}$$



$\Rightarrow \quad \pi^2 = id$

tj $\quad \pi = \pi^{-1}$

$\Downarrow$

$$P(\omega : \omega \in A_n \Delta A) = P(\omega : \pi\omega \in A_n \Delta A) \qquad (1)$$

naime ω i $\pi\omega$ imaju istu razdiobu (vj. produktna mjera)

$$A \in \mathcal{E} \Rightarrow \underbrace{\{\omega : \pi(\omega) \in A\}}_{\pi^{-1}(A)} = \{\omega : \omega \in A\} = A$$

No

$$\{\omega : \pi(\omega) \in A_n\} = \{\omega : (\omega_{n+1}, \dots, \omega_{2n}) \in B_n\} =: A_n'$$

$$\Rightarrow \quad \{\omega : \pi\omega \in A_n \triangle A\} = \{\omega : \omega \in A_n' \triangle A\} \quad (2)$$

$$(1) \,\&\, (2) \Rightarrow \quad P(A_n \triangle A) = P(A_n' \triangle A)$$

Kako $|P(B) - P(C)| \le P(B \triangle C) \Rightarrow$

$$P(A_n),\, P(A_n') \to P(A)$$

No $A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \Rightarrow$

$$P(A_n \triangle A_n') \le \underset{\downarrow \atop 0}{P(A_n \triangle A)} + \underset{\downarrow \atop 0}{P(A \triangle A_n')}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le P(A_n) - P(A_n \cap A_n')$$

$$\le P(A_n \cup A_n') - P(A_n \cap A_n') = P(A_n \triangle A_n') \to 0$$

$\Downarrow$

$$P(A_n \cap A_n') \to P(A) \quad \text{no}$$

A_n & A_n' su nezavisni $\Rightarrow$

$$P(A_n \cap A_n') = P(A_n) \cdot P(A_n') \to P(A)^2$$

tj. $$P(A) = P(A)^2$$

$\square$

TEOREM 2 Samo jedan od sljedećih događaja ima vjerojatnost veću od 0 i to točno 1

i) $S_n = 0 \quad \forall n$

ii) $S_n \to +\infty$

iii) $S_n \to -\infty$

iv) $-\infty = \liminf S_n < \limsup S_n = +\infty$

Dok tm 1 $\Rightarrow$ $\limsup S_n$ je konstanta, npr $c \in [-\infty, \infty]$

za $S_n' = S_{n+1} - X_1 \Rightarrow (S_n') \overset{d}{=} (S_n) \Rightarrow$

$$c = \limsup S_n' = c - X_1 \quad \text{ako } |c| < \infty$$

$\Rightarrow X_1 = 0$ g.s. $\Rightarrow$ i) Slično za $\liminf \Rightarrow$ ii) iii) i iv)

$\square$

Ako su $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ šetnju (S_n)

nazivamo (simetrična) jednostavna slučajna šetnja. Ako samo $X_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$

za neki $p \in [0,1]$, $q = 1-p$, kažemo

samo da je (S_n) jednostavna.

Primjer. (simetrična sluč. šetnja)

Ako su X_i njd. s razdiobom simetričnom oko 0 i $P(X_i=0)<1$ vrijedi

$$P(\overline{\lim} S_n = +\infty, \underline{\lim} S_n = -\infty) = 1 \quad (*)$$

Ako su X_i njd., $EX_i = 0$, $EX_i^2 = \sigma^2 \in (0,\infty)$

$\Rightarrow$ c.g.t. $\quad \frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{d} Z$

$$\Rightarrow P(\overline{\lim} S_n = \infty) \geq P(Z>0) = 1/2$$

i sl. $P(\underline{\lim} S_n = -\infty) \geq 1/2 \Rightarrow$ opet vrijedi $(*)$

—