VJEROJATNOST

www.math.hr/~bbasrak

LITERATURA:

P. BILLINGSLEY: PROBABILITY AND MEASURE, WILEY (1995)

L. BREIMAN: PROBABILITY, ADDISON-WESLEY (1968)

J.S. CHOW, H. TEICHER: PROBABILITY THEORY, INDEPENDENCE, INTERCHANGEABILITY, MARTINGALES SPRINGER, (1978)

R. DURRETT: PROBABILITY: THEORY AND EXAMPLES, 2nd ed. DUXBURY PRESS, (1996)

A. GUT: PROBABILITY: A GRADUATE COURSE, SPRINGER (2004)

O. KALLENBERG: FOUNDATIONS OF MODERN PROBABILITY, 2nd ed, SPRINGER (2001)

N. SARAPA: TEORIJA VJEROJATNOSTI, ŠK. (1987)

PRAVILA:

domaće zadaće (predati obavezno)

VJEROJATNOST

POČECI: Cardano (16. st.)

de Mere, Pascal, Fermat (17 st)
C. Huygens (17st)

AKSIOMI: A.N. Kolmogorov (1933)

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung

PRIMJENE:
- teorijska matematika
  (teorija brojeva ili kombinatorika npr.)
- statistika
- financije, mreže, genetika, ...

KONTROVERZE:
- interpretacija
- paradoksi
- položaj u odn. na ostatak matematike

I TEORIJA MJERE

Vjerojatnosni prostor

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

prostor elementarnih događaja

σ-a

vjerojatnosna mjera vjerojatnost)

Ω : proizvoljan skup, teorija je jednostavnija ako je Ω prebrojiv (tj. konačan ili prebrojivo beskonačan, za nas)

DEF $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je **σ-algebra** ako vrijedi

i) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

ii) $A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \cup A_i \in \mathcal{F}$

DEF Par $(\Omega, \mathcal{F})$ se naziva **izmjeriv prostor**, a **mjera** je fja $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ t.d.

i) $\mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0$ za sve $A \in \mathcal{F}$

ii) $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$ za sve nizove skupova $A_i \in \mathcal{F}$ koji su međ. disjunktni

Ako je $\mu(\Omega) = 1$ kažemo da je μ vjerojatnost

Vjerojatnost = nenegativna, σ-aditivna, normirana fja na $\mathcal{F}$

$\boxed{\text{DEF}}$ $\emptyset \neq \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je algebra skupova ako vrijedi

i) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$

Primjer (algebra koja nije σ-algebra)

$\Omega = \mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{Z} : A$ ili A^c je konačan$\}$

$\boxed{\text{DEF}}$ Ako je $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ definiramo

$$\boxed{\sigma(\mathcal{A}) = \text{najmanja } \sigma\text{-algebra koja sadrži sve skupove iz } \mathcal{A}}$$

Primjer

$\mathcal{A} = \{A\} \Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$

DEF $\emptyset \neq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je π - sistem (sustav)

ako

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$$

$\mathcal{A}$ je λ - sustav (Dynkinov ili λ - sistem)

ako
i) $\Omega \in \mathcal{A}$
ii) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}$
iii) $A_n \in \mathcal{A}$ i $A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

$\mathcal{A}$ je monotona klasa ako

i) $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

ii) $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \searrow A \Rightarrow A \in \mathcal{A}$

Za proizvoljnu klasu $\mathcal{A}$ definiramo i

$\mathcal{D}(\mathcal{A})$ = najmanji λ - sistem koji sadrži $\mathcal{A}$

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ = najmanja monot. klasa koja sadrži $\mathcal{A}$

TEOREM 1

Ako je $\mathcal{A}$ algebra

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

KOROLAR 2

Ako je $\mathcal{A}$ algebra, a $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{A}$ monotona klasa $\Rightarrow$

$$\mathcal{G} \supseteq \sigma(\mathcal{A})$$

TEOREM 3

Ako je $\mathcal{A}$ π – sistem na Ω $\Rightarrow$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

KOROLAR 4 ($\pi - \lambda$ teorem)

