MATEMATIKA

Preddiplomski studij molekularne biologije

Damir Bakić

Predgovor

Ovo je nastavni materijal za kolegij "Matematika" namijenjen studentima preddiplomskog studija biologije, smjer "Molekularna biologija". Kolegij se izvodi u ljetnom semestru 1. godine studija sa satnicom $3 + 2$.

Cilj kolegija je upoznati studente s osnovnim metodama matematičke analize i linearne algebre i njihovim primjenama u biologiji.

Organizacija i sadržaj izloženog materijala su u u funkciji nastave. Materijal je podijeljen u 14 cjelina koje bi trebale biti izložene u 14 trosatnih predavanja tokom 14 tjedana u semestru. Svaka cjelina završava kolekcijom pratećih zadataka koji će predstavljati domaće zadaće (i ujedno biti osnova materijala za vježbe).

U izlaganju se svjesno odstupa od matematičke rigoroznosti gdje god se to činilo prikladnim. Neki su teži i formalniji dokazi i izostavljeni. (Neki od tih izostavljenih dokaza su uvršteni u rubriku "Komentari i napomene" koja na kraju pojedinih poglavlja donosi dodatne opaske uz osnovni tok izlaganja.) S druge strane, dobar dio standardnih dokaza je prezentiran u punoj preciznosti. Ideja je da studenti svladaju potrebne tehnike efikasno, ali svjesni uloge formalnih dokaza, a osobito potrebe za provjerom svih pretpostavki teorema koje koristimo u konkretnim primjenama.

Primjeri i zadaci su birani s ciljem da se ilustrira i istakne važnost primjene matematičkih metoda u modeliranju i rješavanju konkretnih problema u biologiji.

Zahvaljujem se doc. dr. Ljiljani Arambašić na pomnom čitanju izvornog teksta i brojnim korisnim primjedbama i sugestijama.

Sadržaj

1 Realni brojevi, nizovi, funkcije

1.1 Skup realnih brojeva. Nizovi. Diskretni modeli rasta

Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ se vizualizira kao brojevni pravac. Njegovi najvažniji podskupovi su skupovi prirodnih ($\mathbb{N}$), cijelih ($\mathbb{Z}$) i racionalnih brojeva ($\mathbb{Q}$).

Važno je primijetiti da u $\mathbb{R}$ ima i iracionalnih brojeva.

Primjer 1.1 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\sqrt{2}$ racionalan broj. To znači da postoje prirodni brojevi a i b takvi da je $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Smijemo pretpostaviti da su brojevi a i b relativno prosti (tj. da je razlomak $\frac{a}{b}$ u potpunosti skraćen). Sada je $a^2 = 2b^2$, što pokazuje da je a nužno paran broj; dakle, oblika $a = 2k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Slijedi $2b^2 = 4k^2$, tj. $b^2 = 2k^2$ odakle zaključujemo da je i b paran broj. To je kontradikcija s pretpostavkom da su a i b relativno prosti. $\square$

Na skupu $\mathbb{R}$ imamo operacije $+$ i $\cdot$ te relaciju uređaja $<$ ($\leq$ je izvedena relacija). Ako za broj $a \in \mathbb{R}$ vrijedi $a > 0$ kažemo da je a pozitivan.

Fundamentalna svojstva skupa $\mathbb{R}$ se zovu aksiomi polja realnih brojeva:

A1) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $\forall x, y, z, \in \mathbb{R}$;

A2) $x + 0 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

A3) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists -x \in \mathbb{R}$ tako da je $x + (-x) = 0$;

A4) $x + y = y + x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

A5) $x(yz) = (xy)z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

A6) $1 \cdot x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$;

A7) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists x^{-1} \in \mathbb{R}$ tako da je $xx^{-1} = 1$;

A8) $xy = yx$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$;

A9) $x(y + z) = xy + xz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$;

A10) ako je $x \leq y$ i $y \leq x$ onda je $x = y$;

A11) ako je $x \leq y$ i $y \leq z$ onda je $x \leq z$;

A12) za $x, y \in \mathbb{R}$ ili je $x \leq y$ ili je $y \leq x$;

A13) ako je $x \leq y$ onda je, $\forall z \in \mathbb{R}$, $x + z \leq y + z$;

A14) ako je $0 < x$ i $0 < y$ onda je $0 < xy$;

A15) svaki odozgo omeđen skup $A \subseteq \mathbb{R}$ ima supremum.

Prije nego podrobnije objasnimo smisao posljednjeg, petnaestog aksioma, navedimo neka osnovna zapažanja o operacijama zbrajanja i množenja, uređajnoj relaciji $\leq$, i prvih 14 aksioma.

Napomena 1.2 (a) Brojevi $-x$ i x^{-1} zovu se aditivni, odnosno multiplikativni inverz broja x. Oduzimanje i dijeljenje nisu nove, zasebne operacije na skupu $\mathbb{R}$; radi se naprosto o operiranju s aditivnim ili multiplikativnim inverzom. Dogovorom umjesto $x + (-y)$ pišemo $x - y$ i kažemo da smo od x oduzeli y. Slično, umjesto xy^{-1} pišemo $\frac{x}{y}$ i govorimo da x dijelimo s y. Sad aksiom A7 objašnjava zašto, zapravo, ne smijemo "dijeliti s nulom".

(b) Iz navedenih 15 aksioma izvode se sva ostala računska pravila poput, primjerice, $x(y - z) = xy - xz$. U drugu ruku, može se dokazati da su navedeni aksiomi međusobno nezavisni. To znači da se niti jedan od njih ne može izvesti iz preostalih 14.

(c) Aksiom A2 kazuje da je realni broj 0 neutralan za operaciju zbrajanja. Analogno, aksiom A6 kaže da je broj 1 neutralan za operaciju množenja. Lako se može vidjeti da su brojevi 0 i 1 jedini realni brojevi s tim svojstvima. Zaista; pretpostavimo da i realan broj z ima svojstvo neutralnosti za zbrajanje, tj. da vrijedi $x + z = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tada bi slijedilo $z + 0 = z$ (jer 0 je neutralna) i, istovremeno, $z + 0 = 0$ (jer z je neutralan). Usporedbom ova dva rezultata izlazi $z = 0$. Slično se vidi i da je 1 jedini realan broj sa svojstvom neutralnosti za množenje.

(d) Iz navedenih 15 aksioma izvodi se kompletna teorija funkcija realne varijable. Svi dokazi svih teorema koje ćemo susresti počivaju (u krajnjoj konzekvenci) na ovih 15 aksioma.

Primjer 1.3 Navedimo, kao ilustraciju tvrdnje iz (b) dijela prethodne napomene, dokaz sljedeće činjenice: ako za realne brojeve a, b vrijedi $a \leq b$ onda je $-b \leq -a$.

Iz $a \leq b$ primjenom A13 najprije dobivamo $a + (-a) \leq b + (-a)$ što prema A3 možemo pisati kao $0 \leq b + (-a)$. Sad opet korištenjem A13 dobivamo $-b \leq (b + (-a)) + (-b)$. Na kraju, kombiniranim korištenjem A1, A2, A3, A4 (pokušajte precizno posložiti preostalu argumentaciju), izlazi $-b \leq -a$.

U vezi s relacijom uređaja definiraju se sljedeći važni skupovi:

za $a < b$, otvoreni interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$,

za $a \leq b$, zatvoreni interval (segment) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

za $a < b$, poluzatvoreni intervali $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ i $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$.

Poseban slučaj predstavljaju, za $a \in \mathbb{R}$, beskonačni intervali $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$ i $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$. Poluzatvoreni intervali $[a, \infty)$ i $(-\infty, a]$ definiraju se analogno.

Napomenimo da simboli ∞ i $-\infty$ ne predstavljaju realne brojeve. "Beskonačno", dakle, nije realan broj. Ovi nam simboli samo služe da praktično zapisujemo neograničene intervale. (Uostalom, i čitav skup $\mathbb{R}$ se u tom duhu može zapisati kao $(-\infty, \infty)$.) Osim toga, kad budemo proučavali limese, vidjet će se da se neke situacije mogu spretno zabilježiti upotrebom ovih simbola.

Posvetimo se sada objašnjenju aksioma A15. Za to nam trebaju još neki pojmovi.

Definicija 1.4 *Kažemo da je neprazan skup $A \subseteq \mathbb{R}$ omeđen odozdo (odozgo) ako postoji bar jedan $d \in \mathbb{R}$ ($g \in \mathbb{R}$) takav da vrijedi $d \leq a$, $\forall a \in A$ ($a \leq g$, $\forall a \in A$). Svaki takav broj d (g) se naziva donja (gornja) međa skupa A.*

Ponekad se umjesto atributa omeđen upotrebljava i ograničen, dok se umjesto međa često kaže i ograda ili granica.

Očito, za $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, otvoreni, zatvoreni i poluzatvoreni intervali s granicama a i b su omeđeni i odozdo i odozgo. Primijetimo da je broj a donja međa i intervala (a, b) i segmenta $[a, b]$, pri čemu u prvom primjeru a nije element skupa (a, b). Nadalje, i svaki realan broj manji od a je donja međa obaju intervala.

Vidimo, dakle, da donja međa promatranog skupa može i ne mora biti element tog skupa. Osim toga, donja međa nije jedinstven realan broj. U stvari, jasno je: čim je skup omeđen odozdo, postoji beskonačno mnogo njegovih donjih međa. Analogna je situacija s gornjim međama odozgo omeđenih skupova.

Nadalje, skup ne mora nužno biti ograničen niti s jedne strane. Npr, skup $\mathbb{N}$ nije ograničen odozgo, a skup $\mathbb{Z}$ nije ograničen niti s jedne strane.

Definicija 1.5 *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ odozgo omeđen skup. Broj $s \in \mathbb{R}$ se naziva supremum skupa A (oznaka: $s = \sup A$) ako vrijedi:*

1. $a \leq s$, $\forall a \in A$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x < s$, $\exists a \in A$ *t.d.* $x < a$.

Napomena 1.6 (a) Primijetimo da gornji uvjet 2 zapravo znači: ako je broj x manji od s, tada x nije gornja međa skupa A. Dakle, uvjeti 1 i 2, opisno izrečeni, glase:

1. s je gornja međa skupa A,
2. s je *najmanja* gornja međa skupa A.

(b) Definicija infimuma odozdo omeđenih skupova je analogna: kaže se da je broj t infimum odozdo omeđenog skupa B i piše $t = \inf B$, ako je t najveća donja međa skupa B. (Pokušajte ovu definiciju napisati eksplicitno u obliku u kojem je napisana definicija 1.5.)

(c) Lako je ustanoviti da svaki skup može imati najviše jedan supremum. Drugim riječima, supremum je, ako uopće postoji, jedinstven. Isto je s infimumom. No nejasno je u momentu postoje li supremum i infimum svakog skupa. Evidentno, skup koji nije odozgo omeđen nema supremuma. Zato pitanje treba suziti samo na odozgo omeđene skupove. Pokazuje se, međutim, da nema apriornog razloga za postojanje supremuma. Drugim riječima, pretpostavimo li samo prvih 14 aksioma skupa $\mathbb{R}$, nema načina da se iz njih dokaže kako svaki odozgo ograničen skup ima supremum. Ta se činjenica mora aksiomatski zadati - i to je upravo smisao aksioma A15!

(d) Sada, kad je aksiomom A15 zajamčeno postojanje supremuma svakog odozgo omeđenog skupa, lako se *dokazuje* da svaki odozdo omeđen skup ima infimum. (Uputa: uzmimo da je skup B odozdo omeđen. Uvjerite se da je skup $-B = \{-x : x \in B\}$ omeđen odozgo. Prema A15, postoji $s = \sup(-B)$. Provjerite da je tada broj $-s$ traženi infimum skupa B.)

Primjer 1.7 Vrijedi $\sup(0,1) = 1$, $\sup\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\} = \sqrt{2}$, te $\inf\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Provjerimo zadnju tvrdnju. Prvo, skup $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ je očito odozdo omeđen, pa prema posljednjem dijelu prethodne napomene njegov infimum postoji. Dalje, 0 je očito donja međa tog skupa. Preostaje pokazati da je 0 njegova najveća donja međa. Drugim riječima, treba provjeriti da niti jedan broj $x > 0$ ne može biti donja međa promatranog skupa. Uzmimo suprotno; neka postoji broj $x > 0$ takav da je $x \leq \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$. Odavde odmah slijedi da je $n \leq \frac{1}{x}, \forall n \in \mathbb{N}$; drugim riječima da je skup $\mathbb{N}$ odozgo omeđen. Kontradikcija!
$\square$

Za kraj ovih uvodnih razmatranja podsjetimo se još i pojma apsolutne vrijednosti. Definira se

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0 \end{cases}.$$

Primijetimo da je uvijek $x \leq |x|$. Lako se također pokazuje da za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi tzv. nejednakost trokuta: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Važna je činjenica da za brojeve x i y izraz $|x - y|$ predstavlja njihovu udaljenost na realnom pravcu. Pomoću pojma apsolutne vrijednosti možemo izraziti jesu li, i koliko, točke (brojevi) x i y daleke ili bliske.

Definicija 1.8 *Svako preslikavanje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zove se niz realnih brojeva.*

Uočimo najprije da se zaista radi o onome što intuitivno shvaćamo pod pojmom niza. Funkciju f predočujemo tako da redom ispišemo njezine vrijednosti: $f(1), f(2), f(3), \ldots$ Ukoliko još dogovorom pišemo $f(n) = f_n$, zaista smo dobili niz u obliku kako smo ga i inače navikli pisati: $f_1, f_2, f_3, \ldots$

Na primjer, ako zadamo preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ formulom $a(n) = \frac{1}{n}$, riječ je o nizu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

Na sličan način može se napisati nekoliko početnih članova niza čiji je opći član $a(n) = a_n$ dan formulom $a_n = \frac{1}{n^2-n+2}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$

Općenito, kad budemo govorili o nekom apstraktnom nizu, pisat ćemo (a_n) pri čemu a_n označava opći, n-ti član promatranog niza.

Definicija 1.9 *Kažemo da je niz (a_n) ograničen odozdo (odozgo) ako je skup svih njegovih članova $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ ograničen odozdo (odozgo).*

Kažemo da je niz (a_n) rastući (padajući) ako vrijedi $a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ($a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$). U oba slučaja kažemo da se radi o monotonom nizu.

Prethodno navedeni primjeri predstavljaju monotone i ograničene (s obje strane) nizove. Niz čiji je opći član dan s $a_n = n$ je rastući, ali neograničen. Niz $a_n = (-1)^n$ je ograničen ali nije monoton (dakle, niti raste, niti pada).

Nizovi (tj. njihovi članovi) se mogu ponašati kaotično ili pak mogu težiti nekoj određenoj vrijednosti. U ovom drugom slučaju reći ćemo da niz konvergira.

Prije nego formalno definiramo konvergenciju, istaknimo da se ne smije brkati "pravilnost" s konvergencijom. Primjerice, niz $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots$ je vrlo "pravilan", ali očito njegovi članovi neograničeno rastu - taj niz ne teži niti k jednom realnom broju. "Pravilnost" u nekom nizu obično se oglada u činjenici da takav niz znamo zapisati općom formulom; dok je niz $1, 3, 17, 12, \frac{3}{7}, 4, ...$ "čudan" (pa ne možemo naslutiti neku formulu kojom bi bio zadan njegov opći član), za niz $1, -4, 9, -16, 25, -36, \ldots$ naslućujemo da je njegov opći, n-ti član dan formulom $a_n = (-1)^{n+1}n^2$. No, ni taj niz neće konvergirati.

Definicija 1.10 *Kaže se da je realan broj a limes niza (a_n) i piše se $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ako vrijedi:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \textit{ takav da } n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ako limes niza postoji kažemo da je niz konvergentan ili da konvergira. U protivnom kažemo da je niz divergentan ili da divergira.

Smisao definicije je sljedeći: niz (a_n) konvergira prema limesu a ako se članovi niza sve više i više približavaju broju a. Broj ε je mjera te blizine. Relacija $|a_n - a| < \varepsilon$ zapravo znači da su članovi niza a_n udaljeni od limesa a za manje od ε. U tom smislu definicija traži: ma kako malen bio ε (tj. ma kako usku okolini $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ oko broja a promatrali[1], postojat će mjesto u nizu (član niza s indeksom n_0) nakon kojega će svi članovi niza upasti u tu promatranu okolinu.

Istaknimo još i to da je limes niza, ako postoji, realan broj. Vidjet ćemo u primjerima da neki nizovi neograničeno rastu - rekli bismo, teže u beskonačnost. No, kao što ∞ nije realan broj, tako ni te nizove ne smatramo konvergentnima.

Primjer 1.11 Razmotrimo konvergenciju niza (a_n) čiji opći član je dan formulom:
(a) $a_n = \frac{1}{n}$, (b) $a_n = a$, $a \in \mathbb{R}$, (c) $a_n = \frac{n+1}{n}$, (d) $a_n = \begin{cases} n^2, & n \text{ paran} \\ 1, & n \text{ neparan} \end{cases}$.

U prvom primjeru tvrdimo da je niz konvergentan te da mu je limes 0. Zaista, zadajmo proizvoljan broj $\varepsilon > 0$. Sad smo dužni naći mjesto u nizu, tj. indeks n_0 takav da vrijedi $|a_n - 0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$. Odredimo broj n_0 kao prirodan broj takav da je $\frac{1}{\varepsilon} < n_0$; takav n_0 sigurno postoji jer skup $\mathbb{N}$ nije odozgo omeđen. Ako je sada $n_0 \leq n$, pogotovo vrijedi $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Odavde imamo $\frac{1}{n} < \varepsilon$, a to možemo pisati kao $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

U primjeru (b) radi se o konstantnom (stacionarnom) nizu koji evidentno konvergira k limesu a.

Lako se vidi da je niz u primjeru (c) također konvergentan te da mu je limes broj 1.

Konačno, kad ispišemo prvih nekoliko članova niza u primjeru (d), lako uviđamo da ovaj niz divergira. Smisao definicije limesa je u tome da se članovi niza, idemo li sve "dalje i dalje", stabiliziraju oko točke koja predstavlja limes. U ovom nizu očito nije tako. Niz je jednim svojim dijelom stacioniran u jedinici (svi njegovi neparni članovi iznose 1), dok druga polovica članova upravo bježi od jedinice (parni članovi niza neograničeno rastu).

Ponekad nije sasvim lagano utvrditi konvergenciju promatranog niza. Sljedeća dva teorema su vrlo korisna u mnogim slučajevima.

[1] Primijetite da točke x za koje vrijedi $|x - a| < \varepsilon$ upravo čine interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.

Teorem 1.12 *Svaki monoton i ograničen niz konvergira. Ako je niz (a_n) ograničen i rastući (padajući) onda je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, gdje je a supremum (infimum) skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Dokaz: Neka niz (a_n) raste. Uzmimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Pogledajmo broj $a - \varepsilon$. Po definiciji supremuma taj broj više nije gornja međa skupa $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ pa zato postoji član toga skupa, recimo a_{n_0}, takav da je $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a$. Za $n \geq n_0$ pogotovo imamo $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a$. Drugim riječima: $n \geq n_0 \Rightarrow |a - a_n| < \varepsilon$.

Za padajuće nizove dokaz ide sasvim analogno. □

Primjer 1.13 (a) Niz (a_n), $a_n = \frac{n-1}{n}$, očito raste (jer vrijedi $(n-1)(n+1) < n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Kako je skup $\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ odozgo omeđen i kako mu supremum iznosi 1 (provjerite!), primjenom prethodnog teorema zaključujemo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$.

(b) Neka je $0 < a < 1$. Primjenom prethodnog teorema također odmah slijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

Ovdje je sada prikladno uvesti sljedeću konvenciju: kad god pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ podrazumijevat ćemo da pritom mislimo: niz (a_n) je konvergentan i njegov limes iznosi a. Ovaj dogovor prešutno ćemo koristiti u nastavku.

Teorem 1.14 *Neka vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Tada je:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;
4. *za proizvoljan* $c \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = ca$;
5. *ako je* $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Dokaz: Sve se tvrdnje dokazuju izravnom primjenom definicije konvergencije niza. Dokažimo, ilustracije radi, prvu tvrdnju. Odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Prema pretpostavci, promatrajući broj $\frac{1}{2}\varepsilon$, možemo naći n_1 takav da $n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{1}{2}\varepsilon$ i n_2 takav da $n \geq n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Sada za sve $n \geq n_0$ očito vrijedi $|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. □

Primjer 1.15 (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2 - 1}{2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} 2 - \dfrac{1}{2}(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n})(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}) = 2$.

(b) Uzmimo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, i definirajmo $s_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je $s_n = \frac{1-a^n}{1-a}$, iz prethodnog teorema i primjera 1.13(b) zaključujemo $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{1}{1-a}$.

Obično se $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ zapisuje kao $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$ (i naziva geometrijski red s kvocijentom a); zato se dobiveni rezultat često zapisuje u obliku

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Već i iz intuitivne interpretacije definicije je jasno da je limes niza, ukoliko postoji, jedinstven. Dokažimo to sada egzaktno.

Teorem 1.16 *Limes konvergentnog niza je jedinstven.*

Dokaz: Pretpostavimo da niz (a_n) ima dva različita limesa a i b. Zbog $a \neq b$ imamo $|a-b| > 0$. Za broj $\varepsilon = \frac{1}{2}|a-b|$ sada možemo naći n_1 takav da $n \geq n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ i n_2 takav da $n \geq n_2 \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$.

Neka je $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ i $n \geq n_0$. Tada je $n \geq n_1$ i $n \geq n_2$ pa vrijedi $|a-b| = |(a-a_n)+(a_n-b)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon = |a-b|$. Dobili smo, dakle, da za pozitivan broj $|a-b|$ vrijedi $|a-b| < |a-b|$ što je kontradikcija. □

Napomena 1.17 Ponekad niz može biti zadan na način da je svaki njegov član zadan pomoću prethodnog. Ovakav postupak zove se rekurzivno zadavanje niza. Primjer: neka je $a_1 = 2$ i $a_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}a_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Ovdje imamo $a_2 = \frac{11}{6}$, $a_3 = \frac{31}{18}$ itd.

Kod rekurzivno zadanih nizova nije uvijek lako utvrditi jesu li konvergentni i (ako jesu) naći im limes.

Promotrimo ponovo prethodni primjer i u momentu pretpostavimo da navedeni niz konvergira (inače, može se pokazati da je zaista tako[2]). Uvedimo sada novi niz (b_n) formulom $b_n = a_{n+1}$. Jasno je da je tada i ovaj niz konvergentan te da ima isti limes a (jer zapravo je riječ o istom nizu, do na početni član a_1). Kako je $b_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}a_n$, prva i četvrta tvrdnja teorema 1.14 sada povlače $a = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}a$, odakle je $a = \frac{3}{2}$.

Slično se može postupiti kod svih rekurzivno zadanih nizova, no istaknimo ponovo da je pritom nužno unaprijed utvrditi da promatrani niz konvergira.

Primjer 1.18 Pretpostavimo da promatramo populaciju bakterija koje se raspolavljaju (od jedne nastaju dvije) svakih 20 minuta. Zamislimo da na startu eksperimenta, u trenutku $t = 0$, imamo B_0 bakterija. Želimo proučiti kako broj bakterija raste s protokom vremena.

Definirajmo vremensku jedinicu u iznosu od 20 minuta. Nakon isteka jedne vremenske jedinice, u trenutku $t = 1$, imat ćemo $B_1 = 2B_0$ bakterija. U času $t = 2$ imat ćemo $B_2 = 2B_1 = 4B_0$ bakterija i, općenito, u trenutku $t = n$, $n \in \mathbb{N}$, imat ćemo $B_n = 2^n B_0$ bakterija.

Ovakav model rasta naziva se eksponencijalni rast. Primijetimo da za dobiveni niz (B_n) imamo rekurzivnu relaciju $B_{n+1} = 2B_n$.

[2] Npr., može se vidjeti da je opći član ovog niza dan formulom $a_n = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^{n-1}$, a iz ovog zapisa konvergenciju lako utvrđujemo primjenom teorema 1.12 i 1.14.

Naravno, prethodni primjer nije realističan. Niti jedna populacija se ne širi neograničeno, bez interakcije s okolinom. Kako broj jedinki raste, tako među njima nastaje i kompeticija u potrazi za hranom i ostalim potrebnim resursima.

Primjer 1.19 Uzmimo sada općenitije da od jedne jedinke po isteku jedne vremenske jedinice nastane njih R, $R > 1$. Ako smo, dakle, na početku imali B_0 jedinki, broj jedinki B_1 u trenutku $t = 1$ iznosi $B_1 = RB_0$. Vrijedi $\frac{B_0}{B_1} = \frac{1}{R} < 1$.

Ako bismo postupili kao u prethodnom primjeru i ako opet označimo s B_n broj jedinki u trenutku $t = n$, imali bismo $B_{n+1} = RB_n$, odnosno $\frac{B_n}{B_{n+1}} = \frac{1}{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ovdje ćemo, međutim, pretpostaviti da se prirast populacije smanjuje, tj. da vrijednost razlomka $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ raste sve dok ne dostigne vrijednost 1 (dakle, do točke u kojoj više nema daljnjeg rasta promatrane populacije). Recimo da rast prestaje u trenutku $t = m$ kad B_m dostigne teorijski ili praktični maksimum koji iznosi $B_m = B_{max} = K$.

U ovom modelu omjer $\frac{B_n}{B_{n+1}}$ ovisan je o B_n. Pretpostavimo, jednostavnosti radi, da je ta veza linearna: $\frac{B_n}{B_{n+1}} = \alpha B_n + \beta$, $n \in \mathbb{N}$. Koeficijente α i β odredit ćemo iz rubnih uvjeta koje smo ranije postavili: $\frac{B_0}{B_1} = \frac{1}{R}$ i, zbog $B_m = B_{m+1} = K$, $\frac{B_m}{B_{m+1}} = 1$.

Uvrstimo prvi uvjet u jednakost $\frac{B_0}{B_1} = \alpha B_0 + \beta$. Pretpostavimo sada, dodatno, da je $B_0 = 1$. (Ovo zapravo znači kako pretpostavljamo da naša razmatranja nisu ovisna o početnom broju jedinki B_0 pa model možemo istražiti uzevši da je $B_0 = 1$). Dobivamo $\frac{1}{R} = \alpha + \beta$. Drugi uvjet daje $1 = \alpha K + \beta$. Odavde lako izlazi $\alpha = \frac{1}{R}\frac{R-1}{K-1}$ i $\beta = \frac{1}{R}\frac{K-R}{K-1}$ pa slijedi $\frac{B_n}{B_{n+1}} = \frac{1}{R}\frac{K-R}{K-1} + \frac{1}{R}\frac{R-1}{K-1}B_n$, odnosno,

$$B_{n+1} = \frac{(K-1)RB_n}{(K-R) + (R-1)B_n}.$$

Tako smo i ovdje niz (B_n) opisali rekurzivno. Izvedena formula predstavlja varijantu tzv. Beverton-Holtove regrutacijske krivulje. Originalna Beverton-Holtova rekurzija glasi

$$B_{n+1} = \frac{RB_n}{1 + \frac{R-1}{K}B_n}. \qquad (1)$$

Uočimo da se ova jednadžba dobiva iz prethodne tako da $K - 1$ zamijenimo s K (što naprosto znači da smo teorijski maksimum promatrane populacije umjesto s K označili s $K+1$) i procijenimo da je razlomak $\frac{K-R}{K-1}$ približno jednak 1 (što ima smisla; npr u modelu razmnožavanja raspolavljanjem imamo $R = 2$, dok je teorijski maksimum populacije K vrlo velik).

Inače, u ovom se modelu konstanta R naziva parametar rasta, a K kapacitet.

Na kraju, primijetimo da iz prirode naših razmatranja slijedi kako dobivena rekurzija (1) opisuje samo prvih $n + 1$ članova niza (B_n). Nakon što promatrana populacija dosegne svoj maksimum, rast se zaustavlja i (uz pretpostavku da svi ostali uvjeti ostanu nepromijenjeni) imamo $B_n = B_m = K$ za sve daljnje članove niza, tj. $\forall n \geq m$.

Zadaci: 1. domaća zadaća

1. Neka je $0 < x < y$. Pokažite da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $nx > y$. Uputa: skup $\mathbb{N}$ nije odozgo omeđen.

2. Dokažite: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, $\exists r \in \mathbb{Q}$ takav da je $x < r < y$. Ovu činjenicu obično izričemo tako da kažemo da je skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$. Uputa: iskoristite tvrdnju prethodnog zadatka tako da nađete $n \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $n(y - x) > 2$.

3. Dokažite: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ $\exists v \notin \mathbb{Q}$ takav da je $x < v < y$. (Ovo pokazuje da je i skup iracionalnih brojeva gust u $\mathbb{R}$.) Uputa: ako je točno jedan od brojeva x i y iracionalan, onda im je i aritmetička sredina iracionalan broj. Ako je pak $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{Q}$, odabere se v oblika $v = \frac{x+y}{2} + \frac{\sqrt{2}}{n}$ za dovoljno velik $n \in \mathbb{N}$.

4. Riješite nejednadžbu $|3 - 2x| < 1$.

5. Riješite nejednadžbu $|5 - \frac{1}{x}| < 1$.

6. Riješite sistem nejednadžbi $x < x^2 - 12 < 4x$.

7. Odredite, ako postoji, $\lim\limits_{n\to\infty} (\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n})$.

8. Odredite, ako postoji, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2 - 2n + 6}{5n^2}$.

9. Promotrimo model rasta (B_n opet neka označava broj jedinki u promatranoj populaciji u trenutku $t = n$) opisan tzv. diskretnom logističkom jednadžbom (rekurzijom)

$$B_{n+1} = B_n(1 + R(1 - \frac{B_n}{K})),$$

pri čemu su R i K pozitivne konstante koje se i ovdje nazivaju parametar rasta i kapacitet. Pokažite: ako se uvede $C_n = \frac{R}{K(1+R)} B_n$, $n \in \mathbb{N}$, onda vrijedi $C_{n+1} = (1 + R)C_n(1 - C_n)$.

10. (Fibonaccijev niz) Postoje i drugi modeli rasta opisani složenijim rekurzijama. Evo jedne drugog reda.

Pretpostavimo da na početku, u trenutku $t = 0$, imamo 1 par novorođenih zečeva. Neka Z_n označava broj parova novorođenih zečeva u trenutku n, pri čemu vrijeme mjerimo u mjesecima. Dakle, $Z_0 = 1$. Nakon jednog mjeseca dobijemo, kao potomke, još jedan par. Dakle, $Z_1 = 1$. Svaki od dva postojeća para po isteku još jednog mjeseca dobije kao potomke još po jedan par; dakle, $Z_2 = 2$. Nakon još jednog mjeseca prvi par više nema potomaka, dok preostala 3 dobiju po jedan novi par; dakle, $Z_3 = 3$. Sad se razmnožavanje nastavi po istom pravilu: svaki novorođeni par nakon jednog mjeseca dobije 1 par potomaka, nakon još jednog mjeseca još 1 par potomaka, a zatim se prestane dalje razmnožavati. Imamo, dakle, $Z_0 = 1, Z_1 = 1, Z_2 = 2, Z_3 = 3, Z_4 = 5, Z_5 = 8, \ldots$. Dobili smo tzv. Fibonaccijev niz $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ koji je opisan rekurzijom

$$Z_{n+1} = Z_n + Z_{n-1}.$$

Uočimo da vrijedi $\frac{Z_{n+1}}{Z_n} = 1 + \frac{Z_{n-1}}{Z_n}$. Označimo li $C_{n+1} = \frac{Z_{n+1}}{Z_n}$, imamo $C_{n+1} = 1 + \frac{1}{C_n}$. Može se pokazati da niz C_n opisan ovom rekurzijom konvergira. Uzimajući to u obzir, pokažite da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Broj $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se zove zlatni rez.