Ako je $\mathcal{A}$ π - sistem & $\mathcal{L} \supseteq \mathcal{A}$ λ - sistem $\Rightarrow$

$$\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{L}$$

LEMA 5

$\mathcal{A}$ je λ-sistem akko

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

iii) $A_n \in \mathcal{A}$, disjunktni $\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$

METATEOREM

Česta rečenica u vjerojatnosnim dokazima je "dovoljno je provjeriti da tvrdnja vrijedi za"... npr. pravokutnike ili step funkcije, a razlog je

TEOREM 6 (METATEOREM)

i) Neka monotona klasa $\mathcal{E}$ zadovoljava neko svojstvo. Ako je $\mathcal{A}$ algebra t.d.

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G} \ \& \ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$$

ii) Neka λ-sistem $\mathcal{E}$ zadovoljava neko svojstvo. Ako je $\mathcal{A}$ π-sistem i

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{G}, \ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathcal{E}$$

Teorem slijedi iz gornjih korolara, a ii) se također naziva

π-λ teoremom.

$\boxed{\text{DEF}}$ Borelovi skupovi su elementi Borelove σ-algebre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ koja je generirana otvorenim skupovima na $\mathbb{R}^d$.

Mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ se mogu uvesti koristeći tzv. Stieltjesove funkcije ~~mjere~~ sa sa svojstvom

i) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neopadajuća

ii) F je zdesna neprekidna

TEOREM 7

Za svaku Stieltjesovu funkciju F postoji jedinstvena mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ t.d.

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$$

Ako je $F(x) = x$, pišemo $\mu = \lambda$ zovemo je Lebesguova mjera

Dokaz gornjeg teorema je dug, a zasniva se na sljedeća dva teorema

TEOREM 8 (Caratheodory)

Neka je μ σ-konačna mjera na algebri skupova $\mathcal{A}$, tada postoji jedinstveno proširenje od μ na $\sigma(\mathcal{A})$

Podsjetimo se μ na $(A, \mathcal{A})$ je σ-konačna ako postoje $A_i \in \mathcal{A}$, $\bigcup A_i = A$ i

$$\mu(A_i) < \infty$$

Također μ je mjera na algebri $\mathcal{A}$ ako

i) $\mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

ii) $A_i \in \mathcal{A}$ disjunktni & $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_i \mu(A_i)$$

Mi bismo mjeru htjeli definirati na pravokutnicima

$$(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d, \quad -\infty \leq a_i < b_i \leq \infty$$

Pravokutnici nažalost ne čine algebru, ali čine polualgebru

DEF $\mathcal{A}$ je polualgebra ako

i) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$

ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ za neke disjunktne $B_i \in \mathcal{A}$ i neki $n \in \mathbb{N}$

TEOREM 9

Neka je $\mathcal{S}$ polualgebra i $\mu : \mathcal{S} \to \overline{\mathbb{R}}$ zadovoljava $\mu(\emptyset) = 0$ te

i) $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$, $S, S_i \in \mathcal{S}$, S_i disjunktni

$\Rightarrow \mu(S) = \sum_{i=1}^{n} \mu(S_i)$

ii) $S = \bigcup_{i \geq 1} S_i$, $S, S_i \in \mathcal{S}$, S_i disjunktni

$\Rightarrow \mu(S) \leq \sum_i \mu(S_i)$

Tada μ ima jedinstveno proširenje $\bar{\mu}$ na algebru generiranu sa $\mathcal{S}$. Ako je $\bar{\mu}$ σ-konačna, tada postoji jedinstvena mjera koja proširuje $\bar{\mu}$ na $\sigma(\mathcal{S})$.

Dokaz teorema 7 se zasniva na teoremima 8 i 9. Dokaz teorema 8 se izvodi tipično koristeći $\pi - \lambda$ teorem, a iz njega slijedi i posljednja tvrdnja teorema 9.

MJERE NA $\mathbb{R}^d$

- mogu se uvesti na analogan način no Stieltjesove funkcije $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ osim i) i ii) moraju zadovoljavati i

iii) $\Delta_A F \geq 0$ za svaki konačan pravokutnik $A = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$

Gdje je $\Delta_A(F) = \sum_{v \in V} \operatorname{sgn}(v) F(v)$

a $V =$ skup vrhova pravokutnika A

$\operatorname{sgn}(v) = (-1)^{\# a_i\text{-ova u vrhu } v}$

RAZDIOBE

DEF Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ je slučajna varijabla (vektor) na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ako je

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \text{za svaki Borelov skup } B$$

Primjer (indikatorska funkcija)
Za $A \in \mathcal{F}$ slučajni događaj I_A je slučajna varijabla

---

Uočite, sluč. varijabla (vektor također) inducira vjerojatnosnu mjeru na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\mu(A) = P(X \in A) \quad , A \text{ Borelov}$$

Pišemo $\mu = P \circ X^{-1}$ i nazivamo je razdioba sl. varijable X. A funkciju $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ danu sa

$$F(x) = P(X \le x)$$

zovemo funkcija distribucije od X.

TEOREM (svojstva fje distribucije)

i) F je neopadajuća

ii) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

iii) F je zdesna neprekidna

iv) Za $F(x-) = \lim_{y \nearrow x} F(y)$ je $F(x-) = P(X < x)$

v) $P(X = x) = F(x) - F(x-)$.

Pokazuje se i da je svaka fja F sa svojstvima i) – iii) fja distribucije neke slučajne varijable (kako?)

DEF Ako sl. varijable X i Y zadovoljavaju $P(X \leq x) = P(Y \leq x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ kažemo da X i Y imaju istu distribuciju,

$$X \stackrel{d}{=} Y$$

INTEGRALI

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor s mjerom

za $\mathcal{F}$-izmjerivu realnu fju f želimo definirati

$$\int f \, d\mu$$

Postoji više puteva do definicije, no prema Durrettu možemo je dobiti u 4 koraka

KORAK 1 (JEDNOSTAVNE FUNKCIJE)

Za jednostavne funkcije

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^{n} a_i I_{A_i}$$

gdje su $A_i \in \mathcal{F}$ disjunktni i $\mu(A_i) < \infty$

stavimo

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

LEMA 10

Za jednostavne φ i ψ, $a, b \in \mathbb{R}$

monotonost

i) ako $\varphi \geq 0$ g.s. $\Rightarrow \int \varphi \, d\mu \geq 0$

ii) $\int (a\varphi + b\psi) \, d\mu = a \int \varphi \, d\mu + b \int \psi \, d\mu$

linearnost

LEMA 11

Ako neki integral zadovoljava i) & ii) tada vrijedi i

iii) $\varphi \leq \psi \Rightarrow \int \varphi \, d\mu \leq \int \psi \, d\mu$

iv) $\varphi = \psi$ g.s. $\Rightarrow \int \varphi \, d\mu = \int \psi \, d\mu$

v) $\left| \int \varphi \, d\mu \right| \leq \int |\varphi| \, d\mu$

KORAK 2 (OGRANIČENE FUNKCIJE)

Neka je f ograničena funkcija koja iščezava na E^c za neki izmjeriv skup E t.d.

$$\mu(E) < \infty$$

Definiramo

$$\int f \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int f \, d\mu$$

I ovaj integral lako se vidi zadovoljava svojstva i) – v)

KORAK 3 (NENEGATIVNE FUNKCIJE)

Za $f \geq 0$ stavimo

$$\int f \, d\mu = \sup \left\{ \int h \, d\mu : \ 0 \leq h \leq f, \ h \text{ ograničena i } \mu(x : h(x) > 0) < \infty \right\}$$

I ovaj integral zadovoljava i) – v)

KORAK 4 (OPĆENITE FUNKCIJE)

Kažemo da je f <u>integrabilna</u> ako $\int |f| \, d\mu < \infty$.