11. (Zlatni rez) Dan je papirnati pravokutnik sa stranicama a, b, $a > b$. Izrežemo li s jednog njegovog kraja kvadrat stranice b, preostat će nam novi, manji pravokutnik sa stranicama $b, a-b$. Dokažite: ako je $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, onda je $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} b$.

12. Napišite eksplicitno Beverton-Holtovu rekurziju (1) ako je $R = 3$, $K = 120$.

13. Napišite diskretnu logističku rekurziju u izvornom obliku i u obliku $C_{n+1} = (1 + R)C_n(1 - C_n)$ ako je $R = 1$ i $K = 20$.

14. Ispišite prvih 10 članova niza C_n danog rekurzijom $C_{n+1} = (1 + R)C_n(1 - C_n)$ ako je $R = 1$ i $C_1 = 0.18$.

1.2 Pojam funkcije. Elementarne funkcije

Definicija 1.20 *Neka su A i B neprazni skupovi. Funkcija ili preslikavanje $f : A \to B$ je pravilo (zakon) koje* svakom *elementu $x \in A$ pridružuje* jedinstveno određen *element $f(a) \in B$.*

Pritom se skup A zove domena, a B kodomena funkcije f. Element $f(x) \in B$ se naziva slika elementa $x \in A$ ili funkcijska vrijednost od f u točki x.

Istaknimo: da bi f bila funkcija, treba biti propisana vrijednost $f(x)$ za sve elemente x iz domene. Funkcija, dakle, ne može biti zadana djelomično, samo na nekim elementima domene. Također, slika $f(x)$ je jednoznačno određen element kodomene. Niti jedan x ne može funkcija f preslikavati u više slika. To, međutim, ne priječi da se više elemenata domene preslikava u jedan te isti element kodomene. Pritom, niti sva kodomena ne treba biti "potrošena"; može biti elemenata u skupu B u koje se nije preslikao niti jedan element skupa A. S tim u vezi, za funkciju $f : A \to B$ definiramo područje vrijednosti $f(A)$ kao podskup kodomene $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. Područje vrijednosti je, dakle, skup svih onih elemenata kodomene koji su "pogođeni" funkcijom f, koji su slike elemenata domene.

Funkcije možemo zadavati tako da njihovo djelovanje eksplicitno ispišemo (ako je domena konačan skup) ili pak tako da napišemo pravilo (formulu) po kojoj će funkcija preslikavati elemente domene u elemente kodomene.

Primjer 1.21 (a) $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$, $\begin{array}{c|c|c|c} x & 1 & 2 & 3 \\ \hline f(x) & a & b & a \end{array}$.

U ovom primjeru područje vrijednosti funkcije f je skup $\{a, b\}$.

(b) Sjetimo se da je svaki niz, prema definiciji, zapravo preslikavanje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Članovi niza $a_1, a_2, a_3, \ldots$ su zapravo funkcijske vrijednosti $a(1), a(2), a(3), \ldots$.

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, pri čemu su a i b konstante, naziva se linearna funkcija. Primijetimo da se u formuli kojom se funkcija zadaje mogu pojavljivati razni simboli. Jedan i samo jedan od njih (u ovom slučaju x) rezerviran je za oznaku proizvoljnog elementa domene funkcije f i ta se veličina onda naziva varijabla. Svi ostali simboli koji se pojavljuju u definiciji pojedine funkcije tretiraju se kao konstantne veličine. Izbor oznaka za varijablu i konstante koje se u definiciji funkcije pojavljuju je irelevantan.

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, se naziva kvadratna parabola.

Definicija 1.22 *Funkcije f i g su jednake ako imaju istu domenu, istu kodomenu i ako vrijedi $f(x) = g(x)$ za svaki x iz njihove zajedničke domene.*

Primjer 1.23 Pogledajmo zajedno s funkcijom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ iz prethodnog primjera i funkciju $g : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $g(x) = x^2$, kao i $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$. Iako sve tri navedene funkcije djeluju po istom zakonu, nikoje dvije od njih, prema prethodnoj definiciji, *nisu jednake*.

Definicija 1.24 *Neka je $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Kompozicija funkcija g i f je nova funkcija $g \circ f : A \to C$ definirana formulom $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Često umjesto $g \circ f$ jednostavnije pišemo samo gf.

Uočimo da se funkcije mogu komponirati jedino onda kad se domena vanjske funkcije g podudara s kodomenom unutrašnje funkcije f. To znači da postojanje kompozicije gf uopće ne jamči da će i kompozicija fg biti definirana.

U posebnim slučajevima kad imamo u igri samo jedan skup, recimo A, i funkcije $f : A \to A$ i $g : A \to A$, definirane su obje kompozicije gf i fg. No čak ni tada općenito ne vrijedi $fg = gf$.

Za primjer pogledajmo funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$ i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. Ovdje je $(fg)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2x + 2$, a $(gf)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1$.

Pri proučavanju funkcija prirodno je promatrati i djelovanje funkcije u obratnom smjeru. Preciznije, željeli bismo promatrati inverzno djelovanje $f(x) \mapsto x$. Je li to funkcija? Za odgovor na ovo pitanje očito su relevantni sljedeći pojmovi.

Definicija 1.25 *Funkcija $f : A \to B$ se naziva*

- *injekcija, ako $x, y \in A$, $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$;*
- *surjekcija, ako za svaki $b \in B$ postoji $x \in A$ takav da je $f(x) = b$;*
- *bijekcija, ako je injekcija i surjekcija.*

Primjer 1.26 (a) Promotrimo funkcije iz primjera 1.23. Funkcija f niti je injekcija, niti surjekcija. Funkcija g nije injekcija, ali je surjekcija, dok za funkciju h vrijedi upravo obratno: h je injekcija, ali nije surjekcija.

Ovo pokazuje da je definicija jednakosti dviju funkcija smislena, tj. da je zaista opravdano ove tri funkcije smatrati različitima

(b) Identično preslikavanje $\mathrm{id} : A \to A$, $\mathrm{id}(x) = x$, je bijekcija (ma što bio skup A).

(c) Linearna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, pri čemu su $a \neq 0$ i b konstante, je bijekcija.

Promotrimo sada proizvoljnu funkciju f i pokušajmo konstituirati novu funkciju koja bi djelovala inverzno, tako da se element $f(x)$ preslika u x. Sjetimo li se definicije funkcije, jasno je da to možemo učiniti jedino ako je polazna funkcija f bijekcija. (Obrazložite!)

Definicija 1.27 *Neka je $f : A \to B$ bijekcija. Inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$ definira se formulom $f^{-1}(b) = x$, pri čemu je $x \in A$ onaj jedinstveni element skupa A za kojeg vrijedi $f(x) = b$.*

Primjer 1.28 (a) Označimo $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ i pogledajmo funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$. Očito, f je bijekcija i inverzna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definirana je formulom $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

(b) Za $a \neq 0$ linearna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je bijekcija i inverzna funkcija $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana je formulom $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Teorem 1.29 *(1) Ako je $f : A \to B$ bijekcija onda je i inverzna funkcija $f^{-1} : B \to A$ bijekcija te vrijedi $f^{-1}f = id_A$, $ff^{-1} = id_B$.*

(2) Kompozicija dviju injekcija (surjekcija, bijekcija) je injekcija (surjekcija, bijekcija).

(3) Ako je kompozicija gf injekcija onda je i f injekcija. Ako je kompozicija gf surjekcija onda je i g surjekcija.

Dokaz: Sve tvrdnje su elementarne i dokazuju se neposrednim pozivanjem na odgovarajuće definicije. $\square$

U daljnjem ćemo se baviti isključivo realnim funkcijama realne varijable. To su takve funkcije $f : A \to B$ za koje je $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Uobičajeno je takve funkcije predočavati grafički u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini. Sve vrijednosti elemenata domene $x \in A$ nanosimo na x-os, a odgovarajuće funkcijske vrijednosti $f(x)$ na y-os. Sad kažemo da graf funkcije f čine sve točke ravnine s koordinatama oblika $(x, f(x))$, $x \in A$.

U proučavanju realnih funkcija realne varijable korisne su sljedeće opaske.

Napomena 1.30 (a) Svaka točka $x_0 \in A$ za koju vrijedi $f(x_0) = 0$ naziva se nul-točka funkcije f. Uočimo da upravo u tim točkama x_0 graf funkcije f presijeca x-os.

(b) Ako vrijedi $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ kažemo da je funkcija rastuća. Analogno, ako vrijedi $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ kaže se da je funkcija padajuća.

Graf rastuće (padajuće) funkcije je rastuća (padajuća) krivulja, gledajući s lijeva na desno.

Uočimo da je svaka rastuća funkcija, kao i svaka padajuća funkcija, injekcija.

Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ je rastuća ako je $a > 0$, dok je za $a < 0$ padajuća.

Općenito, rijetko će se dogoditi da funkcija raste ili pada na čitavoj svojoj domeni. Zato će biti korisno odrediti one podskupove domene na kojoj je dana funkcija rastuća ili padajuća. Na primjer, funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, je padajuća na skupu $\langle -\infty, 0]$ i rastuća na skupu $[0, \infty\rangle$.

(c) Kaže se da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ parna ako vrijedi $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ako pak za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $f(-x) = -f(x)$, kažemo da je f neparna funkcija. Analogno se definira pojam parne i neparne funkcije u slučaju kad je funkcija definirana na proizvoljnom simetričnom intervalu $\langle -a, a\rangle$, $a \in \mathbb{R}$. Na primjer, funkcija $f(x) = x^2$ je parna, dok je $f(x) = x^3$ neparna. I ovdje treba imati na umu da većina funkcija (poput, na primjer, $f(x) = x^2 + x$) nije ni parna ni neparna.

Graf parne funkcije je osno simetričan s obzirom na y-os. Graf neparne funkcije je centralno simetričan s obzirom na ishodište koordinatnog sustava.

(d) Pretpostavimo da poznajemo graf funkcije $f : A \to B$ te da je funkcija $g : A \to B$ definirana s $g(x) = f(x) + c$, gdje je c neka odabrana konstanta. Tada se graf funkcije g dobiva podizanjem, odnosno spuštanjem grafa funkcije f za $|c|$, ovisno o tome je li $c > 0$ ili $c < 0$.

Ako je pak funkcija h definirana pomoću f formulom $h(x) = f(x + k)$ onda se graf funkcije h dobiva pomicanjem grafa funkcije f za $|k|$ ulijevo ili udesno, ovisno o tome je li $k > 0$ ili $k < 0$.

U nizu sljedećih primjera iznijet ćemo pregled najvažnijih elementarnih funkcija. Pritom ćemo u svim navedenim slučajevima funkcije promatrati na njihovim prirodnim domenama. Pod prirodnom domenom podrazumijevamo najveći podskup skupa $\mathbb{R}$ na kojem je pravilo kojim je određena funkcija definirana smisleno. Za kodomenu ćemo u načelu uzimati čitav skup $\mathbb{R}$, iako je uvijek korisno odrediti stvarno područje vrijednosti $\{f(x) : x \in A\}$ svake funkcije $f : A \to \mathbb{R}$.

Primjer 1.31 Polinomi.

Polinom je svaka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ pri čemu je $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ i $a_n \neq 0$. U ovom slučaju kažemo da je f polinom n-tog stupnja.

Ako je $n = 1$ imamo linearnu funkciju čiji graf je pravac. Za $n = 2$ imamo funkciju $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ čiji graf je parabola.

Primjer 1.32 Racionalne funkcije.

Svaka funkcija oblika $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, gdje su p i q polinomi, naziva se racionalna funkcija. Prirodna domena racionalne funkcije $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ je skup $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$. Najjednostavniji i najvažniji primjer je hiperbola $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

Racionalne funkcije se često prirodno pojavljuju u primjenama. Za ilustraciju promotrimo sljedeći primjer.

Primjer 1.33 U prethodnim primjerima modela rasta populacije nismo uzimali u obzir utjecaj vanjskih faktora.

Zamislimo sada model rasta populacije u kojem broj jedinki u populaciji bitno ovisi o prisutnosti određenog, vitalno važnog izvora prehrane. U slučaju odsustva tog izvora prehrane rasta nema, dok se u zasićenom slučaju (kad je taj izvor neograničeno dostupan) rast stabilizira na najvišem mogućem nivou. Brzina rasta $r(x)$ je funkcija varijable x pri čemu x označava dostupnu količinu promatranog izvora hrane mjerenu u prikladnim jedinicama.

Jedan poznati model ovakve vrste je tzv. Monodova funkcija rasta $r(x) = \frac{ax}{x+k}$, $x \geq 0$, gdje su $a, k > 0$ konstante. Uočimo da je $r(0) = 0$, $0 \leq r(x) < a$ za sve $x \geq 0$ i (u ovom trenutku samo intuitivno) da $r(x)$ teži prema a kada x teži u beskonačno.

Funkcije ovakvog tipa koriste se i u biokemiji gdje se nazivaju Michaelis-Menten funkcije.

Primjer 1.34 Potencije.

Polinomi oblika $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, su posebni slučajevi potencija. Potencije $f(x) = x^r$ možemo definirati i za bilo koji racionalni eksponent r.

Prvo, po definiciji uzimamo da je $x^0 = 1$, pa slučaj $r = 0$ nije zanimljiv.

Za $r = \frac{m}{n}$, gdje je $m, n \in \mathbb{N}$, definira se $x^r = (x^{\frac{1}{m}})^n$. Pritom, ako je m neparan, $x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$ je dobro definirana funkcija na čitavom skupu $\mathbb{R}$ (jer je to u stvari inverzna funkcija bijekcije $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^m$). Ako je m paran $x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$ je dobro definirana funkcija samo na skupu $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ kao inverzna funkcija bijekcije $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $g(x) = x^m$.

Na ovaj način imamo definiranu funkciju $f(x) = x^r$ za svaki pozitivan racionalan broj r. Konačno, ako je $r \in \mathbb{Q}$ negativan, po definiciji stavljamo $x^r = \frac{1}{x^{-r}}$.

Konačno, preostaje definirati x^y ako je eksponent y iracionalan. Za definiciju izraza x^y za iracionalan eksponent y koristi se tvrdnja 1. zadatka iz 1. domaće zadaće. Iracionalan broj y se aproksimira racionalnim brojem r te se vrijednost x^y približno odredi kao x^r. U stvari, ako je $x > 1$ i y iracionalan, definira se x^y kao supremum skupa $\{x^r : r \in \mathbb{Q}, r < y\}$. Pokazuje se da je ova definicija dobra te da je konzistentna s definicijom izraza x^y za racionalne eksponente y. Detalje ovdje izostavljamo, no potrebno je zabilježiti da vrijedi $x^y x^z = x^{y+z}$ i $(x^y)^z = x^{yz}$ za sve x, y, z za koje su navedeni izrazi definirani.

Primjer 1.35 Eksponencijalna funkcija.

Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. Vidjeli smo da izraz a^x ima smisla za svaki realan broj x. Ekponencijalna funkcija s bazom a je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = a^x$.

Najčešće su u upotrebi baze $a = 2$, $a = 10$ i $a = e = 2,718...$ (iracionalan broj koji ćemo kasnije definirati preciznije). Broj e se naziva prirodna eksponencijalna baza i često se umjesto e^x piše $\exp x$. Pokazat ćemo nešto kasnije da je ova prirodna baza e zaista najbolji i najprirodniji izbor za bazu eksponencijalne funkcije.

Graf ekponencijalne funkcije $f(x) = \mathrm{e}^x$

Ponašanje eksponencijalne funkcije bitno ovisi o tome je li $a > 1$ ili je $a < 1$. Za $a > 1$ funkcija $f(x) = a^x$ je rastuća, dok je za $a < 1$ funkcija $f(x) = a^x$ padajuća. U oba slučaja područje vrijednosti je skup pozitivnih realnih brojeva $\mathbb{R}^+$. Dakle, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je bijekcija, te će, za sve $a > 0$, $a \neq 1$, postojati inverzna funkcija $\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ koja se naziva logaritam s bazom a. Logaritam s bazom e se naziva prirodni logaritam i označava oznakom ln.

Primjer 1.36 U proučavanju jednostavnog modela rasta imali smo rekurziju $B_{n+1} = 2B_n$ iz koje očito slijedi $B_n = 2^n B_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Naravno, ovdje se ne moramo ograničiti na cijeli broj vremenskih jedinica pa, pišući B_n kao $B(n)$ i onda B_x kao $B(x)$, imamo $B(x) = 2^x B_0$, $x \geq 0$.

Vidimo, dakle, da je ovaj model opisan pomoću eksponencijalne funkcije s bazom 2 (točnije, radi se o produktu eksponencijalne funkcije i konstante B_0 koja označava početni broj jedinki u trenutku $x = 0$). Zato se ovaj model zove model eksponencijalnog rasta.

Primijetimo da u opisu našeg modela sudjeluje eksponencijalna funkcija ne na svojoj prirodnoj domeni (što je cijeli skup $\mathbb{R}$), nego na podskupu $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ jer tako nalaže priroda promatranog problema. Varijabla x ovdje predstavlja vrijeme proteklo od početka eksperimenta/mjerenja i zato naš račun ima smisla samo za $x \geq 0$. Ovakva situacija je zapravo vrlo česta; u modeliranju je smisleno promatrati funkcijske vrijednosti samo za one vrijednosti varijable koje imaju smisla po naravi problema kojim se bavimo.

U praksi i u teoriji pojavljuju se eksponencijalni modeli i s drugim bazama. Spomenimo da se eksponencijalni rast pojavljuje i u opisu ukamaćivanja.

Napomena 1.37 Promotrimo niz (a_n) definiran s $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Prvih nekoliko članova su: $1, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{256}, \ldots$ Pokazuje se da ovaj niz konvergira. Po definiciji, njegov limes se označava s e i upravo je to broj koji se uzima za prirodnu eksponenecijalnu bazu. Ovo je jedan od ekvivalentnih načina precizne definicije broja e. Konvergenciju navedenog niza ovdje nećemo dokazivati.

Primjer 1.38 Često se prirodno pojavljuje kompozicija eksponencijalne funkcije i linearne funkcije. Posebno je važan slučaj $f(x) = e^{-\lambda x}$ gdje je $\lambda > 0$ konstanta. Funkcije ovog tipa pojavljuju se u mnogim modelima u raznim disciplinama.

Označimo, na primjer, s $W(t)$ količinu neke radioaktivne tvari kojom raspolažemo u trenutku $t \geq 0$. Pokazuje se da je, ako nema utjecaja vanjskih faktora, $W(t)$ padajuća funkcija. To je fizikalni fenomen radioaktivnog raspada. Nadalje, fizikalni eksperimenti dovode do zaključka da je $W(t) = W_0 e^{-\lambda t}$ pri čemu je W_0 početna (u trenutku $t = 0$) količina promatrane radioaktivne tvari, dok je $\lambda > 0$ konstanta koja se utvrđuje eksperimentalno.

Iz grafa možemo zaključiti kako je $W(t) > 0$, $\forall t \geq 0$, što znači da početni radioaktivni materijal nikada neće sasvim iščeznuti.

Graf funkcije $W(t) = 4e^{-t}$

Promotrimo sada odabrani trenutak t_0 i potražimo onaj trenutak $t_1 > t_0$ za koji će vrijediti $W(t_1) = \frac{1}{2}W(t_0)$. Razlika $t_1 - t_0$ se naziva vrijeme poluraspada. Dobivamo jednadžbu $W_0 e^{-\lambda t_1} = \frac{1}{2} W_0 e^{-\lambda t_0}$ odakle je $e^{\lambda(t_1 - t_0)} = 2$. Uzimanjem prirodnog logaritma dobivamo rješenje $t_1 - t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Odavde zaključujemo: vrijeme poluraspada $h = t_1 - t_0$ uopće ne ovisi o odabranom početnom trenutku t_0, ne ovisi ni o početnoj količini W_0 niti o zatečenoj količini $W(t_0)$ u trenutku t_0.

Poznato je, na primjer, da u slučaju radioaktivnog ugljika C^{14} imamo $h = 5730$ godina. U praksi, eksperimentom ili na neki drugi način se odredi h za tvar koju promatramo, a to nam onda omogućuje da za tu tvar odredimo konstantu λ.

Primjer 1.39 Logaritam.

Već smo u primjeru 1.35 spomenuli da je logaritam s bazom a definiran kao inverzna funkcija ekponencijalne funkcije s istom bazom a. Posebno, ovdje samo primijetimo da je $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ rastuća funkcija s nul-točkom $x_0 = 1$.

Graf prirodnog logaritma $f(x) = \ln(x)$

Primjer 1.40 Trigonometrijske funkcije.

Da bismo definirali trigonometrijske funkcije kao funkcije realne varijable, provodimo sljedeću konstrukciju:

Promotrimo jediničnu kružnicu s centrom u ishodištu pravokutnog koordinatnog sustava. Odmah uočimo da joj opseg iznosi 2π. Nadalje, uočimo tangentu na tu kružnicu koja prolazi točkom $(1, 0)$ i označimo taj pravac s p. Sad za realan broj x potražimo njegovu poziciju na pravcu p (pri čemu sad p shvaćamo kao brojevni pravac).

Namatanje pravca na kružnicu

Očito, broju x odgovara u tom smislu točka s koordinatama $(1, x)$. Sad pravac p namotamo na kružnicu (bez rastezanja). Recimo da pri tom namatanju broju x, tj. točki s koordinatama $(1, x)$, pripadne točka T na kružnici. Sada definiramo $\sin x$ i $\cos x$ kao ordinatu i apscisu točke T; dakle, $T = (\cos x, \sin x)$.

Smisao ove definicije je sljedeći: Neka je P ortogonalna projekcija točke T na x-os. Pogledajmo pravokutni trokut OPT i označimo s α kut kod vrha O. Ako je točka T u prvom kvadrantu, uočavamo da je $\sin x = \sin \alpha$, i $\cos x = \cos \alpha$. Slično, ako je točka T u bilo kojem od preostala tri kvadranta, lako uviđamo da su brojevi $\sin x$ i $\cos x$ do na predznak jednaki sinusu i kosinusu kuta α. Na primjer, ako je T u četvrtom kvadrantu, imat ćemo $\sin x = -\sin \alpha$, i $\cos x = \cos \alpha$.

Na ovaj način smo definirali vrijednosti trigonometrijskih funkcija sin i cos za svaki realan broj x; drugim riječima, dobili smo funkcije $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Graf funkcije $f(x) = \cos(x)$

Graf funkcije $f(x) = \cos(x)$

Neposredno iz konstrukcije nalazimo sljedeće činjenice:

$$\sin x,\, \cos x \in [-1, 1],\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\sin 0 = 0, \sin\frac{\pi}{2} = 1, \sin\pi = 0, \sin\frac{3\pi}{2} = -1, \sin 2\pi = 0,$$

$$\cos 0 = 1, \cos\frac{\pi}{2} = 0, \cos\pi = -1, \cos\frac{3\pi}{2} = 0, \cos 2\pi = 1,$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Osim toga, vrijedi i

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x,\ \cos(x + 2\pi) = \cos x,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

što pokazuje da su sin i cos periodične funkcije s periodom 2π.

Nadalje, sin je neparna, a cos parna funkcija. Može se također pokazati da vrijede adicione formule:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,\ \ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Na kraju uočimo još da vrijedi $\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ i $\{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Često se u praksi pojavljuju i kompozicije oblika $f(x) = a \sin kx$ i $g(x) = a \cos kx$, gdje su a i k realne konstante različite od 0. Primijetimo da obje ove funkcije poprimaju vrijednosti između $-a$ i a. Zato se broj $|a|$ zove amplituda tih funkcija. Također, lako se vidi da je $p = \frac{2\pi}{|k|}$ period obiju ovih funkcija, tj. p je najmanji pozitivan broj sa svojstvom $f(x + p = f(x)$ i $g(x + p) = g(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Funkcije tan i cot su izvedene: definira se $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ i $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Očito, prirodne domene ovih funkcija su skupovi $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, odnosno $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Graf funkcije $f(x) = \tan(x)$

Graf funkcije $f(x) = \cot(x)$

Zadaci: 2. domaća zadaća

1. Dokažite da je svaka rastuća (padajuća) funkcija injekcija.
2. Provjerite da je funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ padajuća.
3. Provjerite da je funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, bijekcija pa odredite formulu kojom je zadana inverzna funkcija.

4. Za svaku od navedenih funkcija odredite prirodnu domenu i područje vrijednosti: (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, (b) $f(x) = \frac{2x}{(x-2)(x+3)}$, (c) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$, (d) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

5. Za Monodovu funkciju brzine rasta $r(x) = \frac{5x}{1+x}$, $x \geq 0$, odredite postotak povećanja od $r(x)$ ako se x poveća s $0,1$ na $0,2$. Načinite istu komparaciju između vrijednosti $x = 10$ i $x = 20$.

6. Poluživot (= vrijeme poluraspada) ugljika C^{14} iznosi 5730 godina. Ako u trenutku $t = 0$ raspolažemo s 20 mikrograma ugljika C^{14} odredite koliko vremena treba proteći dok se količina ne reducira na 5 mikrograma.

7. Nakon 5 dana iznos neke radioaktivne supstance opadne na 37% početnog iznosa. Odredite vrijeme poluraspada te supstance.

8. Ribe rastu tokom čitavog života. Njihov rast se može opisati tzv. Bartalanffyjevom funkcijom $L(x) = L(1-e^{-kx})$ gdje je $L(x)$ duljina ribe u dobi x, a L i k su pozitivne konstante. Provjerite da je $L(x)$ zaista rastuća funkcija za $x \geq 0$. Nadalje, ako je $k = 1$, odredite dob x za koju će $L(x)$ iznositi 90% od L.

9. Funkcija oblika $f(x) = \frac{1}{1+e^{-(mx+b)}}$, pri čemu su m i b pozitivne konstante, naziva se logistička funkcija. Pokažite da je $\ln \frac{f(x)}{1-f(x)} = mx + b$.

10. Brzina enzimske reakcije se često opisuje tzv. Michaelis-Menten jednadžbom $v(x) = \frac{ax}{k+x}$, $x \geq 0$, gdje je x koncentracija supstrata, a maksimalna brzina reakcije i k pozitivna konstanta. Pokažite da je za $x = k$ brzina $v(k)$ dvostruko manja od maksimalne brzine a. Nadalje, pokažite: ako se x poveća 81 puta, brzina će se povećati od 10% maksimalne brzine a do 90% maksimalne brzine a, neovisno o iznosu konstante k.

11. Gustoća svjetla u jezeru opisana je jednadžbom $I(x) = I(0)e^{-\alpha x}$, gdje je $I(x)$ gustoća svjetla na dubini x, $I(0)$ konstanta (= gustoća svjetla na površini, tj. na dubini $x = 0$) i $\alpha > 0$ konstanta. Dubina x_0 na kojoj $I(x_0)$ iznosi 1% površinske gustoće $I(0)$ je važna za fotosintetičku aktivnost fitoplanktona (jer na većim dubinama takve aktivnosti nema). Relativno pouzdana metoda za određivanje kritične dubine x_0 jest tzv. metoda Secchijevog diska. To je disk bijele boje polumjera 10 cm. Ekperimentalno je utvrđeno: ako je d dubina na kojoj disk, tonući na dno, prestane biti vidljiv, onda je $x_0 = 2d$. Veličina d se naziva dubina diska.

    (a) Ako je u nekom jezeru dubina diska $d = 9$ m, odredite α iz formule $I(x) = I(0)e^{-\alpha x}$.

    (b) Ako je $\alpha = 0,473\ m^{-1}$, odredite dubinu diska.

1.3 Limes funkcije. Neprekidnost

U ovoj točki želimo proučiti pojam neprekidne funkcije. Intuitivno govoreći, realna funkcija realne varijable je neprekidna ako je njezin graf neprekinuta linija. Problem je u tome što ovakav opis nema precizan matematički sadržaj. Dodatno, nije ni dobro oslanjati se na graf funkcije jer ga ne poznajemo a priori.

Činjenica da je funkcija koju istražujemo neprekidna može biti vrlo korisna pri njenom proučavanju. Ako npr. (opet intuitivno) znamo da je dana funkcija neprekidna te ako znamo da postoje točke x_1, x_2 iz njezine domene takve da je $x_1 < x_2$, $f(x_1) < 0$ i $f(x_2) > 0$ onda graf te funkcije prolazi točkama $(x_1, f(x_1))$ (ispod x-osi) i $(x_2, f(x_2))$ (iznad x-osi). Ako je graf zaista neprekinuta krivulja koja spaja ove dvije točke, morat će negdje presjeći x-os. Dakle, negdje između točaka x_1 i x_2 mora postojati i nul-točka funkcije f.

I mnoge druge korisne informacije moći ćemo doznati ili izvesti iz neprekidnosti promatrane funkcije.

Htjeli bismo precizno definirati pojam neprekidne funkcije, ali tako da definicija koju uvedemo bude u suglasju s našim intuitivnim poimanjem neprekidnosti. Pokazuje se da je temeljni pojam ne globalna, nego lokalna neprekidnost, tj. neprekidnost funkcije u određenoj točki x_0. Za to najprije trebamo uvesti pojam limesa funkcije u točki x_0.

Limes funkcije je koncept koji govori o ponašanju funkcije *u okolini* dane točke.

Definicija 1.41 *Neka je funkcija f definirana u okolini točke x_0. Kažemo da je broj $L \in \mathbb{R}$ limes funkcije f u točki x_0 i pišemo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ako vrijedi*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ tako da } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Napomena 1.42 (a) Opisno govoreći definicija glasi: ako promatramo točke x koje su sve bliže i bliže točki x_0, funkcijske vrijednosti $f(x)$ približavaju se broju L. Mjera te "približnosti" je broj ε. Činjenica da je $|f(x) - L| < \varepsilon$ znači da je $f(x)$ udaljen od L za manje od ε, tj. $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Definicija sad kaže: ma koliko malen zadali ε, postoji neka δ-okolina točke x_0 (dakle, interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$) takva da za sve $x \neq x_0$ iz te okoline vrijedi $f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

(b) Limes funkcije u danoj točki može i ne mora postojati. Naglasimo da je limes, ako postoji, realan broj.

(c) Uočimo da u definiciji limesa funkcije f u točki x_0 sama točka x_0 i funkcijska vrijednost $f(x_0)$ ne igraju nikakavu ulogu. Štoviše, funkcija čak niti ne treba biti definirana u točki x_0.

(d) Formulacija da je funkcija f definirana u nekoj okolini točke x_0 znači da je neki skup oblika $\{x : 0 < |x - x_0| < c\}$, $c > 0$, sadržan u domeni od f. Takav zahtjev je sasvim prirodan ako želimo istražiti ponašanje funkcije f u okolini točke x_0.

Ponekad ima smisla promatrati analognu definiciju i ako je x_0 rubna točka domene funkcije (kao što je to $x_0 = 0$ za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$). U takvim slučajevima govorimo o jednostranom limesu funkcije (jer se točki x_0 možemo približavati, idući po domeni funkcije, samo s jedne strane).

Primjer 1.43 (a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$.

Da ovo pokažemo, odaberimo proizvoljan $\varepsilon>0$. Tražimo $\delta>0$ takav da $0<|x-1|<\delta$ povlači $|f(x)-5|=|2x+3-5|=|2x-2|=2|x-1|<\varepsilon$. Očito, ako uzmemo $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, imat ćemo $2|x-1|<2\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Vidimo da smo δ odabrali u ovisnosti o ε. Tako je i inače. Što manji ε zadamo, tim je stroži zahtjev na δ (tj. prirodno je da će točke iz sasvim uske okoline oko x_0 - dakle, za vrlo mali δ - moći ispuniti zahtjev $f(x)\in(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$).

Uočimo i to da će, kad nađemo prikladan δ za zadani ε, i svaki drugi broj δ' takav da je $0<\delta'<\delta$ biti dobar za isti taj ε. No, to je nebitno. Definicija traži da se za svaki dani $\varepsilon>0$ nađe bar jedan odgovarajući δ.

(b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

Lako se vidi: ovdje je za proizvoljan $\varepsilon>0$ prikladno uzeti $\delta=\varepsilon$. Za ovako odabran δ zahtjev iz definicije će biti ispunjen. Provjerite!

Primijetimo da u ovom primjeru funkcija nije bila definirana u promatranoj točki $x_0=2$. Kako smo već naveli, ta činjenica je nevažna za istraživanje limesa funkcije.

(c) Neka je $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$. Tvrdimo da $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ne postoji.

Prije svega, ovo je intuitivno jasno. Ako se točki $x_0=2$ približavamo s lijeve strane funkcijske vrijednosti će se računati po formuli $f(x)=x+1$ i zato će težiti k vrijednosti 3. Ako se točki $x_0=2$ približavamo s desne strane, jasno je da ćemo funkcijske vrijednosti računati po formuli $f(x)=2x$, a te vrijednosti očito teže k broju 4.

Jasno je da su brojevi $L=4$ i $L=3$ jedini kandidati za $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$. Pokažimo najprije da broj 3 ne može biti limes. Uzmimo $\varepsilon=\frac{1}{2}$ i odaberimo proizvoljan $\delta>0$ i točke $x\in(2,2+\delta)$ (to su točke iz δ-okoline naše točke $x_0=2$, ali s njezine desne strane). Za takve točke x, neovisno o tome kakav δ smo odabrali, vrijedi $|f(x)-3|=|2x-3|=2x-3>4-3=1$. Dakle, kako god malen δ odabrali, $0<|x-2|<\delta$ ne povlači da je $|f(x)-3|<\varepsilon=\frac{1}{2}$.

Sasvim analogno se vidi da niti $L=4$ ne može biti limes ove funkcije u točki 2.

(d) Promotrimo funkciju $f(x)=\sin\frac{2\pi}{x}$, $x\neq 0$. Jasno je da $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ ne postoji. (Zaista, uočite da za $n\in\mathbb{N}$ i $x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$ imamo $\frac{2\pi}{x}\in(2n\pi,2(n+1)\pi)$ pa funkcija za tako odabrane vrijednosti varijable x poprimi sve vrijednosti između -1 i 1.)

S druge strane, mogli smo doći u napast "testirati" ponašanje ove funkcije u okolini točke 0 kalkulatorom. Tek kao test, mogli bismo poželjeti izračunati $f(x)$ ako je, npr. $x=10^{-3}$, $x=10^{-5}$, $x=10^{-10}$, itd. U sva tri navedena slučaja kalkulator bi pokazao $f(x)=0$ što bi nas moglo navesti na pomisao da limes ove funkcije ipak postoji te da iznosi 0.

Primjer pokazuje da limes funkcije ne možemo pouzdano utvrditi (čak niti naslutiti) služeći se kalkulatorom. Tek ako limes postoji, njegovu vrijednost koju smo utvrdili teorijskim putem (dakle, služeći se definicijom i teoremima koje ćemo navesti i dokazati) možemo "provjeriti" (premda to nije provjera u pravom smislu riječi) računajući vrijednost $f(x)$ u točkama x bliskima točki x_0.

Teorem 1.44 *Ako postoji,* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ *je jedinstven.*

Dokaz: Pretpostavimo da imamo dva različita limesa: L_1 i L_2. Odaberimo $\varepsilon = \frac{1}{4}|L_2 - L_1| > 0$. Za taj ε možemo naći $\delta_1 > 0$ takav da $0 < |x - x_0| < \delta_1$ povlači $|f(x) - L_1| < \varepsilon$. Postoji također $\delta_2 > 0$ za koji $0 < |x - x_0| < \delta_2$ povlači $|f(x) - L_2| < \varepsilon$.

Ako sada odaberemo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ i $0 < |x - x_0| < \delta$, dobivamo $|L_2 - L_1| = |(f(x) - L_1) + (L_2 - f(x))| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\varepsilon = \frac{1}{2}|L_2 - L_1|$, a to je očito nemoguće. □

Sljedeći teorem pokazuje da za limese zbroja, razlike, produkta i kvocijenta funkcija u točki vrijede tvrdnje analogne onima za limese nizova.

Teorem 1.45 *Neka je* $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *i* $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$. *Tada vrijedi:*

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$;
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L - M$;
3. $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = LM$;
4. *ako je* $g(x) \neq 0$ *za sve* x *iz neke okoline točke* x_0 *i ako je* $M \neq 0$, *onda je i* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Dokaz: Dokažimo tvrdnju o limesu produkta.

Za zadani ε zbog pretpostavke na f i g možemo odabrati pozitivan δ takav da za svaki x za koji je $0 < |x - x_0| < \delta$ veličine $|f(x) - L|$ i $|g(x) - M|$ budu po volji male.

Sad primijetimo da vrijedi

$$|f(x)g(x) - LM| = |f(x)g(x) - Lg(x) + Lg(x) - LM| \leq |f(x)g(x) - Lg(x)| + |Lg(x) - LM|$$
$$= |f(x) - L||g(x)| + |L||g(x) - M| \leq |f(x) - L||g(x) - M + M| + |L||g(x) - M|$$
$$\leq |f(x) - L|(|g(x) - M| + |M|) + |L||g(x) - M|.$$

Odavde je jasno: jer su $|L|$ i $|M|$ konstante (dakle, neovisni o x), i $|f(x)g(x) - LM|$ će biti manje od ε čim smo postigli da brojevi $|f(x) - L|$ i $|g(x) - M|$ budu dovoljno mali.

Ostale tvrdnje dokazuju se analogno. □

Primjer 1.46 Uočimo da je $\lim_{x \to x_0} c = c$ za proizvoljnu konstantu c, a također i $\lim_{x \to x_0} x = x_0$; oboje za proizvoljnu točku x_0. Obje tvrdnje se vide neposrednim pozivanjem na definiciju. Koristeći ove dvije tvrdnje i prethodni teorem sada lako zaključujemo da vrijedi $\lim_{x \to 5} \dfrac{x + 2}{2x - 3} = 1$.

Kako smo već napomenuli, limes funkcije je realan broj. Ponekad se događa da funkcija u okolini točke x_0 postaje beskonačno velika po apsolutnoj vrijednosti. Striktno govoreći, limes funkcije u takvoj točki x_0 ne postoji, no i ovakvo ponašanje pruža korisnu informaciju o funkciji (te zato ima svoje posebno ime).

Definicija 1.47 *(Limes u širem smislu ili beskonačni limes.) Kažemo da je limes funkcije f u točki x_0 beskonačno (odnosno, minus beskonačno) i pišemo $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (odnosno, $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$) ako*

$$\forall M > 0\, \exists \delta > 0 \text{ tako da } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M \ \ (\text{odnosno,} f(x) < -M).$$

Još se kaže da tada f neograničeno raste (pada) u okolini točke x_0.

Analogno, možemo promatrati i što se zbiva s funkcijom kad varijabla x postaje neograničeno velika ili neograničeno mala (u tom slučaju govorimo da x teži u ∞, odnosno u $-\infty$). Naravno, želimo li istražiti ponašanje funkcije kad varijabla x teži u ∞, nužno je da funkcija bude definirana za sve takve x.

Definicija 1.48 *(Limes u beskonačnosti.)*
$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ *ako* $\forall \varepsilon > 0\, \exists m > 0$ *tako da* $x > m \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *ako* $\forall M > 0\, \exists m > 0$ *tako da* $x > m \Rightarrow f(x) > M$.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ *ako* $\forall M > 0\, \exists m > 0$ *tako da* $x > m \Rightarrow f(x) < -M$.
Analogno se definiraju limes kad $x \to -\infty$ kao i limesi u širem smislu kad $x \to -\infty$.

Primjer 1.49 (a) $\lim_{x\to\infty} \sin x$ ne postoji, čak ni u širem smislu.
(b) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.
(c) $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$.
Provjeru svih navedenih tvrdnji ostavljamo za vježbu.

Teorem 1.50 *(O sendviču.) Neka za sve $x \neq x_0$ iz nekog intervala koji sadrži točku x_0 vrijedi $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. Ako vrijedi $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$ i $\lim_{x\to x_0} g(x) = L$, onda je i $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.*

Dokaz: Zadajmo $\varepsilon > 0$ i nađimo $\delta > 0$ takav da za $0 < |x - x_0| < \delta$ vrijedi $|h(x) - L| < \varepsilon$ i $|g(x) - L| < \varepsilon$. Za svaki takav x imamo $h(x) - L \leq f(x) - L \leq g(x) - L$. Ako je $f(x) - L \geq 0$ onda je $|f(x) - L| \leq |g(x) - L|$. Ako je $f(x) - L < 0$ onda je $|f(x) - L| \leq |h(x) - L|$. U oba slučaja zaključujemo $|f(x) - L| < \varepsilon$. □

Primjer 1.51 $\lim_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$. Naime, očito vrijedi $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$ što nam omogućuje da direktno primijenimo prethodni teorem.

Razmatranja o limesu funkcije završit ćemo s tri primjera koji će se pokazati važnima pri računanju derivacija. Sva tri rezultata navodimo bez dokaza.

Primjer 1.52 (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$; (c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

Sad smo spremni za definiciju neprekidnosti. Pogledajmo najprije dva primjera: $f(x)=x^2$ i $g(x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 2\\ 5, & x=2\end{cases}$. Evidentno je da vrijedi $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4$ kao i $\lim\limits_{x\to 2}g(x)=4$. Funkcija f je neprekidna (to nam govori naša intuicija i poznavanje grafa kvadratne parabole), dok funkcija g ima prekid (graf joj se prekida) u točki $x_0=2$. S ponašanjem obiju funkcija u okolini točke $x_0=2$ sve je u redu (jer obje imaju limes kad $x\to 2$); problem očito leži u vrijednosti $g(2)$. Funkcijska vrijednost $g(2)$ različita je od limesa funkcije g u točki 2 i u tome je bit diskontinuiteta ove funkcije.

Definicija 1.53 *Neka je funkcija f definirana u nekoj okolini točke x_0 i u samoj točki x_0. Kaže se da je f neprekidna u točki x_0 ako postoji $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ te ako vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.*

Kaže se da je funkcija neprekidna na skupu S (sadržanom u njezinoj domeni) ako je neprekidna u svakoj točki skupa S.

Napomena 1.54 (a) U definiciji limesa funkcije u točki x_0 vrijednost funkcije u samoj točki x_0 je bila nebitna (i čak nije trebala ni postojati). Bit definicije neprekidnosti u x_0 jest u tome da se vrijednost $f(x_0)$ podudara s limesom u x_0.

(b) Ako limes funkcije u točki x_0 postoji samo u širem smislu, nema govora o neprekidnosti (jer činjenica da je f definirana u x_0 znači da je $f(x_0)$ realan broj, što simboli ∞ i $-\infty$ nisu). Usporedite ovu činjenicu s grafovima funkcija $f(x)=\frac{1}{x^2}$ i $g(x)=\frac{1}{x}$ i limesima tih funkcija u točki $x_0=0$.

Primjer 1.55 Svaka linearna funkcija $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$, je neprekidna u svakoj točki (dakle, na cijelom skupu $\mathbb{R}$).

Odaberimo $x_0\in\mathbb{R}$ po volji. Tvrdi se, dakle, da vrijedi $\lim\limits_{x\to x_0}(ax+b)=ax_0+b$. Da to pokažemo, trebamo za proizvoljan $\varepsilon>0$ naći $\delta>0$ sa svojstvom $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow |ax+b-(ax_0+b)|<\varepsilon$. Međutim, kako je $|ax+b-(ax_0+b)|=|a||x-x_0|$, vidimo da je prikladno uzeti $\delta=\frac{\varepsilon}{|a|}$.

Prethodni račun izveli smo pod pretpostavkom da je $a\neq 0$. Jasno, ako je $a=0$, funkcija f je zapravo konstanta $f(x)=b$ pa je njena neprekidnost još očitija.

Primjer 1.56 Funkcija $f(x)=x^2$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Fiksirajmo točku x_0 i odaberimo proizvoljan $\varepsilon>0$. Trebamo pronaći $\delta>0$ takav da vrijedi $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow |x^2-x_0^2|<\varepsilon$. Lako se provjeri da je dostatno odabrati $\delta<\min\{1,\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\}$. Detalje izostavljamo (upotpunite ih za vježbu), a neprekidnost ove funkcije pokazat ćemo ubrzo i na još jedan način.

Napomena 1.57 Svaki polinom je neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Svaka racionalna funkcija je neprekidna u svakoj točki u kojoj je definirana. Funkcije $f(x) = x^a$, $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, $f(x) = \cot x$ su neprekidne u svim točkama svojih prirodnih domena.

Sve navedene tvrdnje mogu se provjeriti koristeći definiciju neprekidnosti postupkom sličnim onome u prethodna dva primjera. Razumljivo, tehnički detalji su ovdje kompliciraniji. Ove tvrdnje ovdje nećemo dokazivati (ali istaknimo: neprekidnost svih navedenih funkcija u daljnjem ćemo podrazumijevati).

Lema 1.58 *Neka je f neprekidna u točki x_0 i neka je $f(x_0) \neq 0$. Tada postoji $\delta > 0$ takav da je $f(x) \neq 0$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$; štoviše, $f(x)$ je istog predznaka na tom intervalu kao i $f(x_0)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(x_0) > 0$. Za $\varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$ odaberimo $\delta > 0$ takav da $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = \frac{1}{2} f(x_0)$. Drugim riječima, imamo $x \in (x - x_0, x + x_0) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \frac{1}{2} f(x_0), f(x_0) + \frac{1}{2} f(x_0)) = (\frac{1}{2} f(x_0), \frac{3}{2} f(x_0))$.

Ako je $f(x_0) < 0$ uvedemo funkciju $g(x) = -f(x)$ i primijenimo upravo dokazanu tvrdnju. □

Teorem 1.59 *Neka su funkcije f i g neprekidne u točki x_0. Tada su u točki x_0 neprekidne i funkcije $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ i, pod uvjetom da je $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.*

Dokaz: Dokažimo prvu tvrdnju. Odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$. Koristeći neprekidnost funkcija f i g u točki x_0, nađimo $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$ za koje vrijedi $0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ i $0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Uzmimo sada $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Ako je $0 < |x - x_0| < \delta$ slijedi $|f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

Ostale tri tvrdnje se dokazuju slično. Pri proučavanju kvocijenta $\frac{f(x)}{g(x)}$ treba primijetiti da zbog pretpostavke $g(x_0) \neq 0$ na temelju prethodne leme zajljučujemo kako je i $g(x) \neq 0$ za sve x iz neke okoline točke x_0. □

Primjer 1.60 (a) Uočimo da neprekidnost identičnog preslikavanja $f(x) = x$ zajedno s tvrdnjama prethodnog teorema povlači kako su svaki polinom i svaka racionalna funkcija neprekidne na svojim prirodnim domenama.

(b) Funkcija $f(x) = \frac{x^3 - 2e^x + \sin x}{e^x}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$. I ova tvrdnja slijedi pozivanjem na prethodni teorem i napomenu ispred njega.

I kompozicija funkcija je operacija koja se dobro ponaša prema limesu funkcije.

Teorem 1.61 *Neka su funkcije f i g takve da je kompozicija gf definirana, neka je f neprekidna u točki x_0 te neka je g neprekidna u točki $f(x_0)$. Tada je i kompozicija gf neprekidna u x_0.*

Dokaz: Za $\varepsilon > 0$ nađimo $\varepsilon' > 0$ takav da vrijedi $|y - f(x_0)| < \varepsilon' \Rightarrow |g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.

Nadalje, za taj $\varepsilon' > 0$ nađimo $\delta > 0$ takav da $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon'$. Sada je jasno da $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$. □

Primjer 1.62 Primjenom prethodnog teorema odmah zaključujemo:

(a) Funkcija $f(x) = a\sin(kx)$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

(b) Logistička funkcija $f(x) = \frac{1}{1+e^{-(mx+b)}}$ je neprekidna na $\mathbb{R}$.

Sad smo u mogućnosti dokazati teorem kojeg smo na intuitivnoj razini već opisali na početku ove točke.

Teorem 1.63 *(Bolzano) Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ te neka vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$ imaju suprotne predznake. Tada postoji točka $c \in (a, b)$ takva da je $f(c) = 0$.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Neka je $S = \{x \in [a, b] : f(x) \leq 0\}$. Jasno je da je skup S neprazan i odozgo omeđen. Neka je $c = \sup S$. Jasno je da je $c \in [a, b]$. Pokazat ćemo da je $f(c) = 0$ tako što ćemo se uvjeriti da su opcije $f(c) > 0$ i $f(c) < 0$ nemoguće.

Pretpostavimo prvo da je $f(c) > 0$. Prema prethodnoj lemi, postoji $\delta > 0$ takav da je $f(x) > 0$, $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$. Kako je $c - \delta$ manji od $c = \sup S$, postoji $y \in S$ za kojeg vrijedi $y > c - \delta$. Kako je također $y \leq c$, imamo $y \in (c - \delta, c + \delta)$. Odavde je $f(y) > 0$. No, to je u kontradikciji s $y \in S$.

Sad uzmimo da je $f(c) < 0$. Opet na temelju leme dolazimo do broja $\delta > 0$ takvog da je $f(x) < 0$, $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$. Posebno, $f(c + \frac{\delta}{2}) < 0$, pa je $c + \frac{\delta}{2} \in S$. No, to je nemoguće jer c je supremum skupa S, a vrijedi $c < c + \frac{\delta}{2} \in S$.

Time je teorem u ovom slučaju dokazan. Ako je $f(a) > 0$ i $f(b) < 0$, uvedemo funkciju $g(x) = -f(x)$ i primijenimo upravo dokazanu tvrdnju. □

Teorem 1.64 *Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$, te neka za točke $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \neq f(x_2)$. Tada za svaki realan broj k između $f(x_1)$ i $f(x_2)$ postoji točka $c \in [x_1, x_2]$ za koju vrijedi $f(c) = k$.*

Dokaz: Odaberimo proizvoljan k između $f(x_1)$ i $f(x_2)$ i uvedimo funkciju $g(x) = f(x) - k$. Očito, g na segmentu $[x_1, x_2]$ zadovoljava pretpostavke Bolzanovog teorema pa zato postoji $c \in [x_1, x_2]$ tako da je $g(c) = 0$, tj. $f(c) = k$. □

Navedimo na kraju, bez dokaza, i teorem koji opisuje neprekidne injektivne funkcije realne varijable. U nastavku će se taj rezultat pokazati vrlo važnim pa je dokaz, radi potpunosti, uvršten u napomene i komentare na kraju ovog poglavlja.

Teorem 1.65 *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (konačan ili beskonačan, otvoren, poluzatvoren, ili zatvoren) i $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna injekcija. Tada vrijedi:*

1. *f je monotona (rastuća ili padajuća) funkcija;*
2. *$f(I) = J$ je također interval i to otvoren (zatvoren) ako je I otvoren (zatvoren);*
3. *funkcija $f^{-1} : J \to I$ je neprekidna na J.*

Zadaci: 3. domaća zadaća

1. Dokažite da je $\lim\limits_{x\to 5}(2x-1) = 9$.
2. Izračunajte $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.
3. Za $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$ pokažite da ne postoji $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
4. Funkcija sign je definirana formulom $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$. Ispitajte postoji li $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sign}(x)$? Obrazložite.
5. Pokažite da je $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|x^2-1|} = \infty$.
6. Koristeći činjenicu da je $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ pokažite da vrijedi $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-2x} = 0$.
7. Pokažite da je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x^2+1} = 0$.
8. Pokažite da je $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$.
9. I za limese u beskonačnosti vrijede sljedeća pravila: ako za funkcije f i g vrijedi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ i $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = M \in \mathbb{R}$ onda je $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+g(x)) = L+M$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = L-M$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)g(x)) = LM$ i, uz uvjet da je $M \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

   Koristeći ove činjenice izračunajte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, ako je

   (a) $f(x) = \frac{ax}{k+x}$, gdje su a i k pozitivne konstante;

   (b) f opća logistička funkcija: $f(x) = \frac{K}{1+ce^{-(mx+b)}}$, pri čemu su K, c, m pozitivne, a b proizvoljna konstanta. Uputa: uočite da je $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-(mx+b)} = 0$.
10. Pokažite da funkcija $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2}, & x \neq 2 \\ 5, & x = 2 \end{cases}$ ima prekid u točki $x_0 = 2$.

11. Pokažite pomoću Bolzanovog teorema da funkcija $f(x) = x^3 - 2x + 3$ ima nul-točku u intervalu $(-3, -1)$.

12. Koristeći Bolzanov teorem pokažite da jednadžba $\cos x = x$ ima rješenje u intervalu $(0, 1)$.

13. Jednadžba $v(x) = 68e^{-\frac{20}{x}}$ opisuje visinu drveta u ovisnosti o starosti $x \geq 0$. Odredite $\lim\limits_{x\to\infty} v(x)$.

14. Pretpostavimo da organizam reagira na neki stimulans tek kad količina unijetog stimulansa prijeđe izvjesni prag. Pretpostavimo da je količina unijetog stimulansa opisana funkcijom $f(x) = \sin(\pi x)$, gdje je $x \geq 0$ vrijeme. Eksperimentom je utvrđeno da organizam pokazuje reakciju samo kad je $f(x) \geq \frac{1}{2}$. Neka je $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ima reakcije u } x \\ 0, & \text{nema reakcije u } x \end{cases}$. Je li funkcija g neprekidna?

Napomene i komentari

1.

Ključnu ulogu u dokazu teorema 1.65 igra još jedan od fundamentalnih rezultata o neprekidnim funkcijama: svaka neprekidna funkcija na segmentu postiže svoj minimum i maksimum. Preciznije: ako je g neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ onda postoje točke $x_1, x_2 \in [a, b]$ za koje vrijedi $g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2)$, $\forall x \in [a, b]$. Drugim riječima, brojevi $f(x_1) = m$ i $f(x_2) = M$ su minimalna i maksimalna vrijednost koje funkcija g postiže na promatranom segmentu. Ova tvrdnja je sadržaj teorema 2.34 i bit će dokazana u dodatku na kraju drugog poglavlja. Mi ćemo je koristiti odmah u dokazu koji slijedi.

Dokaz teorema 1.65.

(1) Pretpostavimo da postoje točke $x, y \in I$, $x < y$, za koje vrijedi $f(x) < f(y)$. Pokazat ćemo da je tada f rastuća na I.

Prvo pokažimo da za svaku točku $z \in (x, y)$ vrijedi $f(x) < f(z)$. Zaista, u suprotnom bismo imali $f(z) < f(x)$ (zbog injektivnosti jednakost je nemoguća). To znači da za minimum i maksimum m i M neprekidne funkcije f na segmentu $[z, y]$ imamo $m \leq f(z) < f(x) < f(y) \leq M$, te stoga, prema teoremu 1.64, postoji točka $t \in (z, y)$ za koju je $f(t) = f(x)$. To je kontradikcija s injektivnošću funkcije f.

Na potpuno analogan način pokaže se i da za sve $z \in (x, y)$ vrijedi $f(z) < f(y)$ (naime, $f(z) > f(y)$ bi vodilo na kotradikciju s teoremom 1.64 primijenjenim na funkciju f i segment $[x, z]$).

Time smo pokazali da za sve $z \in [x, y]$ vrijedi $f(x) < f(z) < f(y)$. Odavde zaključujemo da je f rastuća na $[x, y]$. Naime, $w, z \in (x, y)$, $w < z$, $f(w) > f(z)$, je nemoguće - to pokazuje prethodna diskusija ako je sada ponovo primijenimo s točkom w u ulozi točke x.

Sad se analognim rezoniranjem pokaže da je f rastuća na cijelom skupu $[x, \infty) \cap I$ (dakle, i desno od točke y), kao i na $(-\infty, x] \cap I$; dakle na cijelom intervalu I.

Preostalo je ramotriti slučaj kad ne postoje točke $x, y \in I$ takve da je $x < y$ i $f(x) < f(y)$. No to upravo znači da za svake dvije točke $x, y \in I$ takve da je $x < y$ vrijedi $f(x) > f(y)$; drugim riječima, f je padajuća na I.

(2) Pretpostavimo da je f rastuća. Neka je $x, y \in I$, $x < y$. Funkcija f je neprekidna na segmentu $[x, y]$ pa poprima sve međuvrijednosti između svog minimuma na tom segmentu (što je $f(x)$) i maksimuma na tom segmentu (što je $f(y)$). Jednako lako se argumentira da je interval $f(I) = J$ otvoren na lijevom (desnom) kraju ako i samo je I otvoren na lijevom (desnom) kraju.

(3) Iz prethodnih tvrdnji i pretpostavki slijedi da je $f^{-1} : J \to I$ monotona bijekcija. Pretpostavimo da f^{-1} ima prekid u nekoj točki $f(x_0)$ iz svoje domene J. To znači da $f^{-1}(f(x_0)) = x_0$ nije limes funkcije f^{-1} u točki $f(x_0)$. Eksplicitno, to znači: postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točka $f(x_n) \in J$ takva da je $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{1}{n}$ i $|x_n - x_0| \geq \varepsilon$.

Pogledajmo segment $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ i pretpostavimo, konkretnosti radi, da je f rastuća. Tada je $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$. Kako su obje nejednakosti stroge, možemo naći broj $m > 0$ takav da je $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) - m < f(x_0) < f(x_0) + m < f(x_0 + \varepsilon)$. Uočimo da zbog $|x_n - x_0| \geq \varepsilon$ imamo $x_n \notin (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Zato je ili $x_n \leq x_0 - \varepsilon$ ili $x_n \geq x_0 + \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Jer je funkcija f rastuća, to znači da je $f(x_n) \leq f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) - m$ ili $f(x_0) + m < f(x_0 + \varepsilon) \leq f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$. U svakom slučaju je $|f(x_n) - f(x_0)| > m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. To je evidentno u kontradikciji s $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2.

U definiciji 1.53 uveli smo pojam neprekidnosti funkcije f u točki x_0 ako je f definirana u nekoj okolini točke x_0 (tj. ako je x_0 unutrašnja točka domene funkcije f).

Pojam neprekidnosti funkcije može se uvesti i u rubnim točkama domene (kao, na primjer, za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ i točku $x_0 = 0$). I u ovoj situaciji definicija je ista: kaže se da je f neprekidna u rubnoj točki svoje domene x_0 ako postoji $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ te ako vrijedi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, pri čemu ovdje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ predstavlja jednostrani limes spomenut u napomeni 1.42.

Sada nije teško pokazati da je funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ neprekidna u točki 0. Jer je $\sqrt{0} = 0$, to znači $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

Zaista; odaberimo proizvoljan $\varepsilon > 0$ i pogledajmo $\delta = \varepsilon^2$. Ako je sada $0 < x < \delta$ onda je $0 < \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \varepsilon$.

3.

Neprekidnost funkcije u točki može se opisati i pomoću konvergencije nizova. Može se pokazati da vrijedi sljedeća karakterizacija neprekidnosti: funkcija f je neprekidna u točki x_0 ako i samo ako za svaki niz (x_n) iz domene od f koji konvergira k x_0 vrijedi $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Dokaz slijedi neposrednim pozivanjem na obje definicije pa ga ostavljamo za vježbu.

2 Derivacija

2.1 Problem brzine. Problem tangente. Pojam derivacije

Do sada smo spomenuli različite modele rasta. Svi su bili opisani različitim funkcijama $B(t)$, gdje varijabla t označava vrijeme, a $B(t)$ označava broj jedinki u promatranoj populaciji u trenutku t. U praksi je uvijek važno znati prirast populacije, štoviše, brzinu rasta.

U vremenskom intervalu (t_1, t_2) definiramo

$$\text{prosječna brzina rasta} = \frac{\text{prirast populacije}}{\text{duljina vremenskog intervala}} = \frac{B(t_2) - B(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Zamislimo da smo posebno zainteresirani za brzinu rasta u određenom trenutku t_0. Prirodno je onda gledati interval $(t_0 - a, t_0 + a)$ za neki $a > 0$ i omjer $\frac{B(t_0+h)-B(t_0)}{h}$ pri čemu je $|h|$ dovoljno malen da bude $t_0 + h \in (t_0 - a, t_0 + a)$.

Očito, na dobiveni podatak utječe, osim $B(t_0)$, i $B(t_0 + h)$. Želimo li imati informaciju koja će još bolje opisati proces u trenutku t_0, jasno je da h treba odabrati tako da $|h|$ bude čim manji. Proizlazi da ima smisla definirati:

$$\text{trenutna brzina rasta u trenutku } t_0 = \lim_{h\to 0} \frac{B(t_0 + h) - B(t_0)}{h},$$

(pod uvjetom da navedeni limes postoji).

Identično razmatranje možemo provesti i ako želimo proučiti brzinu objekta koji se kreće. Ako $f(t)$ označava prijeđeni put kao funkciju vremena, onda je $\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$ prosječna brzina u intervalu $(t_0, t_0 + h)$ (odnosno, ako je $h < 0$, u intervalu $(t_0 + h, t_0)$), a

$$v(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

(ako limes postoji) predstavlja trenutnu brzinu u trenutku t_0.

Promotrimo sada realnu funkciju realne varijable f, njezin graf i točku $(x_0, f(x_0))$ na grafu. Željeli bismo odrediti jednadžbu tangente[3] na graf upravo u toj točki.

Tangenta i sekanta: $f(x) = x^2 - 3x + 3$, $g(x) = 2x - 1$, $h(x) = 3x - 3$

Problem se svodi na nalaženje koeficijenta smjera tangente. Pogledajmo točku $x_0 + h$ i pripadajuću točku $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ na grafu funkcije. Koeficijent smjera sekante na graf koja prolazi uočenim točkama $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ iznosi $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Ideja je sada učiniti $|h|$ sve manjim (uočimo da h može biti i pozitivan i negativan), promatrati što se događa sa sekantom i njezinim koeficijentom smjera kad $h \to 0$. Identičnim rezoniranjem

[3] Nije sasvim lagano precizno definirati pojam tangente. Ovdje tangentu shvaćamo intuitivno kao pravac koji dodiruje krivulju u danoj točki.

kao u prethodna dva slučaja zaključujemo da će koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ iznositi

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(dakako, i ovdje pod uvjetom da navedeni limes postoji).

Provedena razmatranja dovode nas do sljedeće definicije.

Definicija 2.1 *Neka je interval (a, b) sadržan u domeni funkcije f, neka je $x_0 \in (a, b)$. Derivacija funkcije f u točki x_0 definira se kao*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

uz uvjet da navedeni limes postoji. U tom slučaju (kad limes postoji) kažemo da je funkcija f derivabilna u točki x_0.

Ako je funkcija derivabilna u svakoj točki intervala (a, b) kaže se da je derivabilna na intervalu (a, b).

Ponekad se umjesto derivabilna funkcija koristi termin diferencijabilna funkcija. Zbog toga se dio matematičke analize koji se bavi derivacijama i njihovim primjenama naziva diferencijalni račun.

Napomena 2.2 (a) Istaknimo da je i derivacija, poput neprekidnosti, lokalni pojam. Osnovni koncept je "derivacija funkcije u točki" i to je, ako postoji, realan broj. Primijetimo da nam ovdje ne pomaže ako navedeni limes možda postoji u širem smislu ($+\infty$ ili $-\infty$).

(b) Pojam derivacije definiran je pomoću pojma limesa funkcije. Za zadanu funkciju f i danu točku x_0 definira se nova funkcija u varijabli h, $g(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, pri čemu je $h \in (-p, p)$, a broj p smo odabrali tako malenim da za sve h iz $(-p, p)$ vrijedi $x_0 + h \in (a, b)$.

Sada je, po definiciji, $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} g(h)$.

Primijetimo da funkcija g nije ni definirana u točki u kojoj gledamo njezin limes, $h = 0$. No, kao što smo već istaknuli, to nema značaja za definiciju i računanje limesa.