Definiramo

$$f^+ = f \vee 0 \qquad f^- = (-f) \vee 0$$

$$\Rightarrow \quad f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-$$

te

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$$

desna strana je konačna za integrabilne f, a dobro definirana ako bar jedan od dva integrala nije $+\infty$

TEOREM 12 (svojstva integrala)

Ako su f i g integrabilne, $a, b \in \mathbb{R}$

i) $f \geq 0 \Rightarrow \int f \, d\mu \geq 0$

ii) $\int (af + bg) \, d\mu = a \int f \, d\mu + b \int g \, d\mu$

iii) $g \leq f$ g.svuda $\Rightarrow \int g \, d\mu \leq \int f \, d\mu$

iv) $g = f$ g.svuda $\Rightarrow \int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

v) $\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$

- Za integral u odn. na Lebesgueovu mjeru pišemo
$$\int f(x) \, dx = \int f \, d\lambda$$

- također
$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{[a,b]} f \, d\lambda$$

- ako $\mu(a,b] = G(b) - G(a)$ za neku Stieltjesovu fju G pišemo
$$\int f(x) \, dG(x) = \int f \, d\mu$$

- Za prebrojiv Ω s brojećom mjerom μ pišemo
$$\sum_{i \in \Omega} f(i) = \int f \, d\mu$$

NAP Ako je f Riemann integrabilna na $[a,b]$ tada je ona i Lebesgue integrabilna i integrali su jednaki

TEOREM 13 (Jensenova nejednakost)

Ako je φ konveksna tj. $\forall x,y, \lambda \in [0,1]$

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y),$$

a μ je vjerojatnost t.d. su f i $\varphi \circ f$ integrabilne u odn. na μ $\Rightarrow$

$$\boxed{\varphi\left(\int f \, d\mu\right) \leq \int \varphi(f) \, d\mu}$$

Neka je

$$\|f\|_p = \left(\int |f| \, d\mu\right)^{1/p}$$

za neku f i $p \geq 1$

TEOREM 14 (Hölderova nejednakost)

Za $p, q \in (1, \infty)$ $\quad 1/p + 1/q = 1 \quad \Rightarrow$

$$\int |fg| \, d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Iz Hölderove nejednakosti za $p=q=2$ $\Rightarrow$

Cauchy - Schwarz nejednakost

Jedno od najvažnijih pitanja je odrediti uvjete td.

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

$\boxed{\text{DEF}}$ Kažemo da $f_n \to f$ po mjeri μ ako $\forall \varepsilon > 0$

$$\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) \to 0 \quad n \to \infty$$

Za konačne mjere (i vjerojatnost) to je slabiji zahtjev od $f_n \to f$ g. svuda.

TEOREM 15 (o ograničenoj konvergenciji)

Neka je $\mu(E) < \infty$ i f_n neka iščezavaju na E^c, ako $|f_n| \le M$ i $f_n \to f$ po mjeri $\Rightarrow$

$$\int f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu$$

TEOREM 16 (Fatouova lema)

Ako $f_n \geq 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\liminf \int f_n \, d\mu \geq \int (\liminf f_n) \, d\mu}$$

TEOREM 17 (o monotonoj konvergenciji)

Ako $f_n \geq 0$ & $f_n \nearrow f \Rightarrow$

$$\boxed{\int f_n \, d\mu \nearrow \int f \, d\mu}$$

TEOREM 18 (o dominiranoj konvergenciji)

Ako $f_n \to f$ g. svuda i $|f_n| \leq g$ $\forall n$ i neku integrabilnu $g \Rightarrow$

$$\boxed{\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu}$$

OČEKIVANJE (MATEMATIČKO OČEKIVANJE)

Specijalan slučaj integrala na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i X koje su slučajne varijable

i ovdje vrijede analogni rezultati

TEOREM 19

X, Y sl. var, $E|X|, E|Y| < \infty$, $a, b \in \mathbb{R}$

i) $E(aX + bY) = aEX + bEY$

ii) $X \geq Y \Rightarrow EX \geq EY$

TEOREM 20 (Jensen. n.)

Za konveksne φ

$$E(\varphi(X)) \geq \varphi(EX)$$

ako su oba očekivanja konačna.

TEOREM 21 (Hölder n.)