Posebno, kako je limes funkcije, ukoliko postoji, jedinstven, slijedi da je i $f'(x_0)$, pod uvjetom da postoji jedinstveno određen broj.

(c) Često se označi $x_0 + h = x$ pa je onda $h = x - x_0$. Nadalje, kad $h \to 0$ vidimo da $x \to x_0$. To pokazuje da definiciju derivacije možemo pisati i u obliku

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

(d) Ako je f derivabilna u točki x_0 onda prethodna analiza pokazuje da je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ upravo $f'(x_0)$. Odavde zaključujemo da jednadžba te tangente glasi:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Primjer 2.3 (a) Konstanta $f(x)=c$ je derivabilna u svakoj točki (dakle, derivabilna na $\mathbb{R}$) i vrijedi $f'(x_0)=0$.

Zaista, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$.

(b) Linearna funkcija $f(x)=ax+b$ je derivabilna na $\mathbb{R}$ i za svaki $x_0\in\mathbb{R}$ vrijedi $f'(x_0)=a$.

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}a=a$.

(c) Kvadratna parabola $f(x)=x^2$ je derivabilna na $\mathbb{R}$ i vrijedi $f'(x_0)=2x_0$, $\forall x_0\in\mathbb{R}$.

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0$.

Primjer 2.4 (a) $f(x)=|x|$ nije derivabilna u $x_0=0$.

Zaista, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$, a već smo vidjeli da ovaj limes ne postoji (kad je $x>0$ i $x\to 0$ navedeni razlomak teži u 1, dok za $x<0$, $x\to 0$ razlomak teži u -1).

(b) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ nije derivabilna u $x_0=0$.

Zaista, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=+\infty$.

Teorem 2.5 *Neka je f derivabilna u točki x_0. Tada je f i neprekidna u x_0.*

Dokaz: Promotrimo funkciju w definiranu s

$$w(x)=\begin{cases}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0), & x\neq x_0\\ 0, & x=x_0\end{cases}.$$

Po pretpostavci, f je derivabilna u x_0. Primijetimo da to upravo znači da je funkcija w neprekidna u x_0. Naime, $w(x_0)=0$, a s druge strane $\lim\limits_{x\to x_0}w(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0))=$ (prema teoremu 1.45) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim\limits_{x\to x_0}f'(x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$.

Sada primijetimo da vrijedi $f(x)=f(x_0)+(f'(x_0)+w(x))(x-x_0)$, za sve x iz domene funkcije f. Funkcija s desne strane jednakosti je neprekidna u točki x_0, jer je nastala zbrajanjem i množenjem funkcija koje su neprekidne u x_0. □

Napomena 2.6 Neprekidnost je, dakle, nužan uvjet derivabilnosti. Uočimo da primjer 2.4 pokazuje da neprekidnost nije i dovoljna za derivabilnost.

Napomena 2.7 Funkcija f može i ne mora biti derivabilna u točki x_0. Ako je derivabilna na čitavom (nekom) intervalu (a,b), onda možemo govoriti o novoj funkciji koja djeluje po pravilu $x\mapsto f'(x)$, $x\in(a,b)$. Ovako dobivena funkcija se naziva *derivacija funkcije f na intervalu (a,b)* i označava se s f'.

U primjeru 2.3 vidjeli smo da je linearna funkcija $f(x) = ax + b$ derivabilna na $\mathbb{R}$ pa tu možemo govoriti o funkciji f' također definiranoj na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Izračunali smo da je u ovom slučaju $f'(x) = a$, $\forall x \in \mathbb{R}$. U tom smislu često se kaže: "derivacija linearne funkcije je konstanta".

Slično, račun iz zadnjeg dijela primjera 2.3 pokazuje: ako je $f(x) = x^2$, onda je f' definirana na $\mathbb{R}$ i vrijedi $f'(x) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

U svim takvim slučajevima funkcija f' se i sama za sebe može dalje istraživati. Moguće je, na primjer, da u nekoj točki x_0 postoji njezina derivacija. Po definiciji, taj broj se onda zove druga derivacija funkcije f u točki x_0 i označava s $f''(x_0)$. Opet, ako druga derivacija postoji u svakoj točki domene, možemo govoriti o funkciji f''. Npr., za $f(x) = x^2$ imamo $f''(x) = 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Analogno se uvode i derivacije višeg reda: $f'''(x), f^{(iv)}(x), f^{(v)}(x)$, itd.

Napomena 2.8 Ponekad se derivacija označava umjesto s f', simbolom Df. Osobito je intuitivna Leibnitzova oznaka za derivaciju $\frac{df}{dx}$ (ili, ako pišemo $y = f(x)$, $\frac{dy}{dx}$). U pozadini ove oznake je ideja da se u limesu u definiciji umjesto $f(x+h) - f(x)$ piše $\Delta f(x)$ (smisao: prirast funkcije), umjesto $h = (x+h) - x$ pišemo Δx (smisao: prirast varijable), i sada je $\frac{df}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\Delta f(x)}{\Delta x}$.

Propozicija 2.9 *Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $f(x) = x^n$. Tada je f derivabilna u svakoj točki i vrijedi $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Dokaz: Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja je već dokazana u primjeru 2.3. U općem slučaju koristimo binomnu formulu

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^k x^{n-k}.$$

Sada možemo izračunati $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}((x+h)^n - x^n)$:

$$\frac{1}{h}((x+h)^n - x^n) = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k} - x^n\right) = \frac{1}{h}\left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right)$$

(izdvojimo posebno prvi član)

$$= nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k}.$$

Sad možemo prijeći na limes kad $h \to 0$. Uočavamo da je drugi sumand u krajnjem rezultatu, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k}$, funkcija neprekidna u varijabli h. Zato je njezin limes kad $h \to 0$ upravo jednak funkcijskoj vrijednosti u točki $h = 0$, što daje rezultat jednak 0.

Primjenom teorema 1.45 sad dobivamo željenu tvrdnju. $\square$

Teorem 2.10 *Neka su f i g derivabilne u točki x, neka je c konstanta. Tada su i funkcije $f+g$, $f-g$, cf, fg derivabilne u točki x te vrijedi*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x),$$

$$(cf)'(x) = cf'(x),$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Dokaz: U osnovi, sve se tvrdnje dokazuju pozivanjem na teorem 1.45 koji daje pravila za računanje s limesima. Dokažimo za ilustraciju samo posljednju tvrdnju u kojoj se navodi pravilo za derivaciju produkta.

$$\frac{1}{h}\left((fg)(x+h) - (fg)(x)\right) = \frac{1}{h}\left(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)\right)$$

$$= \frac{1}{h}(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x))$$

$$= \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)\frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)).$$

Sad možemo pogledati limes kad $h \to 0$. Primjenom teorema 1.45 i teorema 2.5 (zbog neprekidnosti funkcije g u točki x imamo $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$) dobiva se željena formula. □

Napomena 2.11 U paketu s formulama iz gornjeg teorema obično ide i formula za derivaciju kvocijenta: ako su f i g derivabilne u točki x, te ako je $g(x) \neq 0$, onda je i funkcija $\frac{f}{g}$ derivabilna u točki x te vrijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}.$$

I ovu formulu bismo mogli dokazati slično kao i prethodne, no to ćemo učiniti malo kasnije, na nešto drugačiji način. Iako dokaz odgađamo, u narednim primjerima i zadacima i ovu ćemo formulu slobodno koristiti.

Primjer 2.12 (a) Na temelju propozicije 2.9 i teorema 2.10 odmah zaključujemo da je svaki polinom derivabilna funkcija na $\mathbb{R}$. Npr. za $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 7x - 2$ imamo $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x - 7$.

Osim toga, ako je f polinom, vidimo da postoje sve njegove derivacije višeg reda: $f', f'', \ldots$. Pritom, ako je f polinom stupnja n, onda je $f^{(n+1)} = 0$.

(b) Na temelju prethodne opservacije i napomene 2.11 vidimo i da je svaka racionalna funkcija derivabilna na čitavoj svojoj domeni. Npr. za Monodovu funkciju rasta $f(x) = \frac{ax}{k+x}$, pri čemu su a i k konstante, formula iz prethodne napomene daje $f'(x) = \frac{a(k+x)-ax}{(k+x)^2} = \frac{ak}{(k+x)^2}$.

(c) Promotrimo potenciju s negativnim cjelobrojnim eksponentom: $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$. To je poseban slučaj racionalne funkcije. Formula iz prethodne napomene daje $f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n\frac{1}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$. Vidimo da dobivena formula za derivaciju proširuje, odnosno poopćuje formulu koju smo izveli u propoziciji 2.9 za prirodne eksponenete.

Propozicija 2.13 *Neka je definirana kompozicija gf na nekom intervalu oko točke x, te neka postoje $f'(x)$ i $g'(f(x))$. Tada je i gf derivabilna u točki x te vrijedi $(gf)'(x) = g'(f(x))f'(x)$.*

Dokaz: Pokazat ćemo osnovnu ideju dokaza.

$$\frac{1}{h}((gf)(x+h) - (gf)(x)) = \frac{1}{h}\left(\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)}(f(x+h) - f(x))\right)$$

$$= \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Kad pogledamo limes za $h \to 0$ u osnovi dobivamo željenu formulu (jer f je neprekidna u točki x). Problem je jedino u tome što možda može biti $f(x+h) - f(x) = 0$ za neke točke h kad $h \to 0$. Nije teško pokazati kako se ta teškoća zaobilazi, no taj dio izostavljamo. □

Primjer 2.14 Ako je $f(x) = (4x^2 - 5x)^3$ onda prethodni teorem pokazuje da je f derivabilna funkcija na $\mathbb{R}$ te da vrijedi $f'(x) = 3(4x^2 - 5x)^2(8x - 5)$.

Napomena 2.15 Sad možemo dokazati formulu za deriviranje kvocijenta iz napomene 2.11.

Prvo, zbog pretpostavke $g(x) \neq 0$ primjenom leme 1.58 zaključujemo da je $g \neq 0$ u nekoj okolini točke x pa je kvocijent $\frac{f}{g}$ definiran u nekoj okolini od x (po definiciji derivacije, to je preduvjet da uopće možemo promatrati definicioni limes).

Sad pogledajmo funkciju $r(x) = \frac{1}{x}$. Izravno iz definicije lako se zaključi da je r derivabilna funkcija u svakoj točki $x \neq 0$ te da vrijedi $r'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Nadalje, uočimo da je $\frac{1}{g(x)} = r(g(x))$. Primjenom prethodnog teorema o derivaciji kompozicije nalazimo $(\frac{1}{g(x)})' = (rg)'(x) = -g'(x)\frac{1}{(g(x))^2}$.

Konačno, preostaje uočiti da je $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$. Sad željena formula za derivaciju kvocijenta slijedi iz pravila za deriviranje produkta i upravo izračunate formule za derivaciju funkcije $\frac{1}{g(x)}$.

Teorem 2.16 *Neka su I, J otvoreni intervali i $f : I \to J$ neprekidna bijekcija. Ako je f derivabilna u točki $x_0 \in I$ te ako vrijedi $f'(x_0) \neq 0$ onda je i funkcija $f^{-1} : J \to I$ derivabilna u točki $y_0 = f(x_0)$ i vrijedi $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.*

Dokaz: Iz derivabilnosti funkcije f u točki x_0 slijedi $f(x)-f(x_0) = (x-x_0)(f'(x_0)+w(x))$, gdje je w funkcija uvedena u dokazu teorema 2.5. Stavimo $y_0 = f(x_0)$ i $y = f(x)$ pa dobivamo

$$y - y_0 = (f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0))(f'(x_0) + w(f^{-1}(y)))$$

što možemo zapisati kao

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + w(f^{-1}(y))}.$$

Kako je kompozicija wf^{-1} neprekidna u točki y_0 (što slijedi iz teorema 1.65, 2.5 i 1.61), dobivamo

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

□

Napomena 2.17 Korisno je primijetiti da formulu iz prethodnog teorema često pišemo u obliku $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

U Leibnitzovoj notaciji, pišući $y = f(x)$, imali bismo $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

Poanta prethodnog dokaza je u utvrđivanju derivabilnosti inverzne funkcije (i zato je bila potrebna pretpostavka da je f neprekidna na I). Kad bismo unaprijed znali da je f^{-1} derivabilna u točki $y_0 = f(x_0)$ onda bismo iz činjenice da je $f^{-1}(f(x)) = x$ i formule za derivaciju kompozicije odmah dobili $(f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0) = 1$ što je upravo formula iz prethodnog teorema.

Primjer 2.18 Funkcija $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, $f(x) = x^2$ je bijekcija i derivabilna je (pa zato i neprekidna!) na čitavom intervalu $(0, \infty)$. Njena inverzna funkcija $\sqrt{\ } : (0, \infty) \to (0, \infty)$ je također neprekidna.

Prema prethodnom teoremu funkcija $\sqrt{\ }$ je derivabilna u svakoj točki x i, koristimo li formulu iz teorema zapisanu kao u prvom dijelu prethodne napomene, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Primjer 2.19 Ponekad je funkcija $y = f(x)$ zadana samo implicitno, nekom jednadžbom, a da pritom nije moguće opisati eksplicitno ovisnost y o x u terminima elementarnih funkcija. Na primjer, nema načina da izrazimo y u ovisnosti o x iz jednadžbe $y^5x^2 - y^4x + \tan y + 2 = \sqrt{x + 1}$.

I tako zadane funkcije možemo derivirati - ako su derivabilne - uz pomoć pravila o derivaciji kompozicije.

Za primjer, izračunajmo derivaciju funkcije $y = f(x)$ ako je $x^2+y^2 = 1$. Derivirat ćemo obje strane jednakosti imajući na umu da je y funkcija od x. Dobivamo $\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = \frac{d}{dx}(1)$. Slijedi $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$, a odavde nalazimo $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

S obzirom da je $x^2 + y^2 = 1$ jednadžba jedinične kružnice s centrom u ishodištu, u ovaj rezultat se možemo uvjeriti i direktno. Naime, tangenta na kružnicu u točki (x, y) je okomita na radijus kroz tu točku. Zato je koeficijent smjera tangente suprotna i recipročna vrijednost koeficijenta smjera radijusa, a taj iznosi $\frac{y}{x}$.

Alternativno, u ovom slučaju jednadžbu $x^2 + y^2 = 1$ možemo riješiti i eksplicitno i izračunati derivaciju na direktan način.

Primjer 2.20 Prethodno izložena tehnika deriviranja implicitno zadanih funkcija susreće se u problemima u kojima se uspoređuju različite brzine promjene povezanih veličina.

Ihtiosauri su morski reptili koji su izumrli za vrijeme krede (između 144 i 65 milijuna godina prije današnjeg doba). Analizom fosiliziranih kostura ihtiosaura postavljena je hipoteza da su duljina lubanje i duljina kralježnice ihtiosaura vezane jednadžbom

$$[\text{duljina lubanje}] = 1,162[\text{duljina kralježnice}]^{0,933}.$$

Zanima nas brzina rasta lubanje u odnosu na brzinu rasta kralježnice u skladu s ovim modelom.

Označimo s x dob ihtiosaura, a duljinu lubanje i duljinu kralježnice ihtiosaura u dobi x označimo s $L(x)$ i $K(x)$, respektivno. Imamo, dakle, $L(x) = 1,162 \cdot K(x)^{0,933}$. Derivirajući obje strane ove jednakosti dobivamo $L'(x) = 1,162 \cdot 0,933 \cdot K(x)^{0,933-1}K'(x)$. Dobivenu jednakost možemo pisati u obliku $L'(x) = (1,162 \cdot K(x)^{0,933})0,933 \cdot \frac{1}{K(x)}K'(x) = 0,933 \cdot L(x)\frac{1}{K(x)}K'(x)$. Konačno, odavde imamo $\frac{1}{L(x)}L'(x) = 0,933\frac{1}{K(x)}K'(x)$.

Kako je faktor $0,933$ manji od 1, zaključujemo da lubanja raste sporije od kralježnice. To je i inače uobičajeno za mnoge kralježnjake: mladunčad obično ima glavu veću od odraslih jedinki u usporedbi s duljinom tijela.

Zadaci: 4. domaća zadaća

1. Izračunajte $(\sqrt{x})'$ za $x > 0$ računajući izravno limes iz definicije derivacije.
2. Izravno (koristeći definiciju) izračunajte $(\frac{1}{x+1})'$. Provjerite dobiveni rezultat koristeći formulu za derivaciju kvocijenta.
3. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = \frac{3}{x}$ u točki $(3, f(3))$.
4. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^2 - 2x$ u točki $(1, f(1))$.
5. Neka je put koji je objekt u kretanju prešao do trenutka t dan funkcijom $s(t) = \frac{200}{3}t^2$. Odredite prijeđeni put i trenutnu brzinu u trenutku $t = \frac{5}{3}$.
6. Izračunajte $f'(x)$ ako je: (a) $f(x) = 2x^2 - 3x^4$, (b) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 7$, (c) $f(x) = (c-1)x^3 - \frac{x^2}{c}$, (d) $f(x) = \frac{bx^2+x}{x+k}$, (e) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

7. Odredite točku na grafu funkcije $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$ u kojoj je tangenta paralelna pravcu $y = -x$.

8. Odredite točku na grafu funkcije $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - x + 1$ u kojoj je tangenta okomita na pravac $y = -\frac{1}{3}x$.

9. Izračunajte $f'(x)$ ako je (a) $f(x) = (\sqrt{x} + x)(2x - \sqrt{x})$, (b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.

10. Izračunajte $f'(x)$ ako je (a) $f(x) = (x + (x^2 - 1)^3)^2$, (b) $f(x) = (\frac{x}{x+1})^3$.

11. Koristeći pravilo za derivaciju kompozicije odredite $h'(x)$ ako je $h(x) = \sqrt{f(x) + g(x)}$, pri čemu su f i g derivabilne funkcije. Specijalizirajte dobiveni rezultat za $f(x) = x^2$ i $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

12. Izračunajte $f''(x)$ ako je: (a) $f(x) = \frac{1}{x^2+2}$, (b) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$.

13. Koristeći teorem 2.16 izračunajte $f'(x)$ ako je $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

14. Koristeći teorem 2.16 izračunajte $f'(x)$ ako je $f(x) = \sqrt[n]{x}$ pri čemu je $n \in \mathbb{N}$.

15. Koristeći rezultat prethodnog zadatka pokažite da je za svaki racionalan broj $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, funkcija $f(x) = x^r$ derivabilna za $x > 0$ te pokažite da vrijedi $(x^r)' = rx^{r-1}$.

16. Utvrdite u kojim točkama je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^2}$ derivabilna pa izračunajte $f'(x)$.

17. Cilindrični rezervoar polumjera baze $r = 5$ m napunjen je vodom do visine h.

    (a) Odredite volumen vode $V(h)$ u ovisnosti o visini h.

    (b) Ako otvorimo ventil voda će istjecati brzinom 250 l/min (1 kubični metar iznosi 1000 l). Odredite brzinu kojom se razina vode spušta.

2.2 Derivacije elementarnih funkcija. Svojstva derivabilnih funkcija

U prethodnoj točki izložili smo pravila deriviranja i vidjeli neke jednostavne primjere. Posebno, pokazali smo da vrijedi $(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ i štoviše (vidite 15. zadatak u 4. domaćoj zadaći), $(x^r)' = rx^{r-1}$, $r \in \mathbb{Q}$.

U ovoj točki pokazat ćemo i da su ostale elementarne funkcije derivabilne i izvesti najvažnije formule.

Propozicija 2.21 *Funkcije* sin, cos, tan *i* cot *derivabilne su na svojim prirodnim domenama te vrijedi* $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Dokaz: Primjenom adicijske formule za sinus dobivamo

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{cosh - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \right).$$

Koristeći pravilo o zbroju limesa iz teorema 1.45 (što smijemo jer oba pojedinačna limesa koje ćemo dobiti postoje) dobivamo

$$(\sin x)' = \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}.$$

S obzirom da iz primjera 1.52 znamo $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ i $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$, slijedi $(\sin x)' = \cos x$.

Potpuno analogno se izvede formula za derivaciju kosinusa. Preostale dvije formule se dobivaju pravilom za derivaciju kvocijenta. □

Primjer 2.22 (a) Za $f(x) = \sin^2 x - 3\cos^3 x$ imamo $f'(x) = 2\sin x \cos x + 9\cos^2 x \sin x$.

(b) Za $f(x) = \sin(x^2)$ imamo $f'(x) = 2x\cos(x^2)$.

Napomena 2.23 U točki 1.2 u pregledu elementarnih funkcija izostavili smo inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija - tzv. arkus funkcije.

Trigonometrijske funkcije su periodične te stoga ne mogu biti injektivne. Zato zapravo možemo govoriti samo o inverznim funkcijama restrikcija trigonometrijskih funkcija na intervale na kojima su one injektivna preslikavanja. Pogledajmo za ilustraciju primjer tangensa.

Funkcija tan definirana je na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Ako promatramo restrikciju na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ vidi se da je $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ bijekcija. Zato ima smisla govoriti o inverznoj funkciji $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Kako su obje ove funkcije neprekidne i kako je funkcija tan derivabilna i $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, nalazimo se u uvjetima teorema 2.16. Tako zaključujemo da je i $\arctan x$ derivabilna funkcija te vrijedi $(\arctan x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} = \cos^2(\arctan x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Označimo $\cos^2(\arctan x) = k$. Sada je $\sin^2(\arctan x) = 1-k$, pa dobivamo $\tan^2(\arctan x) = \frac{1-k}{k}$. S druge strane, $\tan(\arctan x) = x$ pa uspoređivanjem slijedi $x^2 = \frac{1-k}{k}$. Konačno, odavde je $k = \frac{1}{1+x^2}$. Izračunali smo, dakle, $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Primjer 2.24 Neka je $f(x) = \arctan(\frac{x}{a})$ gdje je $a \neq 0$ kontanta. Primjenjujući pravilo za derivaciju kompozicije i koristeći rezultat iz prethodne napomene dobivamo

$$f'(x) = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{a}{x^2+a^2}.$$

Propozicija 2.25 *Eksponencijalna funkcija je derivabilna na* $\mathbb{R}$ *i vrijedi* $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dokaz: Uzmimo proizvoljan x. Po definiciji derivacije imamo

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}.$$

Prema primjeru 1.52, zadnji limes iznosi 1. To povlači da je $(e^x)' = e^x$. $\square$

Vidimo dakle da za eksponencijalnu funkciju vrijedi $f'(x) = f(x)$, $\forall x$; drugim riječima, $f' = f$. Kasnije ćemo pokazati da je eksponencijalna funkcija (upravo ova s prirodnom bazom e) jedina funkcija sa svojstvom $f' = f$.

Primjer 2.26 (a) $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$.
(b) $(e^{cx})' = ce^{cx}$.
(c) Neka je $a > 0$, $a \neq 1$. $(a^x)' = (e^{(\ln a)x})' = (\ln a)e^{(\ln a)x} = (\ln a)a^x$.

Propozicija 2.27 *Funkcija* $\ln$ *je derivabilna na svojoj prirodnoj domeni i vrijedi* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

Dokaz: Funkcije $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ i $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ su neprekidne bijekcije (jedna drugoj inverzne), exp je derivabilna u svakoj točki svoje domene i $(e^x)' = e^x \neq 0$. Prema teoremu 2.16 zato je i ln derivabilna u svakoj točki svoje domene te vrijedi $(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$. $\square$

Primjer 2.28 Neka je $f(x) = x^x$, $x > 0$. Funkcija f je derivabilna, a njenu derivaciju možemo izračunati tzv. logaritamskim deriviranjem: $f'(x) = ((e^{\ln x})^x)' = (e^{x\ln x})' = (\ln x + 1)e^{x\ln x} = (\ln x + 1)x^x$.

Primjer 2.29 U 8. zadatku u 2. domaćoj zadaći opisali smo Bartalanffyjev model rasta riba dan formulom $L(x) = L(1 - e^{-kx})$ gdje su L i k pozitivne konstante. Ovdje je $L(x)$ duljina ribe u dobi x. Model nije posve realističan jer imamo $L(0) = 0$.

Pogledajmo sada dorađeniji model dan funkcijom $L(x) = M - Le^{-kx}$ gdje je i M konstanta i vrijedi $0 < L < M$. I ovo je rastuća funkcija na cijelom skupu $\mathbb{R}^+$ (što odražava osnovnu pretpostavku pod kojom je model sagrađen, naime da ribe rastu tijekom cijelog života). Dalje, $L(0) = M - L$ i $\lim\limits_{x\to\infty} L(x) = M$. To znači da je M teorijski maksimum duljine do koje riba može narasti u ovom modelu. Promijenimo zato oznaku; stavimo $M = L_\infty$. Iz $L(0) = M - L$ sada imamo $L = L_\infty - L(0)$. Tako dobivamo (ako još i $L(0)$ označimo prikladno s L_0)

$$L(x) = L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-kx}.$$

Uočimo da je $L'(x) = k(L_\infty - L_0)e^{-kx}$ što je padajuća funkcija. Kako derivacija $L'(x)$ predstavlja brzinu rasta u starosti x, to vidimo da ribe u ovom modelu rastu cjeloživotno ali da brzina rasta opada sa starošću.

Primjer 2.30 Opća logistička funkcija je dana s $f(x) = \frac{K}{1+ce^{-(mx+b)}}$, gdje su K, c, m pozitivne, a b proizvoljna konstanta. U 9. zadatku u 3. domaćoj zadaći pokazali smo da je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = K$. Može se pokazati i elementarno[4] (pokušajte) da na intervalu $[0, \infty)$ funkcija f raste od $f(0)$ do K. Zasad samo primijetimo da je

$$f'(x) = \frac{mcKe^{-(mx+b)}}{(1 + ce^{-(mx+b)})^2}.$$

Primjer 2.31 Neka $B(t)$ označava količinu biomase na nekom području u trenutku t. Pretpostavimo da $B(t)$ ovisi o jednom jedinom resursu (npr. dušiku) čija koncentracija neka bude označena s R.

Promotrimo Monodovu funkciju rasta $f(R) = \frac{aR}{k+R}$, gdje su a i k pozitivne konstante i pretpostavimo da vrijedi

$$B(t) = e^{(a\frac{R}{k+R} - m)t},$$

gdje je m konstanta takva da vrijedi $m < a$. Brzina promjene količine biomase je sada $B'(t)$, a razlomak $\frac{B'(t)}{B(t)}$ se onda interpretira kao brzina promjene količine biomase po jedinici količine.

Ovdje je $B'(t) = (a\frac{R}{k+R} - m)B(t)$, pa imamo

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = a\frac{R}{k+R} - m.$$

U ovom modelu se m shvaća kao "gubitak biomase po jedinici količine". Smisao je sljedeći: ako je $a\frac{R}{k+R} - m = 0$, tj. ako je $a\frac{R}{k+R} = m$, rasta nema. Rješavanjem ove jednadžbe po R dobivamo rješenje $R^* = \frac{mk}{a-m}$. Ako je, dakle, $R = R^*$ kažemo da je biomasa u ekvilibriju (jer za tu vrijednost koncentracije resursa (dušika) nema rasta). Ako je $R > R^*$ onda je $a\frac{R}{k+R} > m$ i biomasa se povećava. Ako je pak $R < R^*$ onda je $a\frac{R}{k+R} < m$ i imamo negativan rast, tj. biomasa se smanjuje.

[4] To ćemo u idućoj točki učiniti primjenom derivacija.

Definicija 2.32 *Neka je funkcija f definirana na svojoj prirodnoj domeni D. Kažemo da f ima u točki x_0:*

- *lokalni maksimum, ako postoji interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$, $(\delta > 0)$, oko točke x_0 takav da je $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;*
- *lokalni minimum, ako postoji interval $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq D$, $(\delta > 0)$, oko točke x_0 takav da je $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$;*
- *globalni maksimum na skupu $A \subseteq D$, ako je $x_0 \in A$ i $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in A$;*
- *globalni minimum na skupu $A \subseteq D$, ako je $x_0 \in A$ i $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in A$;*

Još se kaže da je točka x_0 točka lokalnog maksimuma ili lokalnog minimuma, odnosno globalnog maksimuma ili minimuma. Točke s ovim svojstvom zajedničkim se imenom zovu ekstremi (ili točke ekstrema) funkcije f i, ovisno o njihovoj prirodi, govorimo o lokalnim ili globalnim ekstremima.

Pogledajmo najprije nekoliko jednostavnih primjera. Neka je $f(x) = x + 1$. Prirodna domena ove funkcije je $\mathbb{R}$. Kako se radi o rastućoj funkciji, jasno je da ona nema lokalnih ekstrema. Egzistencija globalnih ekstrema na skupu A ovisi o izboru skupa A. Ukoliko uzmemo $A = \mathbb{R}$, dakle, ako želimo govoriti o globalnim ekstremima na čitavoj prirodnoj domeni, jasno je da ih u ovom slučaju nema. Ako uzmemo interval $A = (a, b)$, globalnih ekstrema funkcije f na ovom skupu A opet nema. Ako pak uzmemo segment $A = [a, b]$ onda vidimo da je točka a globalni minimum, a točka b globalni maksimum funkcije f na ovako odabranom skupu A.

Napomena 2.33 Često je potrebno odrediti globalne ekstreme funkcije na čitavoj njezinoj prirodnoj domeni (dakle, u slučaju $A = D$). U tom slučaju jednostavno govorimo o globalnim ekstremima.

Još primijetimo: ako je x_0 točka globalnog ekstrema funkcije f i ako x_0 nije rubna točka domene od f, onda je x_0 ujedno i točka lokalnog ekstrema za f.

Funkcija $f(x) = x^2$ ima lokalni minimum i globalni minimum u točki $x_0 = 0$. Nema ni lokalnih, ni globalnih maksimuma.

Funkcija $f(x) = \cos x$ ima beskonačno mnogo globalnih maksimuma (u točkama $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) i beskonačno mnogo globalnih minimuma (u točkama $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Sve su te točke ujedno i lokalni maksimumi, odnosno minimumi.

Funkcija e^x nema ni lokalnih ni globalnih ekstrema.

Metode matematičke analize omogućuju nam istraživanje lokalnih i globalnih ekstrema. U načelu, derivacije predstavljaju prikladan alat za analizu lokalnih ekstrema. Istraživanje globalnih ekstrema je teže. Međutim, sljedeći rezultat će nam biti izuzetno koristan. U stvari se radi o jednom od najvažnijih rezultata za neprekidne funkcije. Bitnu ulogu u teoremu igra to što promatramo djelovanje funkcije na segmentu. Gotovo da se radi o interakciji pojmova neprekidnosti funkcije i kompaktnosti segmenta. Kompaktnost je pojam koji ovdje nećemo opisivati, te stoga teorem navodimo bez dokaza. Jedan elementaran, ali nipošto lagan dokaz se nalazi među napomenama i komentarima na kraju poglavlja.

Teorem 2.34 *Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada postoje točke globalnog minimuma i globalnog maksimuma funkcije f na segmentu $[a, b]$.*

Okrenimo se sada istraživanju lokalnih ekstrema. Sljedeći rezultat je također fundamentalan.

Teorem 2.35 *(Fermat) Neka je f derivabilna u točki x_0, te neka je x_0 točka lokalnog ekstrema za f. Tada je $f'(x) = 0$.*

Dokaz: Podsjetimo se da derivabilnost funkcije f u x_0 podrazumijeva, po definiciji, da je f definirana na nekom intervalu (a, b) koji sadrži točku x_0.

Pretpostavimo da je x_0 točka lokalnog minimuma za f. Dakle, postoji $\delta > 0$ takav da je $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (a, b)$ i vrijedi $f(x_0) \le f(x)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Po definiciji je $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Ako je $h < 0$ ovaj razlomak je negativan (ili jednak 0) i kad $h \to 0$ na limesu dobijemo $f'(x_0) \le 0$. Analogno, kad je $h > 0$ i kad $h \to 0$ na limesu dobijemo $f'(x_0) \ge 0$. To je moguće jedino tako da je $f'(x_0) = 0$. $\square$

Napomena 2.36 (a) Pogledajmo funkciju $f(x) = x^2$. Znamo da je $x_0 = 0$ lokalni minimum za f. Zaista je, kako teorem tvrdi, $f'(0) = 0$.