Za $p, q \in [1, +\infty]$ td. $1/p + 1/q = 1$

$$\Rightarrow E|XY| = \|X\|_p \|Y\|_q$$

Ovdje

$$\|X\|_r = (E|X|^r)^{1/r} \qquad r \in [1, \infty)$$

$$\|X\|_\infty = \inf\{M : P(|X| > M) = 0\}$$

Uvedimo

$$E(X; A) = E(X I_A)$$

TEOREM 22 (Markovljeva nejednakost)

Za $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $i_A = \inf\{\varphi(y) : y \in A\}$

$$\Rightarrow \quad i_A P(X \in A) \leq E(\varphi(X); X \in A) \leq E\varphi(X)$$

Dokaz

Po definiciji zbog $\varphi \geq 0 \Rightarrow$

$$i_A I_{\{X \in A\}} \leq \varphi(X) I_{\{X \in A\}} \leq \varphi(X)$$

uzmemo li očekivanje $\Rightarrow$ tvrdnja $\square$

Za $\varphi(x) = x^2$, $A = \{x : |x| > a\} \Rightarrow$

$$a^2 P(|X| \geq a) \leq EX^2$$

tj. Čebiševljeva nejednakost.

TEOREM 23 (Fatouova l.)

$$X_n \geq 0 \Rightarrow \liminf EX_n \geq E(\liminf X_n)$$

TEOREM 24 (o monot. konv.)

$$0 \leq X_n \nearrow X \Rightarrow EX_n \nearrow EX,$$

TEOREM 25 (o dom. konv.)

$$X_n \xrightarrow{g.s.} X, \ |X_n| \leq Y, \ EY < \infty \Rightarrow EX_n \to EX$$

PONOVO O SL. VARIJABLAMA

Neka je $(S, \mathcal{S})$ sad proizvoljni izmjeriv prostor, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zadani vj. prostor

$$X : \Omega \to S$$

je slučajni element ako je

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \text{ za sve } B \in \mathcal{S}$$

Za $(S, \mathcal{S}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ dobijemo slučajne vektore (varijable za $d=1$).

TEOREM 26

Neka je $\mathcal{A}$ klasa koja generira $\mathcal{S}$ te neka $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za sve $B \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ X je sluč. element.

D. Pokažite samo da je $\{B : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ σ-algebra $\square$

Primjer $X : \Omega \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, q) : q \in \mathbb{Q}\}$$

DEF

$$\sigma(X) = \{ \{X \in B\} : B \in \mathcal{S} \}$$

= najm. σ-algebra na Ω u odn. na koju je X izmjeriva

TEOREM 27.

Ako su $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$ i $f : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{J})$ izmjeriva preslikavanja tada je to i $f(X)$.

Posebno:

ako su $(X_1, \dots, X_n)$ sl. var. na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ izmjeriva $\Rightarrow$

$f(X_1, \dots, X_n)$ je sluč. var.

npr $X_1 + \dots + X_n$ je sl. varijabla

TEOREM 28

$X_1, X_2, \ldots$ slučajne varijable

$\Rightarrow$ $\inf X_n$, $\sup_n X_n$, $\limsup_n X_n$, $\liminf_n X_n$

su također sl. varijable

Posebno

$$\Omega_0 = \{ \lim_n X_n \text{ postoji} \} \text{ je } \in \mathcal{F}$$

Ako $P(\Omega_0) = 1$ kažemo da X_n

konvergira gotovo sigurno

Limes definiramo npr. kao

$$X = \limsup_n X_n$$

koji je sluč. varijabla ali prima vrijednosti

u $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$

DEF Kažemo da je slučajna varijabla X, odn. njena razdioba **neprekidna** (u odn. na Lebesgueovu mjeru) ako postoji nenegativna Lebesgue integrabilna funkcija f t.d.

$$P(X \in (a,b]) = \int_a^b f(x)\,dx \quad \forall a<b.$$

Fju f nazivamo **gustoća** sl. var. X.

Primjer

i) uniformna razdioba $U(0,1)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0,1) \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

ii) eksponencijalna razdioba, $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

iii) standardna normalna razdioba, $N(0,1)$

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

TEOREM 29

Za sve $x>0$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leq \int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy \leq \frac{1}{x}e^{-x^2/2}$$

Dokaz

$$\int_x^\infty e^{-y^2/2}\,dy = \left(\begin{array}{c} \text{uz} \quad y=x+z \\ \text{i} \\ \exp(-z^2/2)\leq 1 \end{array}\right) \leq e^{-x^2/2}\int_0^\infty e^{-xz}\,dx$$

$$= e^{-x^2/2}\,\frac{1}{x}$$

Za drugu nejednakost uočite:

$$\int_x^\infty \left(1-\frac{3}{y^4}\right)e^{-y^2/2} = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}$$

$\square$

Primjer (Cantorova razdioba)

Prisjetimo se

$$C_1 = \left[0,\tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3},1\right]$$

$$C_2 = \left[0,\tfrac{1}{9}\right] \cup \left[\tfrac{2}{9},\tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3},\tfrac{7}{9}\right] \cup \left[\tfrac{8}{9},1\right]$$

$C_3 = \ldots$ 8 segmenata

$C = \bigcap_{k\geq 1} C_k$ ← zatvoren, neprebrojiv skup Leb. mjere 0

$$\left(\lambda(C) \leq \lambda(C_n) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 0\right)$$

Cantorova razdioba = unif. razdioba na Cantorovom skupu

DEF Razdioba sl. var X je diskretna ako postoji prebrojiv skup S t.d.

$$P(X \in S^c) = 0$$

Primjer

i) $P \circ X^{-1} = \delta_x$ ← točkovna masa u 0

$$\Rightarrow F(t) = \begin{cases} 1 & t \geq x \\ 0 & t < x \end{cases}$$

ii) $Q = (q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ i $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ t.d. $\sum_1^\infty \alpha_i = 1$, $\alpha_i > 0$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 1_{[q_i, \infty)}(x)$$

definira diskretnu razdiobu

RAČUNANJE OČEKIVANJA

Iako je oček. definirano kao integral na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mi ga češće računamo kao integral u odn. na razdiobu sl. varijable X

TEOREM 30 (zamjena varijabli)

Neka je X sluč. element na $(S, \mathcal{S})$ s razdiobom μ tj. $\mu(A) = P(X \in A)$. Ako je $f : (S, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ izmjeriva t.d. $f \geq 0$ ili $E|f(X)| < \infty$ tada

$$E f(X) = \int_S f(y) \mu(dy)$$

Dokaz

- Jasan za $f = 1_B$, $B \in \mathcal{S}$
- Pa onda i za jednostavne funkcije.
- Za nenegativne f, $f_n(x) = \dfrac{\lfloor 2^n f(x) \rfloor}{2^n} \wedge n$

  $f_n \nearrow f$ su jednostavne $\Rightarrow$ t.m.k. $\Rightarrow$

$$E f(X) = \lim_{n\to\infty} E f_n(X) = \lim_{n\to\infty} \int f_n(y) \mu(dy) = \int f(y) \mu(dy)$$

- Općenito $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ pa iskoristimo t.d.k.

$\square$

PRODUKTNE MJERE. FUBINIJEV TEOREM

Ako su $(X,\mathcal{A},\mu_1)$ i $(Y,\mathcal{B},\mu_2)$ dva prostora sa σ-konačnom mjerom definiramo

$$\Omega = X \times Y$$

$$\mathcal{S} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} \quad \text{(pravokutnici)}$$

$\mathcal{S}$ je samo polualgebra, zato koristimo

$$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S}) =: \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

TEOREM 31

Postoji jedinstvena mjera μ na $(\Omega, \mathcal{F})$ t.d.

$$\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$$

Dokaz iz tm-a 9

Neka je npr $A \times B = \bigcup_i A_i \times B_i$ $\quad$ ($A_i \times B_i$ disjunkt.)

pokažimo $\mu(A \times B) = \sum \mu(A_i \times B_i)$

$x \in A$, $I(x) = \{i : x \in A_i\}$, $B(x) = \bigcup_{i \in I(x)} B_i$ $\quad \leftarrow$ disjunktni