(b) Teorem tvrdi da je za derivabilne funkcije jednakost $f'(x_0) = 0$ nužan uvjet lokalnog ekstrema. Primjer funkcije $f(x) = x^3$ i točke $x_0 = 0$ pokazuje da taj uvjet nije i dovoljan.

Točke x sa svojstvom $f'(x) = 0$ su, dakle, samo kandidati za lokalne ektreme. Takve točke se nazivaju kritične ili stacionarne točke (funkcije f).

(c) Istaknimo da teorem ne jamči egzistenciju lokalnih ekstrema.

Napomena 2.37 Kombinirana primjena teorema 2.34 i 2.35 omogućuje nalaženje globalnih ekstrema na segmentu za široku klasu funkcija.

Pretpostavimo da je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b). Prema teoremu 2.34, postoje točke x_1, x_2 takve da je $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$, $\forall x \in [a, b]$ (x_1 i x_2 su, dakle, točke globalnog minimuma, odnosno maksimuma funkcije f na segmentu $[a, b]$).

Točke x_1 i x_2 mogu biti rubne ili unutrašnje. Međutim, ako je koja od tih točaka unutrašnja (tj. ako leži u (a, b)), onda je to točka lokalnog ektrema za f i zato mora biti kritična točka, dakle, nul-točka derivacije f'.

Iz ovoga nalazimo sljedeću proceduru za određivanje globalnih ekstrema funkcije f na segmentu $[a, b]$ (ali uz uvjet da je f neprekidna na tom segmentu i derivabilna na intervalu (a, b)).

- izračunaj vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$;
- odredi f' i riješi jednadžbu $f'(x) = 0$; neka je S skup svih rješenja te jednadžbe na intervalu (a, b);

- izračunaj vrijednosti $f(c)$ za sve $c \in S$ i usporedi s $f(a)$ i $f(b)$. Među tim brojevima odredi najmanji i najveći; to su traženi globalni minimum i maksimum, a točke u kojima su funkcijske vrijednosti najveća, odnosno najmanja, su točke u kojima se ti globalni ekstremi postižu.

Napomena 2.38 U primjenama je skup S iz prethodne napomene najčešće konačan. No, to ne mora biti tako. Pogledajmo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \end{cases} .$$

Očito, f je neprekidna na $[0, 1]$ i derivabilna na (a, b), a u ovom slučaju imamo $S = \{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}\}$.

Primjer 2.39 Odredimo globalni minimum i maksimum funkcije $f(x) = x^2 - x$ na segmentu $[0, 1]$. Slijedimo proceduru opisanu u prethodnoj napomeni.

$f(0) = f(1) = 0$. Kako je $f'(x) = 2x - 1$, vidimo da je jedina kritična točka ove funkcije točka $x_1 = \frac{1}{2}$ i, što je u ovom primjeru važno, zaista je $\frac{1}{2} \in [0, 1]$.

Kako je $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, zaključujemo: točka $x_1 = \frac{1}{2}$ je točka globalnog minimuma ove funkcije na segmentu $[0, 1]$ i taj globalni minimum iznosi $-\frac{1}{4}$, a točke 0 i 1 su točke globalnog maksimuma ove funkcije na segmentu $[0, 1]$ i taj glabalni maksimum iznosi 0.

Napomena 2.40 U primjerima poput prethodnog (na kakve se odnose prethodne dvije napomene) ne može se unaprijed zaključiti jesu li tražene točke rubne ili unutrašnje. Uočimo također da točke globalnih ekstrema nisu jedinstvene (kao što je to slučaj u prethodnom primjeru). Slično, promotrite funkciju $f(x) = \cos x$ na segmentu (npr.) $[0, 4\pi]$.

Sljedeća dva teorema spadaju u skupinu tzv. teorema srednje vrijednosti i igraju temeljnu ulogu u primjenama diferencijalnog računa.

Teorem 2.41 *(Rolle) Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b), te neka vrijedi $f(a) = f(b)$. Tada postoji točka $c \in (a, b)$ za koju je $f'(c) = 0$.*

Dokaz: Ako je f konstanta na $[a, b]$, tj. ako vrijedi $f(a) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, onda je $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$.

Prema teoremu 2.34 postoje globalni ekstremi funkcije f na $[a, b]$. Ako f nije konstanta onda bar jedna od točaka njezinih globalnih ekstrema na $[a, b]$ mora biti unutrašnja točka c (jer su vrijednosti na rubovima prema pretpostavci jednake). Zato je točka c ujedno i točka lokalnog ekstrema za f na intervalu (a, b). Sada iz teorema 2.35 slijedi $f'(c) = 0$. $\square$

Napomena 2.42 Geometrijskim jezikom rečeno, pod pretpostavkama Rolleovog teorema, postoji točka iz intervala (a,b) u kojoj je tangenta na graf funkcije f horizontalna.

Rolleov teorem: $f(x) = -(x-2)^2 + 9$

Teorem 2.43 *(Lagrange) Neka je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ i derivabilna na intervalu (a,b). Tada postoji točka $c \in (a,b)$ za koju je $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Dokaz: Funkcija g definirana s $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ zadovoljava pretpostavke Rolleovog teorema. Zato postoji $c \in (a,b)$ takva da je $g'(c) = 0$. Kako je $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, tvrdnja slijedi. □

Napomena 2.44 Uočimo da je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ koeficijent smjera sekante grafa funkcije f koja prolazi točkama $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Geometrijskim jezikom rečeno, Lagrangeov teorem tvrdi da pod navedenim pretpostavkama postoji točka $c \in (a,b)$ u kojoj je tangenta na graf funkcije f paralelna sekanti kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$.

U fizikalnoj interpretaciji, ako $f(x)$ predstavlja prijeđeni put do trenutka x, Lagrangeov teorem kaže da postoji trenutak $c \in (a,b)$ u kojem je trenutna brzina jednaka prosječnoj brzini ostvarenoj u vremenskom odsječku $[a,b]$.

Lagrangeov teorem: $f(x) = x^2 - 3x + 3$, $a = 0, b = 3, c = \frac{3}{2}$

Korolar 2.45 *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$ i derivabilna na intervalu (a,b), te ako za brojeve m, M vrijedi $m \leq f'(x) \leq M$, $\forall x \in (a,b)$, onda je $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.*

Dokaz: Prema Langrangeovom teoremu postoji $c \in (a,b)$ sa svojstvom $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Zbog pretpostavke odavde slijedi $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$. □

Derivacija konstante je nul-funkcija. Sljedeći korolar donosi obrat koji igra jednu od fundamentalnih uloga u teoriji integracije.

Korolar 2.46 *Ako je funkcija f neprekidna na segmentu $[a,b]$, derivabilna na intervalu (a,b) i ako vrijedi $f'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$, onda je f konstanta na $[a,b]$.*

Dokaz: Uzmimo d sa svojstvom $a < d \leq b$. Treba pokazati da je $f(d) = f(a)$. Promotrimo funkciju f na segmentu $[a, d]$. Na tom segmentu funkcija f zadovoljava uvjete prethodnog korolara s konstantama $m = M = 0$. Prema tvrdnji tog korolara sada slijedi $0 \leq f(d) - f(a) \leq 0$, dakle $f(d) = f(a)$, $\forall d \in [a, b]$. □

Zadaci: 5. domaća zadaća

1. Derivirajte funkcije: (a) $f(x) = -3\cos^2(3x^2 - 1)$, (b) $f(x) = 2\tan(1 - x^2)$, (c) $f(x) = \sin x \cos x$, (d) $f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$, (e) $f(x) = \frac{\cot 2x}{\tan 4x}$, (f) $f(x) = \sin^2(x^2 - 1)$.

2. Derivirajte funkcije: (a) $f(x) = e^{-x^2+2x-1}$, (b) $f(x) = \frac{x}{e^x+e^{-x}}$, (c) $f(x) = \cos(e^x)$, (d) $f(x) = 2^{x^2-1}$, (e) $f(x) = 5^{\sqrt{x}}$.

3. Za navedene funkcije odredite prirodne domene, uvjerite se da su derivabilne na svojim prirodnim domenama i izračunajte derivacije: (a) $f(x) = \ln(x^2)$, (b) $\ln^2 x$, (c) $f(x) = \ln(\frac{1-x}{1+3x})$, (d) $\ln(\sin x)$.

4. Neka je rast neke populacije u vremenu opisan logističkom funkcijom $f(x) = \frac{K}{1+ce^{-mx}}$, $K, c, m > 0$. (U usporedbi s općim oblikom ove funkcije navedenim u primjeru 2.30 ovdje je $b = 0$.)

   (a) Neka je početna brojnost populacije $f(0) = N_0$. Izrazite konstantu c u ovisnosti o N_0 i K (podsjetimo se da je u ovom slučaju $f(x) \leq K$, $\forall x \geq 0$, te da je f rastuća na skupu $\mathbb{R}^+$; tako da će ovdje konstanta c biti izražena pomoću donje i gornje ograde funkcije f).

   (b) Pokažite da vrijedi $f'(x) = mf(x)(1 - \frac{f(x)}{K})$ i, posebno, $f'(x) > 0$, $\forall x > 0$.

5. Odredite polinom drugog stupnja p koji zadovoljava uvjete $p(-1) = 0$, $p'(1) = 5$, $p''(0) = 1$.

6. Neka je rast neke populacije opisan funkcijom $B(t) = K + a\cos(\frac{\pi t}{2T})$ gdje su a, K, T pozitivne konstante. Pokažite da vrijedi $B'(t) = \frac{\pi}{2T}(K - B(t - T))$.

   (Primijetimo da u ovom primjeru brzina rasta u trenutku t, $B'(t)$, ovisi o brojnosti populacije u času $t - T$. Dakle, u ovaj model rasta ugrađen je vremenski odmak za pozitivnu konstantu T. Interpretacija je sljedeća: razmnožavanje nastupa tek nakon T vremenskih jedinica kad se dosegne određena zrelost i zato rast populacije u trenutku t ovisi o brojnosti populacije u trenutku $t - T$.)

7. Skicirajte graf neke funkcije koja je neprekidna na segmantu $[1, 3]$ i na tom segmentu postiže globalni minimum i maksimum u (nekim) unutrašnjim točkama.

8. Za model rasta opisan logističkom funkcijom $f(x) = \frac{K}{1+ce^{-mx}}$, $K, c, m > 0$, brzina rasta je, prema zadatku 4, dana s $f'(x) = mf(x)(1 - \frac{f(x)}{K})$. S obzirom da su m i K konstante, vidimo da ovdje brzina rasta $f'(x)$ ovisi o brojnosti populacije $f(x)$. Promotrimo pobliže tu ovisnost.

Pogledajmo funkciju $g(t) = mt(1 - \frac{t}{K})$ (konstante m i K su iste kao za funkciju f). Prirodna domena ove funkcije je čitav skup $\mathbb{R}$. Međutim, u našim razmatranjima varijabla t igra ulogu brojnosti populacije $f(x)$. Iz zadatka 4 znamo da je f rastuća funkcija te da vrijedi $f(0) = \frac{K}{1+c} \leq f(x) < K$. Zato je za naše razmatranje relevantno proučavati samo restrikciju funkcije g na interval $[\frac{K}{1+c}, K)$.

Na intervalima ovakve vrste teorem 2.34 nije primjenjiv. Da bismo ga mogli primijeniti, promatrat ćemo funkciju g na segmentu $[\frac{K}{1+c}, K]$ (što možemo jer $g(K)$ je dobro definirano).

(a) Pokažite da je točka $t = \frac{K}{2}$ točka globalnog maksimuma funkcije g na segmentu $[\frac{K}{1+c}, K]$.

(b) Interpretirajte dobiveni rezultat u promatranom modelu rasta opisanom funkcijom f. (Uputa: kada, tj. u kojim okolnostima je brzina rasta promatrane populacije najveća?)

9. Odredite globalni minimum i maksimum funkcije $f(x) = x^2 - 6x$ na segmentu (a) $[0, 6]$, (b) $[0, 7]$.

10. Dokažite pomoću Lagrangeovog teorema da za funkciju $f(x) = x^3$ postoji točka $x \in (-1, 1)$ za koju vrijedi $f'(x) = 1$. Nakon toga odredite sve takve točke.

11. Za $t \geq 0$ put koji automobil prijeđe u $[0, t]$ dan je formulom $s(t) = \frac{1}{300}t^3$. Odredite trenutak $t \in (1, 5)$ u kojem će trenutna brzina biti jednaka prosječnoj brzini u vremenskom odsječku $[1, 5]$.

12. Neka je $f(x) = e^{-|x|}$, $x \in [-2, 2]$. Provjerite da je f neprekidna na $[-2, 2]$. Provjerite da je f derivabilna na $(-2, 2) \setminus \{0\}$ te da f nije derivabilna u točki 0. Provjerite da je $f(-2) = f(2)$. Provjerite da ne postoji točka $c \in (-2, 2)$ za koju vrijedi $f'(c) = 0$. Obrazložite zašto ovo nije u kontradikciji s Rolleovim teoremom.

13. Odredite globalni minimum i maksimum Monodove funkcije $f(x) = \frac{ax}{k+x}$ (a i k su pozitivne konstante) na segmentu $[0, s]$ za proizvoljan $s > 0$. Možete li iz dobivenog rezultata zaključiti da f nema lokalnih ekstrema na skupu $\mathbb{R}^+$?

2.3 Primjene

Podsjetimo se pojma rastuće, odnosno padajuće funkcije: funkcija f je rastuća na skupu S ako $x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Ako pak vrijedi $x_1, x_2 \in S$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, kaže se da je funkcija f padajuća na S. U oba slučaja kažemo da je funkcija f monotona na S. Ponekad se kaže da su funkcije s ovim svojstvima strogo rastuće, odnosno strogo padajuće. Kaže se također da je skup S u ovoj situaciji područje rasta (pada) za f, odnosno da f raste (pada) na S.

Intervale na kojima derivabilne funkcije rastu, odnosno padaju možemo lako pronaći.

Teorem 2.47 *Neka je f neprekidna na segmentu $[a, b]$ i derivabilna na intervalu (a, b).*

(1) Ako je $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b)$, onda je f rastuća na $[a, b]$.

(2) (1) Ako je $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b)$, onda je f padajuća na $[a, b]$.

Dokaz: (1) Uzmimo $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Uočavamo da je f neprekidna na $[x_1, x_2]$ i derivabilna na (x_1, x_2). Prema Lagrangeovom teoremu sada postoji $c \in (x_1, x_2)$ tako da vrijedi $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$.

(2) Analogno. Alternativno, može se primijeniti već dokazana tvrdnja na funkciju $-f$.
□

Napomena 2.48 (a) Tvrdnja teorema vrijedi i za funkcije derivabilne na beskonačnim intervalima oblika $(-\infty, b)$ i (a, ∞). Također, i za funkcije neprekidne na poluzatvorenim intervalima oblika $(-\infty, b]$ i $[a, \infty)$ i derivabilne u unutrašnjosti tih intervala.

(b) Obrat tvrdnje teorema ne vrijedi u tako strogom obliku. Uočimo da je funkcija $f(x) = x^3$ rastuća na $\mathbb{R}$, no nije točno da vrijedi $f'(x) > 0$ za sve točke x. Može se pokazati: ako je funkcija derivabilna i rastuća na otvorenom intervalu, onda je $f'(x) \geq 0$ za sve točke tog intervala. Analogna tvrdnja vrijedi za padajuće funkcije.

Primjer 2.49 Promotrimo logističku funkciju $f(x) = \frac{K}{1+ce^{-mx}}$, $K, c, m > 0$. Očito je f neprekidna na $[0, \infty)$ i derivabilna na $(0, \infty)$. Vidjeli smo već da je $f'(x) = \frac{mcKe^{-mx}}{(1+ce^{-mx})^2} > 0$, $\forall x > 0$. Dakle, f raste na $[0, \infty)$.

Primjer 2.50 Monodova funkcija $f(x) = \frac{ax}{k+x}$, $a, k > 0$, također raste na $[0, \infty)$. Naime, $f'(x) = \frac{ak}{(k+x)^2} > 0$, $\forall x > 0$.

Primjer 2.51 Funkcija $L(x) = L_\infty - (L_\infty - L_0)e^{-kx}$, $k, L_0, L_\infty > 0$, $L_0 < L_\infty$, koja opisuje Bartalanffyjev modela rasta riba također je rastuća na $[0, \infty)$. Naime, $L'(x) = k(L_\infty - L_0)e^{-kx} > 0$, $\forall x > 0$.

Sad se okrećemo daljnjem istraživanju lokalnih ekstrema. Prema Fermatovom teoremu, nužan uvjet da bi točka x bila točka lokalnog ekstrema derivabilne funkcije je $f'(x) = 0$. Točke s ovim svojstvom se zovu kritične i znamo da su one samo kandidati za točke lokalnih ekstrema. Više se može reći ako znamo da je funkcija derivabilna u okolini kritične točke.

Teorem 2.52 *Neka je f derivabilna na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$.*

(1) Ako je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x_0) = 0$ i $f'(x) < 0$ za sve $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, onda je x_0 točka lokalnog maksimuma za f.

(2) Ako je $f'(x) < 0$ za sve $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, $f'(x_0) = 0$ i $f'(x) > 0$ za sve $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, onda je x_0 točka lokalnog minimuma za f.

Dokaz: U prvom slučaju f je, prema teoremu 2.47, rastuća lijevo od x_0 i padajuća desno od x_0; dakle, x_0 je točka lokalnog maksimuma.

Preciznije citiranje teorema 2.47 pokazalo bi da je x_0 čak točka strogog lokalnog maksimuma za f.

Argumentacija za drugu tvrdnju je analogna. □

Primjer 2.53 Istražimo područja rasta i pada i nađimo točke lokalnih ekstrema (ako postoje) funkcije $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

Jer je $f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$, vidimo da su kritične točke $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2$. Nadalje, rješenje nejednadžbe $f'(x) < 0$ je skup $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$. Prema teoremu 2.47 na tom skupu f pada. Osim toga, proizlazi da je rješenje nejednadžbe $f'(x) > 0$ skup $(-1, 0) \cup (2, \infty)$ te, prema teoremu 2.47, na to skupu f raste. Ako pad funkcije na nekom skupu naznačimo simbolom $\searrow$ i, analogno, rast naznačimo simbolom $\nearrow$, ponašanje funkcije zorno možemo predočiti sljedećim dijagramom:

$$\begin{array}{cccc} \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ (-\infty, -1) & (-1, 0) & (0, 2) & (2, \infty) \end{array}$$

Primjenom teorema 2.52 sad lako zaključujemo da su točke -1 i 2 točke lokalnih minimuma, dok je 0 točka lokalnog maksimuma.

Definicija 2.54 *Neka je funkcija f derivabilna na otvorenom intervalu (moguće i beskonačnom) I. Kažemo da je f konveksna na I ako je f' rastuća funkcija na I. Kažemo da je f konkavna na I ako je f' padajuća funkcija na I.*

Primjer 2.55 Funkcija $f(x) = x^2$ je konveksna na $\mathbb{R}$ jer je $f'(x) = 2x$ je rastuća funkcija na $\mathbb{R}$.

Za funkciju $f(x) = x^3$ imamo $f'(x) = 3x^2$ što je padajuća funkcija na $(\infty, 0)$ i rastuća funkcija na $(0, \infty)$. Dakle, $f(x) = x^3$ je konkavna na intervalu $\mathbb{R}^-$ i konveksna na intervalu $\mathbb{R}^+$.

Napomena 2.56 (a) Ako je funkcija f konveksna na otvorenom intervalu I, funkcija f' raste na I. Kako je $f'(x)$ koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $(x, f(x))$, pokazaje se da je na intervalu I na kojem je f konveksna graf funkcije f uvijek (lokalno) iznad tangente na graf. (Predočite si graf funkcije $f(x) = x^2$.)

Obratno, u intervalu konkavnosti graf funkcije je uvijek (lokalno) ispod tangente na graf. (Usporedite graf funkcije $f(x) = x^3$ lijevo i desno od y-osi.)

(b) Gornja definicija konkavnosti i konveksnosti nije najopćenitija. Ovi pojmovi se mogu uvesti i za funkcije koje nisu nužno derivabilne.

Intervali konveksnosti i konkavnosti funkcije f su, dakle, intervali rasta i pada funkcije f'. Ako je ta funkcija derivabilna, tj. ako je originalna funkcija f dva puta derivabilna, intervali rasta i pada funkcije f' se jednostavno određuju uz pomoć teorema 2.47.

Korolar 2.57 *Neka je f dva puta derivabilna na otvorenom intervalu I.*

(1) Ako je $f''(x) > 0, \forall x \in I$ onda je f konveksna na I.

(2) Ako je $f''(x) < 0, \forall x \in I$ onda je f konkavna na I.

Propozicija 2.58 *Neka je funkcija f dva puta derivabilna na otvorenom intervalu I, neka je $x_0 \in I$ kritična točka za f.*

(1) Ako je $f''(x_0) > 0$ onda je x_0 točka lokalnog minimuma za f.

(2) Ako je $f''(x_0) < 0$ onda je x_0 točka lokalnog maksimuma za f.

Dokaz: (1) Po definiciji druge derivacije imamo $f''(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$. Kako je prema pretpostavci $f'(x_0) = 0$, slijedi $f''(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0}$. Nadalje, kako je $f''(x_0) > 0$, možemo pisati $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{x - x_0} > 0$. Ako je $x < x_0$, nazivnik je negativan, pa zbog pozitivnosti limesa, i brojnik mora biti negativan za x u blizini točke x_0. Dakle, prema teoremu 2.47, f je padajuća lijevo od x_0. Analogno vidimo da je f rastuća desno od x_0. To upravo znači da je x_0 točka lokalnog minimuma za f.

Dokaz druge tvrdnje ide analogno. Alternativno, i ovdje možemo prijeći na funkciju $-f$ i iskoristiti već dokazanu prvu tvrdnju. □

Napomena 2.59 Važno je uočiti da propozicija pruža dovoljne uvjete za utvrđivanje karaktera kritičnih točaka, no ne i nužne.

Na primjer, lako je vidjeti da funkcija $f(x) = x^4$ ima u $x_0 = 0$ lokalni minimum, a pritom ne vrijedi $f''(x_0) > 0$.

Zato je bolje kritične točke proučavati kako smo to učinili u primjeru 2.53 promatrajući tok funkcije. Metoda koju pruža propozicija 2.58 jest možda brža, ali ne dovodi uvijek do odgovora (kao što pokazuje primjer funkcije $f(x) = x^4$).

Definicija 2.60 *Neka je f derivabilna na otvorenom intervalu I. Kažemo da je točka $c \in I$ točka infleksije za f ako f u točki c prelazi iz intervala konkavnosti u interval konveksnosti ili obratno.*

Primjer 2.61 (a) Očito, točka $c = 0$ je točka infleksije za funkciju $f(x) = x^3$.

(b) Funkcija $f(x) = x^4$ je konveksna na $\mathbb{R}$ jer njezina derivacija $f'(x) = 4x^3$ raste na cijelom skupu $\mathbb{R}$. Dakle, f nema točaka infleksije. Primijetimo da je $f''(0) = 0$.

(c) Odredimo intervale konkavnosti i konveksnosti te (ako postoje) točke infleksije za funkciju $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 12x - 11$.

Nalazimo $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x + 12$ i $f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 12(x^2 + x - 2) = 12(x - 1)(x + 2)$. Preostaje riješiti nejednadžbe $f''(x) < 0$ i $f''(x) > 0$.

U osnovi, postupamo kao u primjeru 2.53 samo što sad analiziramo predznak druge derivacije (a ne prve).

Vidimo da je $f''(x) < 0$ za $x \in (-2, 1)$ pa je na tom intervalu funkcija konkavna. Dalje, $f''(x) > 0$ za $x \in \cup(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ pa je na toj uniji intervala funkcija konveksna. Po definiciji sada proizlazi da su točke -2 i 1 točke infleksije za f.

Napomena 2.62 Može se pokazati: ako je f dva puta derivabilna i ima u točki c infleksiju onda je $f''(c) = 0$. Međutim, uvjet $f''(c) = 0$ nije dovoljan da se zaključi kako je c točka infleksije za f (usp. (b) u prethodnom primjeru.)

Opišimo sada metodu nalaženja asimptota grafa funkcije. Neformalno govoreći, asimptota je tangenta na graf "u beskonačnosti". Bazično, imamo tri moguće situacije:

Vertikalna, horizontalna i kosa asimptota

Definicija 2.63 *Pravac $y = b$ je horizontalna asimptota grafa funkcije f ako je ili $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$ ili $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.*

Pravac $x = c$ je vertikalna asimptota grafa funkcije $f(x)$ ako je $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \infty$ ili $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ ili $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \infty$ ili $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty$ (pri čemu oznaka $x \to c^+$, odnosno $x \to c^-$ podrazumijeva da se radi o jednostranim limesima s desna, odnosno s lijeva u odnosu na točku c).

Pravac $y = kx+l$ je kosa asimptota grafa funkcije f ako vrijedi $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(kx+l)) = 0$ ili $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (kx + l)) = 0$.

Primjer 2.64 (a) Za logističku funkciju $f(x) = \frac{K}{1+ce^{-(mx+b)}}$, $K, c, m > 0$, imamo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = K$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. To znači da je pravac $y = 0$ horizontalna asimptota grafa ove funkcije s lijeve strane (u "negativnoj beskonačnosti"), dok je pravac $y = K$ horizontalna asimptota s desne strane (u "pozitivnoj beskonačnosti").

(b) Za $f(x) = \frac{1}{x}$ pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota.

(c) Neka je $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$, $x \neq 1$. Nakon dijeljenja vidimo da je $f(x) = x + 1 - \frac{3}{x-1}$ pa slijedi da je $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x\to\infty}(-\dfrac{3}{x-1}) = 0$. Dakle, pravac $y = x + 1$ je kosa asimptota.

Ovaj primjer je tipičan. Kosa asimptota će se uvijek pojaviti ako je f racionalna funkcija čiji brojnik ima stupanj za jedan veći od stupnja nazivnika.

Može se pokazati: ako f ima kosu asimptotu, tada postoji bar jedan od limesa $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Do sada izvedene činjenice omogućuju nam da ispitamo i skiciramo graf svake derivabilne funkcije. Nakon što odredimo prirodnu domenu, intervale rasta i pada, točke lokalnih ekstrema, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije i asimptote, obično smo u stanju vrlo precizno (u kvalitativnom smislu) skicirati graf dane funkcije.

Primjer 2.65 Neka je $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$. Prirodna domena je $\mathbb{R}$. Dalje, $f'(x) = 2x^2 - 2 = 2(x+1)(x-1)$ odmah pokazuje da f raste na $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ i pada na $(-1, 1)$. Jasno je da su -1 i 1 kritične točke i iz toka funkcije je odmah vidljivo da je -1 točka lokalnog maksimuma, dok je 1 točka lokalnog minimuma. Uočimo da je $f(-1) = \frac{7}{3}$ i $f(1) = -\frac{1}{3}$. Nadalje, $f''(x) = 4x$ pa vidimo da je f konkavna na intervalu $(-\infty, 0)$ i konveksna na $(0, \infty)$, te da je 0 točka infleksije. Usput, uočimo da je $f''(-1) = -4$ i $f''(1) = 4$ što je još jedna potvrda činjenice da je -1 točka lokalnog maksimuma, dok je 1 točka lokalnog minimuma.

Naposljetku, vidljivo je da ovdje asimptoti nema, no korisno je primijetiti da vrijedi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Graf funkcije $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$

Derivacije imaju i brojne druge primjene. Spomenut ćemo samo još jednu. Često se pri računanju limesa pojave "neodređeni oblici" poput $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Na primjer, pogledajmo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x}$. Ovaj limes ne možemo izračunati primjenom teorema o limesu kvocijenta jer kad $x \to \infty$ i brojnik i nazivnik teže u ∞ i čitav razlomak teži neodređenom obliku $\frac{\infty}{\infty}$. To nije greška, nego samo znak da u ovom primjeru limes ne možemo računati gledajući posebno brojnik, posebno nazivnik.

Ako su, međutim, funkcije derivabilne postoji važan teorem koji rješava mnoge takve situacije. Sljedeći rezultat navodimo bez dokaza.

Teorem 2.66 *(L'Hospitalovo pravilo.) Neka su f i g derivabilne funkcije takve da vrijedi* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ *ili* $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$*. Ako je* $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ *onda je i* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Napomena 2.67 Teorem vrijedi i za $a = -\infty$ i $a = \infty$.

U osnovi, teorem kaže: ako je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ "teško" izračunati onda možemo pokušati izračunati $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$; ukoliko taj drugi limes postoji i znamo ga izračunati, to je ujedno i rezultat polaznog limesa.

Primjer 2.68 (a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^6 - 64}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2} \frac{6x^5}{2x} = 48.$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 0.$

(c) $\lim_{x\to \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$

Zadaci: 6. domaća zadaća

1. Izračunajte intervale rasta i pada te konkavnosti i konveksnosti za sljedeće funkcije: (a) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x + 4$, (b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, (c) $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, (d) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.
2. Pretpostavimo da je visina stabla kao funkcija starosti dana formulom $v(x) = 39e^{-\frac{10}{x}}$, $x > 0$. Pokažite da je v zaista rastuća funkcija na skupu $\mathbb{R}^+$. Odredite maksimalnu visinu koju stablo može doseći u ovom modelu. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije v.
3. Odredite točke infleksije logističke funkcije $f(x) = \frac{100}{1+3e^{-2x}}$.
4. Odredite prirodnu domenu, nul-točke, intervale rasta, pada, konkavnosti i konveksnosti, lokalne ekstreme, točke infleksije i asimptote te skicirajte graf sljedećih funkcija: (a) $f(x) = \frac{8}{1+3e^{-2x}}$, (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, (c) $f(x) = \ln(x^2+1)$, (d) $f(x) = \frac{x}{x-1}$, (e) $f(x) = \frac{2x^2-5}{x+2}$.
5. Pretpostavimo da je brzina rasta neke populacije dana jednadžbom $f(N) = N(1 - (\frac{N}{K})^r)$, $N \geq 0$, gdje je N veličina populacije, K pozitivna konstanta, a r parametar (konstanta) veći od 1. Odredite veličinu populacije za koju je brzina rasta maksimalna.

6. Kako treba odabrati dimenzije pravokutnog vrta kojeg moramo ograditi sa (zadanih) 1200 m žice, tako da mu površina bude maksimalna?

   Rješenje. Ovakvi i slični optimizacijski problemi tipično se rješavaju na sljedeći način.

   Označimo duljine stranica traženog pravokutnika s a i b (u metrima). S obzirom na zadani opseg, treba vrijediti $2a + 2b = 1200$. Površina takvog pravokutnika je $P = ab$. Iz jednakosti $2a + 2b = 1200$ slijedi da je $b = 600 - a$. Sad je površina P zapravo funkcija duljine stranice a i imamo $P(a) = a(600 - a)$. Treba odrediti globalni maksimum ove funkcije na intervalu $[0, 600]$. (Primijetimo da po prirodi zadatka zapravo imamo $0 < a < 600$, no uključili smo granice kako bismo problem sveli na traženje maksimuma neprekidne funkcije na segmentu. Funkcija $P(a)$ je zaista neprekidna.) Sad je $P'(a) = 600 - 2a$ pa vidimo da je $a = 300$ jedina kritična točka. Dakle, točke globalnih ekstrema funkcije P na segmentu $[0, 600]$ nalaze se među točkama 0, 600 (to su rubne točke koje uvijek moramo zasebno provjeriti), 300. Kako je $P(0) = P(600) = 0$ i $P(300) = 90000$, vidimo da je točka $a = 300$ tražena točka. Odavde je i $b = 300$ i izlazi da traženi pravokutnik treba imati oblik kvadrata.

7. (Fermatov princip refleksije) Neka je u ravnini dan pravac p i točke A i B s iste strane pravca p. Odredite točku X na p tako zbroj duljina segmenata AX i XB bude minimalan.

   Rješenje. Postavimo p u x-os, neka je $A = (a_1, a_2)$ i $B = (b_1, b_2)$. Bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da je $b_1 \geq a_1$. Ako točka X ima koordinate $(x, 0)$ onda je zbroj duljina segmenata AX i XB funkcija od x dana s $f(x) = \sqrt{(x - a_1)^2 + a_2^2} + \sqrt{(b_1 - x)^2 + b_2^2}$. Pokazuje se: ako s α i β označimo kutove koje pravci XA i XB zatvaraju s x-osi, onda je $f'(x) = \cos\alpha - \cos\beta$. Dakle, dobivamo stacionarnu točku ako i samo ako je $\cos\alpha = \cos\beta$ što je ekvivalentno (zbog $\alpha, \beta \in [0, \pi]$) s $\alpha = \beta$. Lako se vidi da je odgovarajuća točka x_0 točka minimuma pa se izvodi zaključak: "put" je minimalan ako i samo ako je kut "ulaska" jednak kutu "refleksije".

   Napomena. Postoji i jednostavan geometrijski argument koji pokazuje da je ovako dobiveno rješenje točno. Neka je A_1 točka simetrična točki A s obzirom na pravac p (tj. x-os). Jasno je da je zbroj duljina segmenata AX i XB jednak zbroju duljina segmenata A_1X i XB, a zbog nejednakosti trokuta zbroj duljina segmenata A_1X i XB je minimalan kad točke A_1, X, B leže na istom pravcu.

8. Kamion će prevesti dionicu od 600 km vozeći auto-cestom konstantnom brzinom od x kilometara na sat, $60 \leq x \leq 120$. Pretpostavimo da je potrošnja goriva funkcija brzine, te iznosi $4 + \frac{x^2}{1200}$ litre po satu. Nadalje, pretpostavimo da je cijena goriva $1,2$ eura po litri i da je vozač za ovu dionicu plaćen P eura po satu. Nađite brzinu uz koju će ukupni troškovi opisanog transporta biti minimalni ako je (a) $P = 0$, (b) $P = 1$, (c) $P = 4$, (d) $P = 6$, (e) $P = 8$.

9. Odredite dimenzije čaše u obliku uspravnog valjka tako da joj volumen bude $\frac{1}{2}$ l, a oplošje minimalno.

10. Prinos neke žitarice na određenom terenu iskazan je kao funkcija koncentracije dušika u tlu formulom $P(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \geq 0$. Odredite onu razinu koncentracije dušika x_0 za koju će prinos biti maksimalan. Uputa: uočite da se ovdje opet radi o problemu nalaženja globalnog ekstrema funkcije, no sada ne na segmentu nego na beskonačnom intervalu $[0, \infty)$. Zato teorem 2.34 ovdje nije primjenjiv. Zadatak treba riješiti ispitivanjem toka, lokalnih ekstrema i skiciranjem grafa funkcije $P(x)$.

11. Gompertzova krivulja rasta često služi kao model rasta (osobito ljudske) populacije, a dana je formulom
$$N(t) = Ke^{-ae^{-bt}},\ t \geq 0$$
pri čemu su K, a, b pozitivne konstante.

    (a) Pokažite da je $N(0) = Ke^{-a}$ odakle je $a = \ln(\frac{K}{N_0})$ ako smo označili $N_0 = N(0)$.

    (b) Pokažite da je $y = K$ horizontalna asimptota i da je $N(t) < K$ ako je $N_0 < K$.

    (c) Pokažite da je $N'(t) = bN(t)(\ln K - \ln(N(t)))$ te da je $N''(t) = bN'(t)(\ln K - \ln(N(t)) - 1)$.

    (d) Koristeći prethodne rezultate dokažite da je $N(t)$ rastuća funkcija ako je $N_0 < K$.

    (e) Odredite intervale konkavnosti i konveksnosti te točke infleksije funkcije $N(t)$, $t > 0$.

    (f) Skicirajte graf funkcije $N(t)$, $t \geq 0$.

    (g) Skicirajte graf (odredivši sve potrebne elemente) logističke funkcije s istim parametrima:
$$f(t) = \frac{K}{1 + \frac{K-N_0}{N_0}e^{-mx}}$$
te usporedite grafove ovih dviju funkcija. (Napomena. Parametri a i b iz Gompertzove funkcije i parametar m iz logističke funkcije nisu direktno vezani. Može se razmisliti o tome kako bi valjalo odrediti m ako su a i b zadani tako da ove dvije krivulje budu čim sličnije. Treba uočiti da je smisao veličina N_0 i K u oba slučaja isti; to su naime početna brojnost populacije i teorijski (asimptotski) maksimum.

Napomene i komentari

1.

Dokaz teorema 2.34. Dokažimo najprije tvrdnju za maksimum. Rezultat za minimum će onda slijediti primjenom dokazanoga na funkciju $-f$ (jer minimum za f je maksimum za $-f$).

U dokazu ćemo konstruirati niz segmenata $I_n = [a_n, b_n] \subseteq [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, takav da svaki segment $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+}]$ bude ili lijeva ili desna polovica prethodnog $I_n = [a_n, b_n]$.

Odaberimo $I_1 = [a, b]$; dakle, $a_1 = a$ i $b_1 = b$. Označimo s c_1 središnju točku: $c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Ako postoji $x \in [a_1, c_1]$ takav da je $f(x) \geq f(t)$, $\forall t \in [c_1, b_1]$, uzet ćemo $a_2 = a_1$ i $b_2 = c_1$. U protivnom, ako za svaki $x \in [a_1, c_1]$ postoji $t \in [c_1, b_1]$ takav da je $f(t) > f(x)$, odaberemo $a_2 = c_2$ i $b_2 = b_1$.

U istom duhu nastavimo dalje. Ako smo odabrali $I_n = [a_n, b_n]$, označimo $c_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$. Ako postoji $x \in [a_n, c_n]$ takav da je $f(x) \geq f(t)$, $\forall t \in [c_n, b_n]$, uzet ćemo $a_{n+1} = a_n$ i $b_{n+1} = c_n$. U protivnom, ako za svaki $t \in [a_n, c_n]$ postoji $x \in [c_n, b_n]$ takav da je $f(x) > f(t)$, odaberemo $a_{n+1} = c_n$ i $b_{n+1} = b_n$.

Ovako konstruiran niz segmenata $I_n = [a_n, b_n]$ ima sljedeća svojstva:

(a) Duljina od I_{n+1} iznosi $\frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{4}(a_{n-1} - b_{n-1}) = \ldots = \frac{1}{2^n}(b - a)$,

(b) Ne postoji t izvan I_{n+1} za koji vrijedi $f(t) \geq f(x)$, $\forall x \in I_{n+1}$.

Neka je $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Očito, $a_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zato postoji $s = \sup A$ i vrijedi $s \leq b$. Zbog $s \geq a_1$ imamo i $s \geq a$ pa zaključujemo da je $s \in [a, b]$. Dokazat ćemo da je $f(x) \leq f(s)$, $\forall x \in [a, b]$.

Pretpostavimo da nije tako. Tada postoji točka $y \in [a, b]$ sa svojstvom $f(y) > f(s)$. Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}(f(y) - f(s)) > 0$. Tada je

$$f(y) = f(s) + f(y) - f(s) = f(s) + 2\varepsilon. \tag{2}$$

Zbog neprekidnosti funkcije f u točki s za taj ε postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(x) < f(s) + \varepsilon, \ \forall x \in (s - \delta, s + \delta) \cap [a, b]. \tag{3}$$

Smijemo dodatno pretpostaviti da je δ toliko malen da $y \notin (s - \delta, s + \delta)$.

Zbog svojstva (a) imat ćemo $I_{n+1} \subseteq (s - \delta, s + \delta)$ čim je n dovoljno velik da bude $\frac{1}{2^n}(b - a) < 2\delta$. No sada (2) i (3) pokazuju da je $f(y) \geq f(x)$, $\forall x \in I_{n+1}$, što je u kontradikciji s (b). $\square$

3 Integral

3.1 Određeni integral

Promotrimo parabolu $f(x) = x^2$ i dio ravnine omeđen grafom ove funkcije, x-osi, te pravcima $x = 0$ i $x = a$, $a > 0$. Željeli bismo izračunati površinu tog dijela ravnine. Ideja je da tu površinu aproksimiramo površinama pravokutnika na sljedeći način:

Uzmimo proizvoljan prirodan broj n i pogledajmo točke $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}a, x_2 = \frac{2}{n}a, \ldots, x_{n-1} = \frac{1}{n-1}a, x_n = a$ koje segment $[0, a]$ dijele na n jednakih dijelova duljine $\frac{1}{n}a$. Nad svakim podsegmentom $[\frac{k}{n}a, \frac{k+1}{n}a]$ pogledamo pravokutnik visine $f(\frac{k}{n}a) = \frac{k^2}{n^2}a^2$, $k = 0, 1, 2\ldots, n-1$. (Očito, ovaj sistem pravokutnika upisan je u dio ravnine čiju površinu računamo.) Površine tih pravokutnika su $\frac{1}{n}a\frac{k^2}{n^2}a^2 = \frac{a^3}{n^3}k^2$, $k = 0, 1, 2\ldots, n-1$.

Dakle, suma površina svih pravokutnika iznosi

$$S = \frac{a^3}{n^3}(1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2). \tag{4}$$

Sad uočimo da vrijedi[5]

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{5}$$

Uvrštavanjem u (4) dobivamo $S = \frac{a^3}{n^3}\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$, odnosno

$$S = \frac{a^3}{6}(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n}). \tag{6}$$

Prirodno je sumu koju smo dobili označiti sa S_n jer rezultat očito ovisi o broju podintervala n koji smo na početku odabrali. Nadalje, jasno je da ćemo birajući sve veći i veći n sumom S_n sve točnije aproksimirati traženu površinu. Intuitivno je jasno da je zato

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6}(1 - \frac{1}{n})(2 - \frac{1}{n}).$$

Koristeći pravila o zbroju i umnošku limesa nizova odavde dobivamo

$$P = \frac{a^3}{3}. \tag{7}$$

[5]Dokaz ove jednakosti je u uvršten u komentare i napomene na kraju poglavlja.

U osnovi, ovakva metoda računanja površina bila je poznata već u antičkom svijetu. Moderna teorija izgrađena je u 18. i 19. stoljeću, no počiva na istim idejama. U općoj situaciji dozvolit ćemo pri sličnim izračunima da širine pravokutnika variraju, a funkcija čiji graf sudjeluje u definiciji dijela ravnine kojeg promatramo moći će poprimati i negativne vrijednosti.

Neka je f neprekidna[6] funkcija na segmentu $[a,b]$. Za $n \in \mathbb{N}$ odaberimo $n+1$ točku iz $[a,b]$: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Na ovaj način segment $[a,b]$ smo podijelili u n podsegmenata: $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ... $[x_{n-1}, x_n]$. Skup $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ se naziva particija segmenta $[a,b]$. Označimo s $l([x_{k-1}, x_k])$ duljinu tog segmenta; $l([x_{k-1}, x_k]) = x_k - x_{k-1}$, a s $l(P)$ najveću od tih duljina: $l(P) = \max\{l([x_0, x_1]), \ldots, l([x_{n-1}, x_n])\}$.

Nadalje, u svakom $[x_{k-1}, x_k]$ odaberemo točku c_k i uočimo pravokutnik s osnovicom $[x_{k-1}, x_k]$ i visinom $f(c_k)$.

Definirajmo broj S_P kao zbroj površina tih n pravokutnika:

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) l([x_{k-1}, x_k]) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Broj S_P se naziva Riemannova suma funkcije f na segmentu $[a,b]$. Jasno je da S_P ovisi i o P i o izboru točaka c_k. U početnom primjeru imali smo $P = \{0, \frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \ldots \frac{n-1}{n}a, a\}$, $l(P) = \frac{1}{n}$ i $c_k = \frac{k-1}{n}a$.

U općoj situaciji, za razliku od početnog primjera, može se dogoditi da je $f(c_k) < 0$, pa će i pripadajući pribrojnik $f(c_k)(x_k - x_{k-1})$ u S_P biti negativan.

Kao i u prethodnom primjeru zaključujemo: ako particiju P profinimo, tj. ako gledamo particiju koja će se sastojati od većeg broja točaka (čime segment $[a,b]$ dijelimo u veći broj podsegmenata), aproksimacija tražene površine brojem S_P će postajati točnija. Uočimo da profinjenjem particije i broj $l(P)$ postaje sve manji. Mogli bismo, na primjer, birati particije P_n, za $n \in \mathbb{N}$ tako da bude $l(P_{n+1}) < l(P_n)$ i onda promatrati $\lim\limits_{n\to\infty} S_{P_n}$. Radi jednostavnosti ispustit ćemo indeks n i pisati $\lim\limits_{l(P)\to 0} S_P$. To nas dovodi do definicije određenog integrala.

Definicija 3.1 *Kažemo da je funkcija f integrabilna na segmentu $[a,b]$ ako postoji $\lim\limits_{l(P)\to 0} S_P$, pri čemu je $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$, $l(P) = max\{l([x_0, x_1]), \ldots, l([x_{n-1}, x_n])\}$, $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, i $S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$.*

[6] Ovdje ćemo se ograničiti samo na neprekidne funkcije. Integral se inače može uvesti i za funkcije koje nisu nužno neprekidne.

Ako je f integrabilna na $[a, b]$ onda se ovaj limes naziva Riemannov integral (ili samo integral) funkcije f na segmentu $[a, b]$ i označava s $\int_a^b f(x)dx$.

Napomena 3.2 (a) Tradicionalno se ovako definiran integral zove određeni integral u granicama od a do b. Pritom se kaže da je f podintegralna funkcija. Notacija je Leibnizova.

(b) Znak dx sam za sebe nema smisla, ali sugerira da je x varijabla te da integriramo upravo s obzirom na tu varijablu. Simbol dx osim toga sugerira da promatramo pravokutnike sa sve manjim osnovicama - to je u stvari uloga slova d u oznaci dx. Inače, broj $\int_a^b f(x)dx$ ne ovisi o x, jednako bismo mogli pisati s istim značenjem i $\int_a^b f(t)dt$.

Formulacija "ako limes postoji" u prethodnoj definiciji je nužna; tako je uvijek kad se neki pojam definira pomoću limesa ako nema apriornog razloga da navedeni limes postoji. U uvodnom primjeru vidjeli smo da taj limes zaista postoji za funkciju $f(x) = x^2$ na segmentu $[0, a]$.

Sljedeći teorem je fundamentalan u teoriji integracije.

Teorem 3.3 *Svaka neprekidna funkcija f na svakom segmentu $[a, b]$ je integrabilna.*

Ovaj teorem nećemo dokazivati. Precizna i potpuna argumentacija nije sasvim jednostavna niti kratka i svakako izlazi iz okvira ovih naših razmatranja. No, možemo uočiti: ako je f neprekidna na $[a, b]$, neprekidna je i na svakom podsegmentu $[x_{k-1}, x_k]$. Prema teoremu 2.34 postoje minimum i maksimum m_k i M_k na segmentu $[x_{k-1}, x_k]$. Sad možemo definirati $\underline{S_P} = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ i $\overline{S_P} = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$; ovi brojevi se zovu donja i gornja Riemannova suma. Kako je $m_k \le f(c_k) \le M_k$, $\forall k = 1, \dots, n$, imamo $\underline{S_P} \le S_P \le \overline{S_P}$, za svaku particiju P. Nije teško zaključiti da se brojevi $\overline{S_P}$ smanjuju, a brojevi $\underline{S_P}$ rastu kad profinjujemo particiju (tj. kad $l(P) \to 0$). Pokazuje se, kad je funkcija integrabilna, kao što neprekidne funkcije jesu, da zapravo vrijedi

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{l(P)\to 0} S_P = \lim_{l(P)\to 0} \underline{S_P} = \lim_{l(P)\to 0} \overline{S_P}.$$

Za kraj ovih uvodnih razmatranja samo još istaknimo da sama definicija, odnosno činjenica da $\int_a^b f(x)dx$ postoji ne upućuje na to kako da navedeni limes (integral) izračunamo. Funkcije poput $f(x) = x^2$ čije određene integrale znamo izračunati direktnom primjenom definicije zaista su rijetke. Spomenimo tek da to svakako možemo učiniti za konstante. Lako se vidi da je $\int_a^b kdx = k(b - a)$. Za računanje integrala složenijih funkcija očito nam trebaju metode efikasnije od direktne primjene definicije.

Napomena 3.4 Integral $\int_a^b f(x)dx$ se interpretira kao "površina s predznakom".

Ako je $f(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$ onda je $\int_a^b f(x)dx$ jednak površini dijela ravnine omeđenog grafom funkcije f, x-osi i vertikalnim pravcima $x = a$, $x = b$. Ako je $f(x) \le 0$, $\forall x \in [a, b]$, onda je $\int_a^b f(x)dx$ jednak negativnom iznosu površine tog dijela ravnine.

Ako f mijenja predznak na segmentu $[a,b]$ onda je $\int_a^b f(x)dx$ zapravo razlika $A_+ - A_-$ pri čemu je A_+ površina dijela ravnine između grafa funkcije f i x-osi na dijelu segmenta $[a,b]$ gdje je $f(x) \geq 0$, dok je A_- površina dijela ravnine između grafa funkcije f i x-osi na dijelu segmenta $[a,b]$ gdje je $f(x) < 0$. U skladu s tim pokazat će se, na primjer, da je $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$.

Ukoliko zaista želimo izračunati površinu dijela ravnine omeđenog grafom neprekidne funkcije f, x-osi, i pravcima $x = a$ i $x = b$ pomoću integrala, onda segment moramo podijeliti na podsegmente na kojima je predznak funkcije stalan, na svakom od tih podsegmenata izračunati $\int_c^d f(x)dx$, te na kraju zbrojiti apsolutne vrijednosti tih integrala.

Površina s predznakom

Okrenimo se sada tehničkim rezultatima.

Propozicija 3.5 *(Svojstva određenog integrala.) Neka su f i g neprekidne funkcije na segmentu $[a,b]$, $k \in \mathbb{R}$ konstanta i $c \in [a,b]$. Tada vrijedi:*

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;

(2) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

(3) $\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.

Dokaz: Sve tri tvrdnje slijede izravno iz definicije određenog integrala. □

Napomena 3.6 Uz iste pretpostavke, ovim svojstvima se obično pridružuju i

(4) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

(5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Ove dvije jednakosti ne izlaze iz definicije integrala, nego se radi o dogovorima koje uvodimo iz tehničkih razloga. Taj je dogovor konzistentan s prethodnim svojstvima. Na primjer, svojstvo (5) povlači da je $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = 0$ što također dobivamo kombiniranom primjenom svojstava (1) i (4): $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$.

Primjer 3.7 $\int_1^4 (3x^2+2)dx = 3\int_1^4 x^2dx + \int_1^4 2dx = 3\int_1^4 x^2dx + 6$.

Kako je $\int_0^4 x^2dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^4 x^2dx$, slijedi da je $\int_1^4 x^2dx = \int_0^4 x^2dx - \int_0^1 x^2dx = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{63}{3}$.

Odavde dobivamo ukupni rezultat: $\int_1^4 (3x^2+2)dx = 69$.

Napomena 3.8 Za neprekidne funkcije f i g na segmentu $[a,b]$ još vrijedi:

(6) Ako je $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ onda je i $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(7) Ako $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ onda je i $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

(8) Ako je $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a,b]$ onda je $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Posebno, $-\int_a^b f(x)dx \leq -m(b-a)$, pa ako označimo $C = \max\{-m, M\}$, imamo i $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq C(b-a)$.

Svojstvo (6) je očito iz definicije, a svojstva (7) i (8) su njegove direktne posljedice.

Primjer 3.9 $\int_0^\pi \sin x dx \leq \pi$.

Primjer 3.10 Odredimo vrijednost $a \geq 0$ za koju će integral $\int_0^a (1-x^2)dx$ biti najveći.

Imamo li na umu da $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu s predznakom, zaključujemo da $\int_0^a (1-x^2)dx$ raste kad je $a < 1$ i $a \to 1$. Zato je $\int_0^1 (1-x^2)dx > \int_0^a (1-x^2)dx$, $\forall a < 1$.

Ako je $a > 1$ onda možemo pisati $\int_0^a (1-x^2)dx = \int_0^1 (1-x^2)dx + \int_1^a (1-x^2)dx < \int_0^1 (1-x^2)dx$ jer je $\int_1^a (1-x^2)dx$ negativan broj.

Rješenje je, dakle, $a = 1$.

Teorem 3.11 *(Osnovni teorem diferencijalnog računa, I dio.)*
Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ te neka je $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definirana s $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Tada je F neprekidna na $[a,b]$ i derivabilna na (a,b) te vrijedi $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Dokaz: Prvo uočimo da je zbog neprekidnosti funkcije f funkcija F dobro definirana (u smislu da $\int_a^x f(t)dt$ postoji) za sve $x \in [a,b]$. Odmah vidimo i da je $F(a) = 0$.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Prema teoremu 2.34, za fiksne x i h postoje m i M takvi da je $m \le f(t) \le M$, $\forall t \in [x, x+h]$. Prema napomeni 3.8(8) sada je $mh \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le Mh$, odnosno $m \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \le M$.

Broj $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$ se, dakle, nalazi u segmentu $[m, M]$. Jer je funkcija f neprekidna na segmentu $[x, x+h]$, ona na tom segmentu poprima i sve međuvrijednosti između m i M, pa tako i $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$. To znači da postoji $c_h \in [x, x+h]$ takav da je $f(c_h) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$.

Zbog $x \le c_h \le x+h$, kad $h \to 0$ imat ćemo $c_h \to x$. Jer je f neprekidna funkcija, to povlači $f(c_h) \to f(x)$. Sve zajedno, zaključujemo da je zaista $F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0} f(c_n) = f(x)$.

Preostalo je pokazati da je F neprekidna u točkama a i b. Prema napomeni 3.8(8) imamo $|F(b) - F(x)| = \left|\int_x^b f(t)dt\right| \le C(b-x)$ pri čemu je $C = \max\{-m, M\}$, $m = \min\{f(t) : t \in [x,b]\}$ i $M = \max\{f(t) : t \in [x,b]\}$. Odavde je očito da $F(x) \to F(b)$ kada $x \to b$.

Neprekidnost funkcije F u točki a pokaže se analogno. □

Napomena 3.12 Uzmimo proizvoljnu funkciju f definiranu na skupu D i pretpostavimo da je f neprekidna na segmentu $[a,b] \subseteq D$.

I općenito, mimo razmatranja o integralu, mogli smo postaviti pitanje postoji li funkcija g derivabilna na intervalu (a,b) i takva da je $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$. Takva funkcija g se onda može nazvati antiderivacija funkcije f. Naravno, ne vidi se unaprijed razlog zbog kojeg bi proizvoljna funkcija f imala antiderivaciju, tj. zbog kojeg bi f bila nečija derivacija.

U tom svjetlu je tvrdnja prethodnog teorema zaista snažna i donekle iznenađujuća (jer odgovor na postavljeno pitanje dobivamo iz posve drugog konteksta): svaka neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ ima antiderivaciju na pripadajućem intervalu (a,b). Štoviše, jednu antiderivaciju teorem eksplicitno nalazi; to je funkcija F definirana s $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Sad možemo pitati ima li f i drugih antiderivacija na (a,b). Odgovor je očito potvrdan: ako je C proizvoljna konstanta, funkcija G definirana s $G(x) = F(x) + C$ također ima svojstvo $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$.

Daljnje prirodno pitanje je ima li f još i drugih antiderivacija. Nije teško pokazati da je sada odgovor negativan. Zaista, pretpostavimo da je G proizvoljna neprekidna funkcija na $[a,b]$, derivabilna na (a,b) i takva da je $G'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$. Sada je funkcija $G - F$ također neprekidna na segmentu $[a,b]$, derivabilna na intervalu (a,b) i vrijedi $(G-F)'(x) = G'(x) - F'(x) = 0$, $\forall x \in (a,b)$. Prema korolaru 2.46, $G - F$ je nužno konstanta; postoji, dakle, konstanta C takva da je $G(x) - F(x) = C$, tj. $G(x) = F(x) + C$, $\forall x \in [a,b]$.

Definicija 3.13 *Umjesto antiderivacija podjednako često se upotrebljava i termin primitivna funkcija.*

Antiderivacija (odnosno primitivna funkcija) funkcije f dobivena u teoremu 3.11 označava se s $\int f(x)dx$ i naziva neodređeni integral. U ovoj notaciji imamo $\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$.

Teorem 3.14 *(Osnovni teorem diferencijalnog računa, II dio.)*
Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada je $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$, pri čemu je G bilo koja primitivna funkcija od f.

Dokaz: Odaberimo antiderivaciju F funkcije f iz prethodnog teorema: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Ako je G bilo koja antiderivacija od f onda je $G(x) = F(x) + C$, pri čemu je C neka konstanta. Posebno, $G(a) = F(a) + C$, zbog $F(a) = 0$, povlači $G(a) = C$. Dakle je $F(x) = \int_a^x f(t)dt = G(x) - C = G(x) - G(a)$. Odavde za $x = b$ dobivamo $F(b) = \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$. □

Primjer 3.15 Izračunajmo ponovo $\int_1^4 (3x^2 + 2)dx$. Kako je $\int(3x^2 + 2)dx = x^3 + 2x$ (jer $(x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2$), prethodni teorem daje $\int_1^4 (3x^2 + 2)dx = 64 + 8 - (1 + 2) = 69$.

Kad primjenjujemo prethodni teorem i odredimo primitivnu funkciju g funkcije f onda je običaj da se rezultat najprije napiše u obliku $[g(x)]_a^b$. Prethodni račun bismo tada zapisali kao $\int_1^4 (3x^2 + 2)dx = \left[x^3 + 2x\right]_1^4 = 64 + 8 - (1 + 2) = 69$.

Napomena 3.16 Slobodnije govoreći, pokazali smo da je problem površine "inverzan" problemu tangente. Koncept derivacije je osmišljen kao alat za rješavanje problema tangente, odnosno (kako smo vidjeli, ekvivalentnog) problema brzine. U rješavanju tih problema niti smo se bavili, niti je za to bilo potrebe, pronalaženjem primitivne funkcije za danu funkciju.

Pokazalo se, međutim, (to se smatra zajedničkim, a nezavisnim doprinosom Newtona i Leibniza), da upravo antiderivacija, odnosno primitivna funkcija predstavlja spektakularno jednostavan alat za računanje površina.

Napomena 3.17 U primjeni teorema 3.14 zaista je nužno provjeriti da je podintegralna funkcija neprekidna na segmentu na kojem funkciju integriramo. Da to demonstriramo, pogledajmo primjer funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2}$ koja ima prekid u $x = 0$ i integral $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}dx$. Za primitivnu funkciju $F(x) = -\frac{1}{x}$ ovdje imamo $F(1) - F(-2) = -\frac{3}{2}$, dok je površina koju integral $\int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}dx$ predstavlja očito pozitivna (zbog $f(x) > 0$, $\forall x \neq 0$).

Primjer 3.18 *(Leibnizovo pravilo.)* Funkcija $g(x) = \int_0^{x^2}(t^3-2)dt$, $x > 0$, je derivabilna jer je kompozicija dviju derivabilnih funkcija. Naime, ako označimo $F(x) = \int_0^x (t^3-2)dt$, teorem 3.14 pokazuje da je F derivabilna funkcija, a jasno je da vrijedi $g(x) = F(x^2)$.

Zato je $g'(x) = 2xF'(x^2) = 2x(x^6-2)$.

Primjer 3.19 Neka je $g(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^t dt$. Pokažimo da je g derivabilna i nađimo $g'(x)$.

Uvedimo funkciju $F(x) = \int_0^x e^t dt$. Prema teoremu 3.14, F je derivabilna i $F'(x) = e^x$. Osim toga, $g(x) = \int_{x^2}^0 e^t dt + \int_0^{x^3} e^t dt = \int_0^{x^3} e^t dt - \int_0^{x^2} e^t dt = F(x^3) - F(x^2)$. Zato je $g'(x) = 3x^2F'(x^3) - 2xF'(x^2) = 3x^2e^{x^3} - 2xe^{x^2}$.

Zadaci: 7. domaća zadaća

1. Aproksimirajte $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx$ Riemannovom sumom koristeći tri jednako dugačka podsegmenta i uzimajući za točke c_k desne krajeve tih podsegmenata.
2. Izračunjte $\int_0^a x dx$ računajući direktno površinu koju taj integral predstavlja. Nakon toga izračunajte S_{P_n} i $\lim\limits_{n\to\infty} S_{P_n}$ ako je $P_n = \{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}a, x_2 = \frac{2}{n}a, \ldots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}a, x_n = a\}$ i ako u svakom od podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, odaberemo $c_k = x_k$.
3. Izračunjte $\int_{-2}^3 |x| dx$ računajući direktno površinu koju taj integral predstavlja.
4. Izračunjte $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}dx$ računajući direktno površinu koju taj integral predstavlja.
5. Izračunjte $\int_2^6 (\frac{1}{x} - 4)dx$.
6. Izračunajte $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tan x dx$.
7. Neka je f neparna funkcija. Izračunajte $\int_{-a}^a f(x)dx$ za proizvoljan $a > 0$ takav da je segment $[-a, a]$ sadržan u domeni od f. Obrazložite.
8. Obrazložite bez računanja integrala nejednakost $\int_1^2 x dx \leq \int_1^2 x^2 dx$.
9. Obrazložite bez računanja integrala nejednakost $\frac{1}{2} \leq \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \leq 1$.
10. Koristeći Leibnizovo pravilo izračunajte $\frac{d}{dx}\int_0^{2x-1}(t^2-1)dt$. Nakon toga uočite da je $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ primitivna funkcija podintegralne funkcije $f(x) = x^2 - 1$ pa izračunajte zadani određeni integral i nakon toga ga derivirajte direktno.
11. Izračunajte $\frac{d}{dx}\int_1^{3x^2+x}(1+te^t)dt$.
12. Izračunajte $\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}(\ln t)dt$, $x > 0$.

3.2 Tehnike integriranja

U primjenama integralnog računa osnovna zadaća se sastoji u nalaženju primitivne funkcije, tj. određivanju neodređenog integrala $\int f(x)dx$ za danu neprekidnu funkciju f. Znamo da nam je dovoljno odrediti samo jednu primitivnu funkciju F jer tada se sve ostale primitivne funkcije od f dobivaju tako da se funkciji F pribroji konstanta.

Najjednostavije je ako je podintegralna funkcija toliko elementarna da primitivnu funkciju možemo pogoditi. Ovo zapravo znači da trebamo imati uvid u tablicu derivacija elementarnih funkcija i iz nje prepoznavati je li određena funkcija nečija derivacija. Drugim riječima, tablica derivacija elementarnih funkcija ujedno služi i kao tablica osnovnih neodređenih integrala. Tako imamo:

$$\int e^x = e^x + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Posljednja tri primjera zahtijevaju dodatni komentar.

Najprije, ako je $x > 0$, funkcija $f(x) = \ln|x|$ postaje $f(x) = \ln x$ i znamo da je tada zaista $f'(x) = \frac{1}{x}$. Ako je, s druge strane, $x < 0$ onda je $f(x) = \ln|x| = \ln(-x)$ pa po pravilu za deriviranje kompozicije imamo $f'(x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Ako je $f(x) = \arctan x$ iz napomene 2.23 znamo da je $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.

Slično se dobiva i zadnji rezultat u prethodnom pregledu (vidite 1. zadatak u 8. domaćoj zadaći).