$\Rightarrow \quad 1_A(x)\mu_2(B) = \sum_i 1_{A_i}(x)\mu_2(B_i)$ $\quad \leftarrow$ neng. fje na $(X,\mathcal{A})$ $\quad \int \cdot \, d\mu_1$

$\Rightarrow \quad \mu_1(A)\mu_2(B) = \sum \mu_1(A_i)\mu_2(B_i)$

$\Rightarrow \quad \mu(A \times B) = \mu_1(A) \times \mu_2(B)$ $\quad$ zadovoljava uvjete tm 9.

$\square$

Pišemo $\mu = \mu_1 \times \mu_2$

a indukcijom to možemo učiniti i za n prostora odn. mjera

Uz oznake gornjeg teorema vrijedi

TEOREM 32 (Fubini)

Ako je $f \geq 0$ ili $\int |f| \, d\mu < \infty$ tada

$$\int_X \int_Y f(x,y) \, \mu_2(dy) \, \mu_1(dx) = \int_{X \times Y} f \, d\mu = \int_Y \int_X f(x,y) \, \mu_1(dx) \, \mu_2(dy)$$

Dokaz: Za indikatorske funkcije slijedi iz prethodnog teorema, koristeći π-λ teorem. Zatim to proširimo na jednostavne, nenegativne i konačno općenite integrabilne funkcije. $\square$

TEOREM 33 (o parc. integraciji)

Ako su F i G Stieltjesove f-je bez zajedničkih točaka prekida*, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\int_a^b G(x) \, dF(x) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F(x) \, dG(x)$$

NAP * Formula u općenitijem slučaju je u Durrettu.

DVA VAŽNA REZULTATA O MJERAMA

DEF Kažemo da je mjera λ na $(X,\mathcal{F})$ apsolutno neprekidna u odn. na mjeru μ na $(X,\mathcal{F})$ ako

$$\mu(E)=0,\ E\in\mathcal{F} \Rightarrow \lambda(E)=0$$

Oznaka $\lambda \ll \mu$

Dvije su mjere međusobno singularne na $(X,\mathcal{F})$ ako postoji skup $A\in\mathcal{F}$ t.d.

$$\lambda(A)=\mu(A^c)=0$$

Oznaka $\lambda \perp \mu$

TEOREM 34 (Radon - Nikodym)

Neka su λ i μ σ-konačne mjere na $(X,\mathcal{F})$ t.d. $\lambda \ll \mu$ tada postoji nenegativna $\mathcal{F}$-izmjeriva fja f t.d.

$$\lambda(E)=\int_E f\,d\mu \qquad \forall E\in\mathcal{F}$$

TEOREM 35 (Lebesgueov o dekompoziciji)

Neka su λ i μ σ-konačne mjere na $(X, \mathcal{F})$, tada postoje jedinstvene mjere λ_{nep} i λ_{sng} t.d.

$$\underline{\lambda = \lambda_{nep} + \lambda_{sng}}, \quad \underline{\lambda_{nep} \ll \mu} \quad \text{i} \quad \underline{\lambda_{sng} \perp \mu} .$$

Na toj osnovi se pokazuje

TEOREM 36

Ako je F f-ja distribucije tada postoje f-je distribucije F_{ac}, F_d, F_{cs} i $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ t.d. $\alpha + \beta + \gamma = 1$

$$F = \alpha F_{ac} + \beta F_d + \gamma F_{cs}$$

gdje je

- F_{ac} apsolutno neprekidna u odn na λ
- F_d je diskretna
- F_{cs} je neprekidna i singularna tj.

$F_{cs}'(x) = 0$ za gotovo sve x.

POTPUNOST

DEF Vj. prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ je **potpun** ako

$$A \subseteq B \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(B) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}$$

Može se pokazati da se svaka σ-algebra može proširiti do potpunosti.

Mi ćemo podrazumijevati da su naši vj. prostori već potpuni. Ovo svojstvo je od koristi kod proučavanja slučajnih procesa i stohastičkih integrala.