Uz male modifikacije i brojni drugi neodređeni integrali se mogu izračunati korištenjem prethodne tablice. Pritom treba imati na umu da za derivacije vrijedi $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x)$ i $(kF)'(x) = kF'(x)$ (gdje je k konstanta), pa je zato $\int(f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ i $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Primjer 3.20 Izračunajmo $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

Prvo uočimo da možemo pisati $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$. Zato je $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2}dx = x + C_1 - (\arctan x + C_2) = x - \arctan x + C$, ako smo na kraju uveli novu konstantu $C = C_1 - C_2$.

Dva važna pravila deriviranja su formule za derivaciju kompozicije i za derivaciju produkta. Oba pravila se mogu iščitati i u obrnutom smjeru što nas dovodi do dvije važne tehnike (metode) računanja neodređenih integrala: supstitucije i parcijalne integracije.

Objasnimo najprije metodu supstitucije. Pogledajmo primjera radi funkciju $f(x) = e^{3x^2+1}$. Da odredimo $f'(x)$ stavimo $f(u) = e^u$ i $u = 3x^2 + 1$. Znamo da je $f'(u) = e^u$ i $u'(x) = \frac{du}{dx} = 6x$. Tretiramo li du i dx kao brojeve možemo pisati $du = 6xdx$. Sada je $\frac{d}{dx}(e^{3x^2+1}) = \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = e^{3x^2+1}6x$.

Zamislimo sada da želimo odrediti $\int e^{3x^2+1}6xdx$. Prepoznajemo da je $e^{3x^2+1} = e^u$ i $6xdx = du$ pa možemo pisati $\int e^{3x^2+1}6xdx = \int e^u du = e^u + C = e^{3x^2+1} + C$. Dakle, supstituirali smo $u = 3x^2 + 1$ i pritom koristili $du = 6xdx$.

Napomena 3.21 Općenito, ako imamo $\int f(t)dt = F(t)+C$ onda integral $\int f(g(x))g'(x)dx$ računamo na sljedeći način: supstituiramo $u = g(x)$, iskoristimo $du = g'(x)dx$ (što dolazi od $u' = \frac{du}{dx} = g'(x)$) pa imamo $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$.

Rezultat koji smo dobili izveden je formalnim manipulacijama, no metoda koju smo primijenili se opravdava provjerom, tj. računanjem u obrnutom smjeru: $(F(g(x)) + C)' = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$ što je upravo polazna podintegralna funkcija.

Primjer 3.22 (a) $\int \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$.

(b) $\int \sin^2 x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$.

(c) $\int 3x^2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}dx = \left\{ \begin{array}{c} x^3+1 = t \\ 3x^2dx = dt \end{array} \right\} = \int t^{\frac{3}{2}}dt = \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5}(x^3+1)^{\frac{5}{2}} + C$.

(d) U primjeru koji slijedi nije tako očito kao u prethodnima koju supstituciju treba uvesti. Ipak, metoda supstitucije će i ovdje biti učinkovita.

$\int x\sqrt{2x-1}dx = \left\{ \begin{array}{l} 2x-1 = t,\ x = \frac{1}{2}(t+1) \\ 2dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{1}{2}(t+1)t^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int (t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}})dt = \frac{1}{4}(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C) = \frac{1}{10}(2x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{6}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C$.

Napomena 3.23 Kad računamo određeni integral metodom supstitucije imamo dvije mogućnosti (nakon što uvedemo prikladnu supstituciju $u = g(x)$): ili ćemo slijedom učinjene supstitucije promijeniti granice integrala, te ćemo imati $\int_{g(a)}^{g(b)}$ umjesto $\int_a^b$ i nastaviti račun direktno iz primitivne funkcije izražene u varijabli u, ili ćemo granice integracije ostaviti neizmijenjenima, a dobivenu primitivnu funkciju u varijabli u najprije izraziti u originalnoj varijabli x. Evo primjera:

$\int_1^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x}dx = \left\{ \begin{array}{l} x^3+x=u \\ (3x^2+1)dx = du \end{array} \right\} = \int_2^{10} \frac{du}{u} = [\ln|u|]_2^{10} = \ln 10 - \ln 2 = \ln 5.$

Alternativno, mogli smo nakon provedene supstitucije nastaviti i na ovaj način: $\int_1^2 \frac{du}{u} = [\ln|u|]_1^2 = \left[\ln(x^3+x)\right]_1^2 = \ln 5.$

Napomena 3.24 Metoda parcijalne integracije se izvodi iz pravila za derivaciju produkta. Pretpostavimo da su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ derivabilne funkcije. Tada je $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, odnosno $u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x)$. Zato je također i $\int u(x)v'(x)dx = \int (u(x)v(x))'dx - \int u'(x)v(x)dx$; dakle, $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$.

Uočimo da smo mogli pisati $\int (u(x)v(x))'dx = u(x)v(x)$ izostavljajući konstantu jer će ta kontanta biti uvažena (apsorbirana) u rezultatu neodređenog integrala $\int u'(x)v(x)dx$.

Smisao metode parcijalne integracije je u tome da se neodređeni integral $\int u(x)v'(x)dx$ zamijeni s $\int u'(x)v(x)dx$ u nadi da ćemo ovaj drugi moći lakše izračunati.

Primjer 3.25 (a) $\int x\sin x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x)=x, & u'(x)=1 \\ v'(x)dx = \sin x dx, & v(x) = -\cos x \end{array} \right\} = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$

(b) $\int x\ln x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x)=\ln x, & u'(x)=\frac{1}{x} \\ v'(x)dx = xdx, & v(x) = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}xdx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$

(c) $\int_0^1 xe^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x)=x, & u'(x)=1 \\ v'(x)dx = e^{-x}dx, & v(x) = -e^{-x} \end{array} \right\} = [-xe^{-x}]_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx$ $= [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$

(d) $\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x)=\ln x, & u'(x)=\frac{1}{x} \\ v'(x)dx = 1dx, & v(x) = x \end{array} \right\} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

(e) $\int x^2e^x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x)=x^2, & u'(x)=2x \\ v'(x)dx = e^xdx, & v(x) = e^x \end{array} \right\} = x^2e^x - \int 2xe^x dx =$ $\left\{ \begin{array}{ll} u(x)=2x, & u'(x)=2 \\ v'(x)dx = e^xdx, & v(x) = e^x \end{array} \right\} = x^2e^x - 2xe^x + \int 2e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$

(f) $\int e^x\sin x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u(x)=\sin x, & u'(x)=\cos x \\ v'(x)dx = e^xdx, & v(x) = e^x \end{array} \right\} = e^x\sin x - \int e^x\cos x dx$ $= \left\{ \begin{array}{ll} u(x)=\cos x, & u'(x)=-\sin x \\ v'(x)dx = e^xdx, & v(x) = e^x \end{array} \right\} = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x dx$. Odavde zaključujemo da je $2\int e^x\sin x dx = e^x(\sin x + \cos x)$ (ako u momentu zanemarimo aditivnu konstantu) i zato je $\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C.$

U nastavku ćemo izložiti tehniku integriranja racionalnih funkcija. Pogledajmo najprije dva osnovna primjera.

Primjer 3.26 Za $f(x) = \frac{k}{ax+b}$ imamo $\int \frac{k}{ax+b}dx = \left\{ \begin{array}{c} ax+b=u \\ du = adx \end{array} \right\} = \frac{k}{a}\int \frac{du}{u} = \frac{k}{a}\ln|ax+b| + C$.

Primjer 3.27 Neka je $f(x) = \frac{kx+l}{ax^2+bx+c}$ pri čemu je $a > 0$, a polinom ax^2+bx+c nema realnih nul-točaka (pa je $b^2 - 4ac < 0$). Prvo primijetimo da je

$$ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}) = a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}) = a((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}).$$

Sada je

$$\int \frac{kx+l}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{kx}{ax^2+bx+c}dx + \int \frac{l}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$\frac{k}{2a}\int \frac{2ax+b-b}{ax^2+bx+c}dx + \int \frac{l}{ax^2+bx+c}dx = \frac{k}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + (l-\frac{kb}{2a})\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Označimo posljednja dva integrala s I_1 i I_2.

$$I_1 = \int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \left\{ \begin{array}{c} ax^2+bx+c = u \\ (2ax+b)dx = du \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u} = \ln|ax^2+bx+c| + C_1.$$

Još se može primijetiti da polinom ax^2+bx+c ima stalan predznak (jer to je neprekidna funkcija bez nul-točaka). Kako smo pretpostavili da je $a > 0$ i $b^2 - 4ac < 0$ vidimo da je $c > 0$. Jer je $c = f(0)$, slijedi da je $ax^2+bx+c > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Zato možemo pisati $I_1 = \ln(ax^2+bx+c) + C$.

$$I_2 = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}} = \left\{ \begin{array}{c} x+\frac{b}{2a} = u \\ dx = du \end{array} \right\} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{u^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}}$$

$$= \frac{1}{a}\frac{4a^2}{4ac-b^2}\int \frac{du}{(\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}u)^2+1} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}u = v \\ du = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}dv \end{array} \right\} = \frac{1}{a}\frac{4a^2}{4ac-b^2}\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\int \frac{dv}{v^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan(\frac{2a}{\sqrt{4ac-b^2}}(2ax+b)\frac{1}{2a}) + C_2 = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C_2.$$

Odavde konačno dobivamo (uvedemo li novu konstantu $C = C_1 + C_2$)

$$\int \frac{kx+l}{ax^2+bx+c}dx = \frac{k}{2a}\ln(ax^2+bx+c) + \frac{2-\frac{kb}{a}}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C.$$

Promotrimo sada proizvoljnu racionalnu funkciju $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je f prava racionalna funkcija, tj. da je $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$. (U protivnom bismo proveli dijeljenje s ostatkom i dobili $\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ pri čemu je L polinom i $\operatorname{st} R < \operatorname{st} Q$.)

Polinom Q sad faktoriziramo na faktore ireducibilne nad poljem $\mathbb{R}$ (to su polinomi oblika $ax+b$ ili oni oblika ax^2+bx+c koji nemaju realnih nul-točaka). Nakon rastavljanja funkcije $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ na parcijalne razlomke računanje integrala se u većini situacija[7] svodi na računanje integrala iz prethodna dva primjera.

Primjer 3.28 Neka je $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}$. Najprije trebamo rastaviti funkciju f na parcijalne razlomke. Iz

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{k}{x+1}+\frac{l}{(x+1)^2}+\frac{mx+n}{x^2+1}$$

dobivamo $k(x+1)(x^2+1)+l(x^2+1)+(mx+n)(x+1)^2=1$, što se svodi na sistem jednadžbi: $k+m=0$, $k+l+2m+n=0$, $k+m+2n=0$, $k+l+n=1$. Slijedi $n=0$, $m=-\frac{1}{2}$, $k=\frac{1}{2}$, $l=\frac{1}{2}$. Odavde je

$$\int\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

Pojam određenog integrala $\int_a^b f(x)dx$ uveli smo samo za funkcije na segmentu $[a,b]$. U praksi se često javlja potreba i za računanjem površina dijelova ravnine koji se protežu duž beskonačnih intervala.

Definicija 3.29 *Neka je funkcija f neprekidna na intervalu $[a,\infty)$. Tada se definira $\int_a^\infty f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$. Ukoliko ovaj limes postoji kažemo da integral $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergira. Ako $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ ne postoji ili postoji samo u širem smislu ($\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx=\infty$ ili $-\infty$) kažemo da integral $\int_a^\infty f(x)dx$ divergira.*

Analogno se definira značenje simbola $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ za funkcije neprekidne na intervalu $(-\infty,b]$.

Ako je f neprekidna na $\mathbb{R}$ definira se $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\lim\limits_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)dx$.

U svim navedenim slučajevima ovi integrali se nazivaju nepravi integrali. Ako konvergiraju, njihov iznos se interpretira kao površina (s predznakom) dijela ravnine omeđenog grafom funkcije $f(x)$ i x-osi duž navedenih intervala.

Primjer 3.30 (a) $\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b\frac{dx}{x^2+1}=\lim\limits_{b\to\infty}[\arctan x]_0^b=\lim\limits_{b\to\infty}(\arctan b-\arctan 0)$ $=\dfrac{\pi}{2}$.

[7] U praksi se pojavljuju i integrali oblika $\int\frac{kdx}{(ax+b)^n}$ i $\int\frac{(kx+l)dx}{(ax^2+bx+c)^n}$, gdje je $n\geq 2$.

(b) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim\limits_{b\to\infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1.$

(c) $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergira jer je $\lim\limits_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty.$

Napomena 3.31 Pretpostavimo da za neprekidne funkcije f i g na intervalu $[a, \infty)$ vrijedi $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Tada se može pokazati:

1. ako $\int_a^\infty g(x)dx$ konvergira onda i $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergira;
2. ako $\int_a^\infty f(x)dx$ divergira onda i $\int_a^\infty g(x)dx$ divergira.

Primjer 3.32 $\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_0^b e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^b$
$= \lim\limits_{b\to\infty} (1 - e^{-b}) = 1.$

Istim računom se pokazuje da integral $\int_a^\infty e^{-x}dx$ također konvergira te da iznosi e^{-a}, za svaki $a > 0$.

Promotrimo sada nepravi integral $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Može se pokazati da nema elementarne formule za primitivnu funkciju funkcije $f(x) = e^{-x^2}$. Zbog toga ne možemo vrijednost zadanog nepravog integrala računati postupajući kao u primjeru 3.30. No, konvergenciju zadanog integrala možemo pokušati ispitati korištenjem prethodne napomene.

Prvo primijetimo da možemo pisati $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_0^b e^{-x^2}dx = \lim\limits_{b\to\infty} (\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}dx + \displaystyle\int_1^b e^{-x^2}dx)$. Ako bismo utvrdili da $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ konvergira, tj. da postoji $\lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_1^b e^{-x^2}dx$, onda bi prema pravilu o zbroju limesa slijedilo $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \lim\limits_{b\to\infty} \displaystyle\int_1^b e^{-x^2}dx$, a to bi značilo da $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ konvergira.

Sad uočimo da za $x \in [1, \infty)$ vrijedi $x \leq x^2 \Rightarrow -x^2 \leq -x \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-x}$. S obzirom da smo pokazali da $\int_0^\infty e^{-x}dx$ konvergira, korištenjem napomene 3.31 sad vidimo da i $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ konvergira.

Inače, može se pokazati korištenjem naprednijih metoda matematičke analize da zapravo vrijedi $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Preostalo je vidjeti kako se definira $\int_a^b f(x)dx$ u slučaju da f ima prekid u nekoj od točaka segmenta $[a, b]$. To se može učiniti kad god f ima konačno mnogo prekida. Jednostavnosti radi, ovdje ćemo se ograničiti na slučaj kad je f neprekidna svuda na $[a, b]$, osim samo u jednoj točki.

Imamo sljedeće slučajeve:

1. f je neprekidna na $(a, b]$.

   Definira se $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to a^+} \displaystyle\int_c^b f(x)dx.$

2. f je neprekidna na $[a, b)$.

   Definira se $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to b^-} \displaystyle\int_a^c f(x)dx$.

3. f je neprekidna na $[a, p) \cup (p, b]$, za $p \in (a, b)$.

   Definira se $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c \to p^-} \displaystyle\int_a^c f(x)dx + \lim\limits_{d \to p^+} \displaystyle\int_d^b f(x)dx$.

Kao i prije, u sva tri slučaja kažemo da integral konvergira (ponekad se jednostavnije kaže da integral postoji) ako navedeni limesi postoje. I ovdje se u sva tri slučaja navedeni integrali shvaćaju kao površine (s predznakom) dijelova ravnine omeđenih grafom funkcije f i x-osi, duž navedenih intervala.

Primjer 3.33 $\int_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{c \to 0^+} \displaystyle\int_c^1 \ln x dx$. Prema primjeru 3.25(d) imamo $\int_0^1 \ln x dx = \lim\limits_{c \to 0^+} [x \ln x - x]_c^1 = \lim\limits_{c \to 0^+} (-1 - c \ln c + c)$. Uočimo da je $\lim\limits_{c \to 0^+} c = 0$, dok $\lim\limits_{c \to 0^+} c \ln c$ možemo odrediti L'Hospitalovim pravilom; dobiva se $\lim\limits_{c \to 0^+} c \ln c = 0$. Zato je $\int_0^1 \ln x dx = -1$.

Zadaci: 8. domaća zadaća

1. Dokažite da je $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

   Najprije uočimo da je restrikcija funkcije sinus na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ bijekcija s $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na interval $(-1, 1)$. Zato možemo govoriti o inverznoj funkciji $\arcsin : (-1, 1) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Obje funkcije su neprekidne i $(\sin x)' = \cos x \neq 0$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zato prema pravilu o derivaciji inverzne funkcije imamo $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$. Kako je $\arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ i kako je na tom intervalu $\cos x > 0$, možemo pisati $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}$. Zato je $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Izračunajte sljedeće neodređene integrale:

   (a) $\int \frac{2x^2 - x}{\sqrt{x}} dx$,

   (b) $\int (x - 1)(x + 2)dx$,

   (c) $\int \sin(1 - x)dx$,

   (d) $\int 2^x dx$.

3. Izračunajte metodom supstitucije:

   (a) $\int x\sqrt{1 - x^2} dx$,

   (b) $\int \frac{x+2}{x^2+4x} dx$,

   (c) $\int \frac{1}{x} e^{2+\ln x} dx$,

   (d) $\int \sin^3 x \cos x dx$,

(e) $\int (\ln x)^2 \frac{1}{x} dx$,

(f) $\int_{\ln 4}^{\ln 7} \frac{e^x}{(e^x-3)^2} dx$,

(g) $\int_1^2 \frac{x dx}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}$.

4. Izračunajte metodom parcijalne integracije:

(a) $\int 2x\cos(1-x)dx$,

(b) $\int x^3 \ln x dx$,

(c) $\int x^2 \ln(x^2) dx$,

(d) $\int \cos^2 x dx$.

5. Izračunajte:

(a) $\int x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$,

(b) $\int e^{\sqrt{x}} dx$,

(c) $\int \cos\sqrt{x} dx$,

(d) $\int \frac{x+2}{x^2+2} dx$,

(e) $\int x(x-2)^{\frac{1}{4}} dx$,

(f) $\int_1^2 \ln(x^2 e^x) dx$,

(g) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\tan^2 x) dx$,

(h) $\int \frac{1}{(x+2)^2(x^2+4)} dx$,

(i) $\int \frac{x^4}{x^2-4} dx$,

(j) $\int \frac{x+2}{x(x-1)(x^2+x+1)^2} dx$.

6. Izračunajte (ili pokažite da navedeni integrali divergiraju):

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2-1} dx$,

(b) $\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$,

(c) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$,

(d) $\int_{-\infty}^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

3.3 Primjene

Već znamo da $\int_a^b f(x)dx$ predstavlja površinu s predznakom dijela ravnine omeđenog grafom neprekidne funkcije f, x-osi i vertikalnim pravcima $x = a$, $x = b$. Tako je, npr. $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ i $\int_0^1 (-x)dx = -\frac{1}{2}$.

Ukoliko želimo odrediti stvarnu površinu promatranog dijela ravnine jasno je da trebamo uzeti apsolutnu vrijednost dobivenog rezultata.

Ako f na segmentu $[a, b]$ mijenja predznak, potrebno je odvojeno računati površine po podintervalima na kojima je predznak funkcije f stalan.

Primjer 3.34 Izračunajmo stvarnu površinu dijela ravnine omeđenog pravcima $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ i grafom funkcije $f(x) = (x - 2)(x - 3)$.

Najprije primijetimo da odgovarajuća površina s predznakom iznosi $\int_1^4 (x - 2)(x - 3)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} - 40 + \frac{5}{2} + 24 - 6 = \frac{3}{2}$.

S druge strane, vidimo da je $f(x) \geq 0$ na $[1, 2] \cup [3, 4]$, dok je $f(x) \leq 0$ na $[2, 3]$. Sada je

$\int_1^2 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 10 + \frac{5}{2} + 12 - 6 = \frac{5}{6}$,

$\int_2^3 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_2^3 = 9 - \frac{8}{3} - \frac{45}{2} + 10 + 18 - 12 = -\frac{1}{6}$,

$\int_3^4 f(x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x\right]_3^4 = \frac{64}{3} - 9 - 40 + \frac{45}{2} + 24 - 18 = \frac{5}{6}$.

Zato stvarna površina iznosi $\frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$.

Propozicija 3.35 *Neka su funkcije f i g neprekidne na segmentu $[a, b]$, te neka vrijedi $g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Tada površina dijela ravnine omeđenog grafovima funkcija f i g te vertikalnim pravcima $x = a$, $x = b$ iznosi $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$.*

Dokaz: Uzmimo najprije da je $0 \leq g(x) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$. Tada je očito da tražena površina iznosi $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$.

U općem slučaju najprije iskoristimo teorem 2.34: postoji konstanta m takva da je $g(x) \geq m$, $\forall x \in [a, b]$. Sad umjesto funkcija f i g promotrimo funkcije $f_1(x) = f(x) - m$, $g_1(x) = g(x) - m$. Očito je $0 \leq g_1(x) \leq f_1(x)$, $\forall x \in [a, b]$ pa prema prvom dijelu dokaza tražena površina iznosi $\int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$. □

Primjer 3.36 Odredimo površinu P dijela ravnine omeđenog grafovima funkcija $f(x) = -x + 2$ i $g(x) = (x - 1)^2 - 1$.

Sjecišta ovih dvaju grafova su u točkama čije su apscise $x = -1$ i $x = 2$. Zato je

$P = \int_{-1}^{2} \int ((-x+2)-((x-1)^2-1))dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = -\frac{8}{3}-\frac{1}{3}+2-\frac{1}{2}+4+2 = \frac{9}{2}.$

Primjer 3.37 Izračunajmo površinu dijela ravnine omeđenog grafovima funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x - 2$ i x-osi.

Sa slike je vidljivo o kojem dijelu ravnine se radi (treba imati na umu da je f definirana samo za $x \geq 0$). Sjecište ovih dvaju grafova je u točki $(4,2)$. Nadalje, iz slike je također jasno da segment $[0,4]$ moramo podijeliti na dva dijela kako bismo mogli primijeniti propoziciju 3.35. Tražena površina je $\int_0^2 \sqrt{x}dx + \int_2^4(\sqrt{x} - (x-2))dx = \frac{10}{3}$.

Primjer 3.38 Promotrimo model koji opisuje brojnost neke populacije kao funkciju $N(t)$ vremena $t \geq 0$. U mnogim modelima ove vrste funkcija $N(t)$ nije dana (ili poznata) eksplicitno, već je obično poznata njezina brzina rasta $N'(t)$ uz početnu vrijednost $N(0) = N_0$. Imamo dakle zadano $N'(t) = f(t)$ i N_0.

Vidimo da je ovdje $N(t)$ u stvari primitivna funkcija funkcije $f(t)$ pa je $N(t) = \int_0^t f(u)du + C$ s tim da je $N(0) = \int_0^0 f(u)du + C = 0 + C = C$. Odavde je $N(t) = \int_0^t f(u)du + N_0$.

Neka je dana neprekidna funkcija f na $[a,b]$. Želimo odrediti prosječnu vrijednost koju funkcija f poprima na tom segmentu. To možemo učiniti na sljedeći način:

Podijelimo segment $[a,b]$ na n jednakih dijelova duljine $\frac{1}{n}(b-a)$. To u stvari znači da smo odabrali particiju $P = \{x_0 = a, x_1 = a + \frac{1}{n}(b-a), \ldots, x_{n-1} = a + \frac{n-1}{n}(b-a), x_n = b\}$. Sad pogledamo vrijednosti koje funkcija f poprima u završnim točkama svih ovih podsegmenata; to su brojevi $f(x_k)$, $k = 1,\ldots,n$. Pogledajmo aritmetičku sredinu ovih n vrijednosti: $\overline{f} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. Uočimo da je $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{b-a}$, $\forall k = 1,\ldots,n$. Zato možemo pisati $\overline{f} = \frac{1}{b-a}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$.

Intuitivno je jasno da ćemo, ako povećamo broj podsegmenata (i time smanjimo njihovu duljinu), ako dakle pustimo $n \to \infty$, dobiveni limes moći smatrati prosječnom vrijednošću funkcije f na segmentu $[a,b]$. Ako usporedimo izraz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{b-a}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1})$ s definicijom određenog integrala, vidimo da ovaj limes postoji te da je jednak $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Zaključujemo: prosječna vrijednost koju neprekidna funkcija poprima na segmentu $[a,b]$ iznosi $f_{pr} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

Primjer 3.39 Prosječna vrijednost koju funkcija $f(x) = 4 - x^2$ poprima na segmentu $[-2, 2]$ je $f_{pr} = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \frac{1}{4}\left[4x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{2} = \frac{8}{3}$.

Propozicija 3.40 *(Teorem srednje vrijednosti za određeni integral.) Neka je f neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$. Tada postoji točka $c \in [a, b]$ za koju vrijedi $f(c) = f_{pr}$, tj. $f(c)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$.*

Dokaz: Prema teoremu 2.34 postoje brojevi m, M takvi da je $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [a, b]$. Prema napomeni 3.8(3) sada imamo $m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$, dakle $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$. Kako neprekidna funkcija na segmentu poprima i sve međuvrijednosti između svog minimuma i maksimuma, to postoji točka $c \in [a, b]$ za koju vrrijedi $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. □

Primjer 3.41 Pretpostavimo da želimo izračunati volumen tijela smještenog u koordinatni sustav. Pretpostavimo nadalje da za sve $x_0 \in [a, b]$ poznajemo površinu $A(x_0)$ presjeka toga tijela s ravninom koja prolazi točkom x_0 i okomita je na x-os. Neka je pritom $A(x)$ neprekidna funkcija te neka vrijedi $A(x) = 0$ za $x \notin [a, b]$. Može se pokazati da je tada volumen tog tijela dan formulom $V = \int_a^b A(x)dx$.

Tipično, ova tehnika se primjenjuje za računanje volumena rotacionih tijela. Pretpostavimo da imamo neprekidnu funkciju $f(x)$ na segmentu $[a, b]$. Želimo izračunati volumen tijela koje nastaje rotacijom grafa funkcije $f(x)$, $x \in [a, b]$, oko x-osi. Primijetimo da je ovdje $A(x) = f(x)^2\pi$ te da je funkcija A neprekidna jer je f neprekidna. Prema prethodnoj formuli, volumen tako nastalog rotacionog tijela iznosi $V = \int_a^b f(x)^2\pi dx$.

Primjer 3.42 (a) Odredimo volumen kugle radijusa r. Uočimo da kuglu radijusa r možemo dobiti rotacijom grafa funkcije $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$, oko x-osi. Zato je $V = \int_{-r}^{r}\pi(r^2 - x^2)dx = \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \pi(r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3 - \frac{1}{3}r^3) = \frac{4}{3}r^3\pi$.

(b) Odredimo volumen rotacionog tijela koje nastaje rotacijom oko x-osi grafa funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ za $x \in [0, 2]$.

$V = \int_0^2 \pi x dx = \pi\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^2 = 2\pi$.

Primjer 3.43 Želimo odrediti duljinu grafa funkcije f na segmentu $[a,b]$. Iz tehničkih razloga pretpostavimo da je f derivabilna na intervalu (a,b) te da je f' neprekidna funkcija na (a,b).

Ideja je da graf funkcije f aproksimiramo nizom kratkih segmenata, tj. poligonalnom linijom koja prolazi točkama $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ pri čemu je $P = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ neka particija segmenta $[a,b]$. Izračunat ćemo zbroj duljina tako dobivenih segmenata, a nakon toga pogledati što se događa s rezultatom kad $l(P) \to 0$ (tj. kad particija postaje sve finija i duljine podsegmenata $[x_{k-1}, x_k]$ teže u 0).

Duljina segmenta koji spaja točke $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ i $(x_k, f(x_k))$ prema Pitagorinom poučku iznosi $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$. Stoga ukupna duljina tih segmenata za ovu particiju iznosi

$$L_P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Nadalje, zbog Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti postoji točka $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ takva da je $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(c_k)$, tj. $f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(c_k)(x_k - x_{k-1})$.

Zato možemo pisati $L_P = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + f'(c_k)^2}$. Kad $l(P) \to 0$, dobivamo upravo određeni integral neprekidne funkcije $\sqrt{1 + f'(x)^2}$ na segmentu $[a,b]$ (upravo ovdje koristimo pretpostavku da je f' neprekidna funkcija). Zato je tražena duljina luka dana formulom $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx$.

Primjer 3.44 Izračunajmo duljinu luka grafa funkcije $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ između $a = \frac{5}{9}$ i $b = \frac{21}{9}$.

Ovdje je $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ i $L = \int_{\frac{5}{9}}^{\frac{21}{9}} \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2}dx = \int_{\frac{5}{9}}^{\frac{21}{9}} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \left\{ \begin{array}{c} 1 + \frac{9}{4}x = t \\ dx = \frac{4}{9}dt \end{array} \right\} = \int_{\frac{5}{9}}^{\frac{21}{9}} \frac{4}{9}\sqrt{t}dt = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left[(1 + x\frac{9}{4})^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{5}{9}}^{\frac{21}{9}} = \frac{4}{9}\frac{2}{3}(\frac{125}{8} - \frac{27}{8}) = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\frac{98}{8} = \frac{98}{27}.$

Zadaci: 9. domaća zadaća

1. Odredite volumen dijela ravnine omeđenog grafovima navedenih funkcija i navedenim pravcima:

(a) $f(x) = e^x$, $g(x) = -x$, $x = 0$, $x = 2$,
(b) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x + 1$,
(c) $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 4x - 2$ (u prvom kvadrantu),
(d) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = x + 1$, $x = -1$, $x = 1$.

2. Neka je početna brojnost neke populacije $N_0 = 100$, a brzina njezinog rasta neka je dana formulom $N'(t) = -e^{-t}$. Odredite $N(t)$.

3. Izračunajte prosječnu vrijednost funkcije $f(x) = e^{-x}$ na segmentu $[-1, 1]$.

4. Pretpostavimo da je kretanje temperature u nekom danu prikazano kao funkcija vremena formulom $f(x) = 20 + 4\sin(\frac{\pi}{12}x)$, $x \in [0, 24]$. Odredite prosječnu temperaturu toga dana.

5. Odredite volumen rotacionih tijela nastalih rotacijom oko x-osi grafova sljedećih funkcija (ili dijelova ravnine omeđenih njihovim grafovima):

   (a) $f(x) = \sqrt{\sin x}$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$;
   (b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$;
   (c) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, $x \in [-2, 2]$;
   (d) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = 1 + x^2$, $x \in [0, 2]$.

6. Odredite duljinu grafa funkcije $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ od $x = 1$ do $x = 3$.

7. Odredite duljinu užeta koje visi pričvršćeno u točkama $x = -M, x = M$ i ima oblik grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$, $a > 0$. Specificirajte za $M = \ln 2$ i $a = 1$.

8. Neka je $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Pokažite da je duljina grafa te funkcije između $x = 0$ i $x = a > 0$ upravo $f'(a)$.

9. Brzina vodenog toka ovisi o dubini toka. Uslijed djelovanja trenja, brzina iznosi 0 na dnu i na stijenkama korita. Poznato je također da je brzina najveća na površini. U praksi se prosjek brzine vodenog toka određuje na sljedeći način: *izmjeri se brzina toka na* 60% *dubine, mjereno od površine, i ta se brzina proglasi prosječnom.* U nastavku razmatranja u ovom zadatku pokazat ćemo da ova metoda daje dobru aproksimaciju prosječne brzine vodenog toka.

   Teorijski model za brzinu vodenog toka je opisan funkcijom $v(d) = (\frac{D-d}{D-a})^{\frac{1}{c}}$, $d \in [0, D]$, gdje je d dubina mjerena od površine, D maksimalna dubina, c konstanta (koja se obično uzima iz segmenta $[5, 7]$) i a također konstanta. Iz izgleda funkcije v vidi se da je $v(a) = 1$ pa primjećujemo da se konstanta a interpretira kao ona dubina na kojoj brzina toka iznosi 1.

   (a) Skicirajte grafove funkcija $v(d) = (\frac{3-d}{3-2})^{\frac{1}{5}}$ i $v(d) = (\frac{3-d}{3-2})^{\frac{1}{7}}$.

   (b) Uvjerite se da je $v(0)$ maksimalna vrijednost funkcije $v(d) = (\frac{D-d}{D-a})^{\frac{1}{c}}$ na segmentu $[0, D]$.

(c) Pokažite da je $v_{pr} = \frac{c}{c+1}(\frac{D}{D-a})^{\frac{1}{c}}$ i uvjerite se da je $v_{pr} = \frac{c}{c+1}v_{max}$ gdje je, prema (b), $v_{max} = v(0)$.

(d) Uočite da je zbog teorema srednje vrijednosti za integral $v_{pr} = v(d_1)$ gdje $d_1 \in [0, D]$. Usporedbom s prethodnom tvrdnjom nalazimo da je $(\frac{D-d_1}{D-a})^{\frac{1}{c}} = \frac{c}{c+1}(\frac{D}{D-a})^{\frac{1}{c}}$ odakle je $\frac{D-d_1}{D} = (\frac{c}{c+1})^c$, odnosno $\frac{d_1}{D} = 1 - (\frac{c}{c+1})^c$.

(e) Istražite tok i skicirajte graf funkcije $f(c) = 1 - (\frac{c}{c+1})^c$ na segmentu $[5, 7]$. Uvjerite se iz grafa da je praktično određenje prosječne brzine toka $\frac{d_1}{D} = 0,6$ smisleno.

Napomene i komentari

1.

Dokaz jednakosti (5): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Prvo uočimo da je

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{8}$$

Ovu jednakost najlakše možemo dokazati ako računamo $2\sum_{k=1}^{n} k$ tako da sve sumande ispišemo dva puta ovako: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \ldots & 2 & 1 \end{matrix}$. Zbrojiti sve ove brojeve možemo tako da zbrojimo brojeve u svakom stupcu, a nakon toga zbrojimo sve dobivene zbrojeve. Očito, rezultat je $n(n+1)$. Sad primijetimo da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = (2^3 - 1^3) + (3^3 - 2^3) + \ldots + ((n+1)^3 - n^3) = (n+1)^3 - 1 \tag{9}$$

i također

$$\sum_{k=1}^{n}((k+1)^3 - k^3) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2 + 3k + 1) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n. \tag{10}$$

Iskoristimo (8) i usporedimo dobiveni rezultat s (9):

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\frac{1}{2}n(n+1) + n = (n+1)^3 - 1.$$

Odavde dobivamo

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}((n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n) =$$

$$\frac{1}{3}(n+1-1)((n+1)^2 + (n+1) + 1) - \frac{3}{2}n(n+1) - n) =$$

$$\frac{1}{3}(n((n+1)^2 + (n+1)) - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1) =$$

$$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+4-3) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

4 Diferencijalne jednadžbe

4.1 Uvod

U mnogim znanstvenim problemima različite veličine su opisane brzinom promjene. U osnovi se radi o tome da je nepoznata funkcija zadana nekom jednadžbom u kojoj se pojavljuje derivacija te funkcije. Takve jednadžbe se nazivaju diferencijalne jednadžbe. Najjednostavniji primjer diferencijalne jednadžbe je jednadžba $f'(x) = f(x)$. Već znamo da je $f(x) = e^x$ u osnovi jedino rješenje takve jednadžbe.

U ovom kontekstu je uobičajeno pisati y umjesto $f(x)$ i, sukladno tome, y' umjesto $f'(x)$. Više derivacije se onda označavaju s y'', y''', itd. Pod redom diferencijalne jednadžbe podrazumijevamo red najviše derivacije funkcije y koja se u jednadžbi pojavljuje. Na primjer, $y' = x^2y + y''$ je jednadžba drugog reda.

Ovdje ćemo se ograničiti samo na jednadžbe prvog reda koje se mogu napisati u obliku $y' = R(x, y)$, pri čemu je R poznata funkcija. Najjednostavniji slučaj nastupa kad R ne ovisi o y. Tada imamo jednadžbu oblika $y' = h(x)$ gdje je h poznata funkcija. Očito, ako je h neprekidna, ovdje je rješenje y zapravo primitivna funkcija od h; drugim riječima, sva rješenja su dana s $y = \int h(x)dx + C$.

Ponekad, kao što znamo, nismo u stanju primitivnu funkciju dane funkcije napisati eksplicitno u terminima elementarnih funkcija. Takav je primjer neodređenog integrala $\int e^{-x^2}dx$. U takvim slučajevima pod rješenjem dane jednadžbe podrazumijevamo i izraz u kojem se pojavljuju neodređeni integrali takvih funkcija.

U procesu rješavanja svake diferencijalne jednadžbe u nekom trenutku dolazimo u priliku eliminirati y'. U tom trenutku se u računu pojavljuje proizvoljna realna konstanta. U konačnici konstanta ne mora biti prisutna u aditivnom obliku (kao što je to uvijek slučaj kod računanja određenih integrala). Na primjer, lako se vidi da je $y = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$, rješenje jednadžbe $y' = y$.

Kad do rješenja dane jednadžbe dođemo, ono može biti izraženo eksplicitno (tj. u obliku $y = F(x, C)$ pri čemu je F poznata funkcija) ili implicitno (što znači u obliku $G(x, y, C) = 0$, gdje je G poznata funkcija). Povoljnije je imati rješenje napisano u eksplicitnom obliku, no to nije uvijek moguće. Na primjer, može se pokazati da je funkcija y za koju vrijedi $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \arctan\frac{y}{x} + C = 0$ rješenje jednadžbe $y' = \frac{y-x}{y+x}$, a očito je da iz jednakosti koja definira y u implicitnom obliku ne možemo funkciju y izraziti eksplicitno.

Definicija 4.1 *Diferencijalna jednadžba prvog reda naziva se jednadžba sa separiranim varijablama ako je oblika $y' = R(x, y)$ pri čemu je $R(x, y) = h(x)g(y)$ (dakle, $y' = h(x)g(y)$).*

Takve su, na primjer, jednadžbe $(x + 1)y' + y^2 = 0$, $yy' = e^{x+2y}\sin x = 0$ i sl.

Već smo vidjeli da najjednostavniji slučaj nastupa kad je $g(y) = 1$. Tada imamo jednadžbu $y' = h(x)$ i rješavanje se svodi na računanje zadanog neodređenog integrala.

I drugi poseban slučaj, naime $y' = g(y)$, rješava se jednostavno.

Primjer 4.2 Odredimo sva rješenja jednadžbe $y' = y$.

Prvo ćemo pretpostaviti da rješenje y zadovoljava $y = y(x) \neq 0, \forall x$. Tada možemo pisati $\frac{y'}{y} = 1$, odnosno $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$. Posljednju jednakost možemo zapisati i u obliku $G'(x) = F'(x)$ ako smo označili $G(x) = \ln|f(x)|$ i $F(x) = x$. Odavde je $G(x) = F(x) + K$ gdje je K konstanta (jer imamo $(G(x) - F(x))' = 0, \forall x \in \mathbb{R}$). Dakle je $\ln|f(x)| = x + K$ i zato je $|f(x)| = e^{x+K}$.

Kako je $f(x) \neq 0$, $\forall x$, zbog neprekidnosti funkcije f imamo ili $f(x) < 0$, $\forall x$ ili $f(x) > 0$, $\forall x$. Zato je $f(x) = \pm Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$, gdje je $C = e^K$.

Sad možemo uočiti i da ova formula daje rješenje i ako je $C = 0$; naime i konstantna funkcija $y = 0$ zadovoljava jednadžbu $y' = y$. Time je kompletiran dokaz činjenice da je za svaku konstantu $C \in \mathbb{R}$ funkcija $y = Ce^x$ rješenje zadane jednadžbe.

Ima li drugih rješenja? Zamislimo da je $g(x)$ proizvoljno rješenje. Uvedimo novu funkciju f formulom $f(x) = e^{-x}g(x)$. Sada je $f'(x) = e^{-x}g'(x) - e^{-x}g(x) = 0$. Dakle, f je konstanta; recimo C. Dobivamo $f(x) = e^{-x}g(x) = C$ odakle slijedi $g(x) = Ce^x$. Time je pokazano da su sva rješenja zadane jednadžbe oblika $f(x) = Ce^x$ gdje je C proizvoljna realna konstanta.

Sličnim rezoniranjem može se riješiti svaka jednadžba sa separiranim varijablama.

Promotrimo jednadžbu $y' = h(x)g(y)$ gdje su h i g neprekidne funkcije na svojim domenama. Za $g(y) \neq 0$ podijelimo jednadžbu s $g(y)$. Pišemo li $\frac{1}{g(y)} = A(y)$, dobivamo $A(y)y' = h(x)$. Sjetimo se da y označava nepoznatu funkciju f varijable x. Imamo, dakle, $A(f(x))f'(x) = h(x)$. Te su dvije funkcije jednake, pa su im i primitivne funkcije jednake. Zaključujemo da je $\int A(f(x))f'(x)dx = \int h(x)dx + C$. Ako na lijevoj strani supstituiramo $y = f(x)$ i $dy = f'(x)dx$, slijedi

$$\int A(y)dy = \int h(x)dx + C. \tag{11}$$

Ako je G bilo koja primitivna funkcija od A i H bilo koja primitivna funkcija od h, imamo $G(y) = H(x) + C$.

Tako vidimo da svako rješenje y polazne jednadžbe $y' = h(x)g(y)$ zadovoljava $G(y) = H(x) + C$. Obratno, ako y zadovoljava $G(y) = H(x) + C$ onda slijedi $G'(y)y' = H'(x)$, odakle je $A(y)y' = h(x)$.

Zaključak: $G(y) = H(x) + C$ opisuje u implicitnom obliku sva rješenja polazne jednadžbe $y' = h(x)g(y)$.

Napomena 4.3 Opisana metoda može se kraće i efikasnije opisati korištenjem Leibnizove notacije. Pišemo $y' = \frac{dy}{dx}$ pa imamo $A(y)\frac{dy}{dx} = h(x)$. Formalno množeći s dx dobivamo $A(y)dy = h(x)dx$. Pripišemo li s obje strane znak neodređenog integrala, dobivamo (11).

Jednakost $A(y)dy = h(x)dx$ opravdava naziv "separacija varijabli".

Primjer 4.4 Riješimo jednadžbu $y' + P(x)y = 0$. (U prethodnim oznakama imamo $h(x) = -P(x)$ i $g(y) = y$.)

Separacija varijabli daje $\int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx$ odakle je $\ln|y| = -\int P(x)dx + K$. Argumentirajući kao u primjeru 4.2 vidimo da slijedi $y = Ce^{-\int P(x)dx}$.

I ovdje smo, kao u primjeru 4.2, dijelili s y što podrazumijeva da je $y \neq 0$ te zato moramo vidjeti jesmo li na ovaj način dobili sva rješenja. Pretpostavimo zato da je g proizvoljno rješenje zadane jednadžbe. Pogledajmo $f(x) = g(x)e^{\int P(x)dx}$. Sada je

$$g'(x)e^{\int P(x)dx} + g(x)P(x)e^{\int P(x)dx} = f'(x).$$

Dakle,

$$f'(x) = e^{\int P(x)dx}(g'(x) + P(x)g(x)) = 0.$$

Odavde je $f(x) = C$ i $g(x) = Ce^{-\int P(x)dx}$.

U sljedećih nekoliko primjera pokazat ćemo kako se diferencijalne jednadžbe prirodno pojavljuju u rješavanju problema različitog karaktera.

Primjer 4.5 (Radioaktivni raspad.) Zajedničko je svojstvo svih radioaktivnih elemenata: brzina kojom se dana radioaktivna supstanca raspada (nestaje) proporcionalna je u svakom trenutku količini te tvari.

Ako označimo s $y = f(t)$ količinu određene radioaktivne tvari u trenutku t onda $y' = f'(t)$ predstavlja brzinu promjene y u trenutku t. Prethodno opisani zakon sad dovodi do diferencijalne jednadžbe $y' = -ky$ gdje je k pozitivna konstanta ovisna o specifičnoj tvari koju promatramo. Minus predznak odražava činjenicu da je u ovom slučaju rast negativan - kako vrijeme protiče, količina $y(t)$ se smanjuje.

Postupajući kao u primjeru 4.2 lako dobivamo da opće rješenje ove jednadžbe glasi $y = Ce^{-kt}$ gdje je C konstanta. Primijetimo da je $y(0) = C$, što je količina tvari koju smo imali na početku, tj. u trenutku $t = 0$. Dakle je $y = f(t) = f(0)e^{-kt}$.

I bez poznavanja konstante k i početne količine $f(0)$ iz ovog oblika funkcije $y = f(t)$ dobivamo korisne informacije o ovom fenomenu (usporedite diskusiju o vremenu poluraspada u primjeru 1.38).

Primjer 4.6 (Newtonov zakon hlađenja.) Prema Newtonovom zakonu hlađenja tijelo mijenja temperaturu brzinom koja je proporcionalna razlici njegove temperature i temperature medija koji ga okružuje. (Posebno, nema promjene temperature ako su te dvije temperature jednake.)

Ako $y = f(t)$ označava temperaturu tijela u trenutku t, te ako $A(t)$ označava poznatu temperaturu okolnog medija, Newtonov zakon hlađenja dovodi do jednadžbe $y' = -k(y - A(t))$ gdje je k pozitivna konstanta.

Primijetimo da ovo nije jednadžba sa separiranim varijablama. Dobili smo tzv. linearnu jednadžbu prvog reda.

Općenito, linearna jednadžba prvog reda je jednadžba oblika $y' + P(x)y = Q(x)$ pri čemu su P i Q neprekidne funkcije na nekom intervalu. Na tom intervalu tražimo nepoznatu funkciju y. Pomnožimo zadanu jednadžbu s $e^{\int P(x)dx}$. Dobivamo

$$y'e^{\int P(x)dx} + yP(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

To možemo zapisati u obliku

$$\frac{d}{dx}(ye^{\int P(x)dx}) = Q(x)e^{\int P(x)dx}.$$

Izračunamo li neodređene integrale, dobivamo

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Konačno,

$$y = e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C).$$

Nije teško pokazati da sve ovakve funkcije y zadovoljavaju danu jednadžbu i da je svako rješenje ovakvog oblika.

U našem primjeru imamo jednadžbu $y' + ky = kA(t)$. Dakle je $P(t) = k$ i $Q(t) = kA(t)$. Kako je $\int P(t)dt = \int kdt = kt + C_1$ dobivamo $y = e^{-kt-C_1}(\int kA(t)e^{kt+C_1}dt + C)$. S obzirom da je $e^{-C_1}C$ opet konstanta, možemo je označiti s C_2 pa imamo $y = e^{-kt}(\int A(t)ke^{kt}dt + C_2)$.

Pretpostavimo sada da je i $A(t) = const$. Primjera radi, neka je $A(t) = 10^0$. Tada je $\int A(t)ke^{kt}dt = 10\int ke^{kt}dt = 10e^{kt}$. Zato u ovom slučaju imamo rješenje $y = y(t) = C_2e^{-kt} + 10$.

Pretpostavimo sada da je u trenutku $t = 0$ u medij konstantne temperature $A(t) = 10^0$ uronjeno tijelo temperature 200^0 da bi nakon 40 minuta tijelo imalo temperaturu 100^0. Tada iz dobivenog oblika funkcije $y(t)$ (t sada označava vrijeme u minutama) imamo jednadžbe $200 = C_2 + 10$, $100 = C_2e^{-40k} + 10$. Lako se dobiva $-40k = \ln(\frac{9}{19})$ odakle je $k = \frac{\ln 19 - \ln 9}{40}$ i $C_2 = 190$.

Želimo li sada izračunati potrebno vrijeme da se tijelo ohladi na, npr. 50^0, dobivamo jednadžbu $y(t) = 50 = C_2e^{-kt} + 10$ odakle je $e^{-kt} = \frac{4}{19}$. Slijedi $-kt = \ln(\frac{4}{19})$, odnosno $kt = \ln 19 - \ln 4$. Odavde konačno dobivamo rezultat $t = 40\frac{\ln 19 - \ln 4}{\ln 19 - \ln 9}$. (Napomena. Jer je ln rastuća funkcija, dobili smo $t > 40$, kako i treba biti.)

Primjer 4.7 (Problem razrjeđivanja.) Pretpostavimo da tank sadrži 100 l otopine soli čija koncentracija je $0,3$ kg soli po 1 l otopine. U tank ulijevamo novu otopinu soli koncentracije $0,25$ kg soli po 1 l otopine brzinom 5 l u minuti. Istovremeno, novonastala otopina izljeva se iz otvora na dnu tanka istom brzinom 5 l u minuti. Treba odrediti količinu soli u tanku u svakom trenutku.

Označimo s $y = f(t)$ količinu soli, mjerenu u kg koja se nalazi u tanku u trenutku t (dakle, t minuta nakon što je miješanje otopina počelo u trenutku $t = 0$).

Dva procesa utječu na promjenu y. Otopina koja se ulijeva u tank svake minute unosi u tank $1,25$ kg soli. Otopina koja se izljeva svake minute iznosi $5\frac{y}{100}$ kg soli. Tako dobivamo diferencijalnu jednadžbu $y' = 1,25 - \frac{y}{20}$, tj. $y' = \frac{1}{20}(25 - y)$.

Ovo je jednadžba sa separiranim varijablama čije rješenje je $y = f(t) = 25 + Ce^{-\frac{t}{20}}$. Kako je početna količina soli iznosila $f(0) = 30$, imamo $C = 5$ pa je tražena funkcija $f(t) = 25 + 5e^{-\frac{t}{20}}$.

Primijetimo da je $30 \geq f(t) \geq 25$, $\forall t$ i da je $\lim_{t\to\infty} f(t) = 25$. Oba ova podatka su intuitivno jasna iz prirode zadatka.

Na kraju još uočimo da iz izraza za y možemo odrediti t. Dobivamo $t = 20\ln(\frac{5}{f(t)-25})$ što omogućuje da izračunamo vrijeme u kojem treba zaustaviti proces ukoliko želimo zadržati otopinu u kojoj ukupna količina soli iznosi $y = f(t)$ za bilo koji zadanu vrijednost y, $25 < y < 30$.

Zadaci: 10. domaća zadaća

1. Riješite jednadžbu $y' = \frac{x^3}{y^2}$.
2. Riješite jednadžbu $(x+1)y' + y^2 = 0$
3. Riješite jednadžbu $(x^2-4)y' = y$.
4. Riješite jednadžbu $(x-1)y' = xy$.
5. Riješite jednadžbu $yy' = e^{x+2y}\sin x$.
6. Riješite linearne jednadžbe postupajući kao u primjeru 4.6:
   (a) $y' - 3y = e^{2x}$,
   (b) $xy' - y = x\sin x$,
   (c) $y' + y = e^{2x}$,
   (d) $xy' + (1-x)y = e^{2x}$.
7. Riješite sljedeće jednadžbe uz specifikaciju dobivene konstante uz pomoć zadanog početnog uvjeta:
   (a) $y' = -2y$, $y(1) = 5$,
   (b) $y' = 1 - 3x\sin x$, $y(-1) = -2$,
   (c) $y' = 2x + 1$, $y(0) = 4$.
8. Pretpostavimo da količina fosfora $P(t)$ (iskazana u ovisnosti o vremenu t) u nekom zatvorenom vodosistemu zadovoljava jednadžbu $P'(t) = 3t + 1$ uz početni uvjet $P(0) = 0$. Odredite količinu fosfora u trenutku $t = 10$.

4.2 Primjene

U mnogim biološkim modelima pokazuju se važnima jednadžbe sa separiranim varijablama oblika $y' = g(y)$. Ovakve jednadžbe se ponekad zovu autonomne diferencijalne jednadžbe. Razmotrit ćemo pobliže dva posebna tipa ovakvih jednadžbi koje dobivamo izborom funkcije g u obliku $g(y) = k(y-a)$, odnosno $g(y) = k(y-a)(y-b)$.

Primjer 4.8 Riješimo jednadžbu $y' = k(y-a)$.

Pretpostavljajući da je $g(y) = y - a \neq 0$ imamo $\frac{dy}{y-a} = k$ odakle dobivamo $\ln|y-a| = kx + C_1$. Slijedi $|y-a| = e^{kx+C_1}$. Kako je $y - a \neq 0$, zbog neprekidnosti mora biti $y - a$ stalnog predznaka pa je ili $y - a = e^{C_1}e^{kx}$ ili $y - a = -e^{C_1}e^{kx}$. Označimo u oba slučaja konstantu s C pa sva dobivena rješenja možemo zapisati u obliku $y = Ce^{kx} + a$, gdje je $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Kao i u primjerima 4.2 i 4.4 moramo dopustiti mogućnost da ima i drugih rješenja jer smo do sada radili s pretpostavkom da je $g(y) = y - a \neq 0$.

Uzmimo zato proizvoljno rješenje $r(x)$ i uvedimo funkciju $r_1(x) = (r(x) - a)e^{-kx}$. Slijedi $r_1'(x) = r'(x)e^{-kx} - k(r(x)-a)e^{-kx} = (k(r(x)-a) - kr(x) + ka)e^{-kx} = 0$. Odavde zaključujemo da je $r_1(x) = const. = C$, tj. $(r(x) - a)e^{-kx} = C$, odnosno $r(x) = Ce^{kx} + a$. Primijetimo da je ovdje moguće i $C = 0$, tako da uz prethodno dobivena rješenja dobivamo i $r(x) = a$. Sveukupno, opće rješenje je oblika $y = Ce^{kx} + a$, $C \in \mathbb{R}$.

Primjer 4.9 Riješimo jednadžbu $y' = k(y-a)(y-b)$.

(a) Prvo promotrimo slučaj $a \neq b$.

Kako je $\frac{dy}{(y-a)(y-b)} = kdx$, trebamo funkciju $\frac{1}{(y-a)(y-b)}$ rastaviti na parcijalne razlomke. Iz $\frac{1}{(y-a)(y-b)} = \frac{\alpha}{y-a} + \frac{\beta}{y-b}$ dobivamo jednadžbu $\alpha(y-b) + \beta(y-a) = 1$. Odavde je $\alpha + \beta = 0$ i $-\alpha b - \beta a = 0$ pa nalazimo da je rješenje $\alpha = \frac{1}{a-b}$, $\beta = \frac{-1}{a-b}$.

Sada imamo $\int (\frac{1}{y-a} - \frac{1}{y-b})\frac{1}{a-b}dy = \int kdx$, a odavde je $\frac{1}{a-b}(\ln|y-a| - \ln|y-b|) = kx + C_1$, odnosno $\frac{1}{a-b}\ln|\frac{y-a}{y-b}| = kx + C_1$. Kao i prije eksponenciranjem slijedi $\frac{y-a}{y-b} = \pm e^{C_1(a-b)}e^{k(a-b)x}$.

Označimo li $C = \pm e^{C_1(a-b)}$, konačno dobivamo opće rješenje u obliku $\frac{y-a}{y-b} = Ce^{k(a-b)x}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Konačno, odavde je $y = \frac{a - bCe^{k(a-b)x}}{1 - Ce^{k(a-b)x}}$. Može se pokazati da su jedina preostala rješenja $y = a$, $y = b$.

(b) Ako je $b = a$ imamo jednadžbu $y' = k(y-a)^2$. Osim trivijalnog rješenja $y = a$ imamo i $\frac{dy}{(y-a)^2} = kdx$ odakle nalazimo $-\frac{1}{y-a} = kx + C$, odnosno $y = -\frac{1}{kx+C} + a$.

Promotrimo sada neke biološke modele koji su opisani diferencijalnim jednadžbama kakve smo diskutirali u primjerima 4.8 i 4.9.

Primjer 4.10 Eksponencijalni rast.

Neka $N(t)$ označava brojnost neke populacije u trenutku $t \geq 0$, te neka je $N(0) = N_0 > 0$. Promjena populacije je opisana jednadžbom $N'(t) = rN(t)$. Kad je $r > 0$ brojnost populacije raste, dok za $r < 0$ brojnost populacije opada.

Iz primjera 4.8 znamo da je rješenje $N(t) = Ce^{rt}$. Iz početnog uvjeta $N(0) = N_0$ slijedi $N(t) = N_0e^{rt}$.

Odavde vidimo da za $r > 0$ populacija raste eksponencijalno i to bez granice jer je $\lim_{t\to\infty} N(t) = \infty$.

Primjer 4.11 Ograničen rast: Bartalanffyjev model.

Neka $L(t)$ označava duljinu ribe starosti $t \geq 0$. Model pretpostavlja da funkcija $L(t)$ zadovoljava jednadžbu $L'(t) = k(A - L(t))$ uz početni uvjet $L(0) = L_0$. Ovdje je A pozitivna konstanta takva da je $A > L_0$. I $k > 0$ je također konstanta.

Smisao je da se u modelu pretpostavlja da $L(t)$ raste proporcionalno razlici $A - L(t)$; što se više iznos $L(t)$ približava vrijednosti A, to je rast usporeniji. Kad $L(t)$ dosegne vrijednost A imamo $L'(t) = 0$ i rast prestaje - dakle, A predstavlja teorijski maksimum do kojeg riba može narasti.

Prema primjeru 4.8, rješenje je dano s $-A + L(t) = Ce^{-kt}$. Sad početni uvjet daje $-A + L_0 = C$ pa imamo $A - L(t) = (A - L_0)e^{-kt}$, odnosno, $L(t) = A - (A - L_0)e^{-kt}$.

Dobili smo Bartalanffyjevu jednadžbu koju smo analizirali već i prije. Primijetimo da je (što se u postavkama modela i impliciralo) $\lim_{t\to\infty} L(t) = A$. Zbog ovoga se često konstanta A označava s L_∞.

Primjer 4.12 Logistička jednadžba.

Logistička jednadžba opisuje rast populacije u kojoj je rast per capita ovisan o gustoći. Označimo s $N(t)$ brojnost populacije u trenutku $t \geq 0$ i promotrimo jednadžbu $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$ pri čemu su $r, K > 0$ konstante.

Jednadžbu možemo pisati u obliku $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r(1 - \frac{N}{K})$. Veličina $\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}$ opisuje rast per capita. U ovom modelu taj rast ovisi linearno o veličini populacije N.

Veličina K se zove kapacitet rasta, a veličina r intrinsična brzina rasta. Iz jednadžbe vidimo da je rast pozitivan za $N < K$, a negativan ako je $N > K$. Dakle, K predstavlja veličinu populacije koju vanjsko okruženje (sistem) može podnijeti.

Pišući jednadžbu u obliku $\frac{dN}{dt} = -\frac{r}{K}N(N - K)$ vidimo iz primjera 4.9 (ovdje je $a = 0$, $b = K$) da je rješenje

$$N(t) = \frac{-KCe^{-\frac{r}{K}(-K)t}}{1 - Ce^{-\frac{r}{K}(-K)t}} = \frac{-CKe^{rt}}{1 - Ce^{rt}} = \frac{CK}{C - e^{-rt}} = \frac{K}{1 - \frac{1}{C}e^{-rt}}.$$

Uz početni uvjet $N(0) = N_0$ dobivamo $N_0 = \frac{CK}{C-1}$ odakle je $C = \frac{N_0}{N_0 - K}$. Tako konačno dobivamo oblik

$$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}}$$

s kojim smo operirali i ranije. Uočimo da je $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$.

Ovdje smo ignorirali trivijalna rješenja $N(t) = 0$ i $N(t) = K$ koja bismo dobili iz trivijalnih početnih uvjeta $N(t) = 0$, odnosno $N(t) = K$.

U daljnjem pretpostavimo da je $N_0 < K$.

Iz početne jednadžbe je vidljivo da je $N' > 0$ pa je u ovom slučaju N rastuća funkcija. Točka $t = 0$ je točka globalnog minimuma funkcije N na intervalu $[0, \infty)$, dok globalnog maksimuma na tom intervalu ova funkcija nema.

Nadalje, iz polazne jednadžbe vidimo da je $N''(t) = r(1 - \frac{N(t)}{K}) + rN(t)(-\frac{1}{K})$. Slijedi $N''(t) = r(1 - \frac{2N(t)}{K})$. Odavde lako utvrđujemo da je za $N(t) < \frac{K}{2}$ funkcija konveksna, dok je za $N(t) > \frac{K}{2}$ funkcija konkavna. Točka t za koju vrijedi $N(t) = \frac{K}{2}$ je točka infleksije. (Napomena. Jasno je da ovi posljednji zaključci vrijede tek ako za početnu vrijednost N_0 imamo $N_0 < \frac{K}{2}$.)

Graf funkcije $N(t)$ za $K = 6$, $N_0 = 1$

Zadaci: 11. domaća zadaća

1. Neka $L(t)$ označava duljinu određene vrste ribe u ovisnosti o starosti $t \geq 0$, pri čemu vrijeme mjerimo u mjesecima. Neka vrijedi $\frac{dL}{dt} = k(L_\infty - L(t))$ uz $L(0) = 1$, $k, L_\infty > 0$, $L_\infty > 1$. Istraživanje pokazuje da asimptotska duljina ove vrste ribe iznosi 123 cm, te da riba starosti 27 mjeseci dosegne polovinu asimptotske duljine tijela L_∞. Odredite K i L_∞. Odredite duljinu ribe nakon 10 mjeseci. Odredite starost u kojoj riba dosegne 90% asimptotske duljine.

2. Riješite jednadžbu $\frac{dy}{dx} = 2y(3 - y)$ uz početni uvjet $y(1) = 5$.

3. Riješite jednadžbu $\frac{dy}{dx} = (2 - y)(3 - y)$ uz početni uvjet $y(0) = 1$.

4. Riješite jednadžbu $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$ uz početni uvjet $y(0) = 0$.

5. Riješite jednadžbu $\frac{dy}{dx} = y^2 + 4$ uz početni uvjet $y(0) = 2$.

6. Neka je $N(t)$ veličina neke populacije u ovisnosti o $t \geq 0$. Pretpostavimo da vrijedi $\frac{dN}{dt} = 1.5N(1 - \frac{N}{50})$. Riješite ovu jednadžbu uz početni uvjet $N(t) = 10$. Odredite $\lim\limits_{t \to \infty} N(t)$.

7. Promotrimo jednadžbu $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$. Uz početni uvjet $N(0) = N_0$ pokazali smo da je rješenje ove jednadžbe dano s

$$N(t) = \frac{K}{1 + (\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt}}.$$

Pokažite da vrijedi i

$$r = \frac{1}{t}\ln(\frac{K-N_0}{N_0}) + \frac{1}{t}\ln(\frac{N(t)}{K-N(t)}).$$

Ova jednakost u praksi služi da se u modelima za koje vjerujemo da su podvrgnuti logističkom zakonu odredi r. Pretpostavimo da je $N(0) = 10$, $N(5) = 22$, $N(100) = 30$ i $N(200) = 30$. Ocijenite r.

8. Pretpostavimo da je populacija određene vrste divljači $N(t)$ opisana jednadžbom $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - H$. Smisao je da se populacija širi po logističkom zakonu pri čemu u svakoj jedinici vremena imamo fiksni gubitak u iznosu od H jedinki (čemu uzrok može biti, npr. lov). Riješite ovu jednadžbu za $r = 2$, $K = 1000$, $H = 180$.

9. U prethodnom modelu veličina H je bila konstantna. Model se može adaptirati tako da gubitak nije konstantan nego proporcionalan veličini populacije. To dovodi do jednadžbe $\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - hN$. Riješite ovu jednadžbu za $r = 2$, $K = 1000$, $h = 0,1$.

10. Pretpostavimo da tank sadrži 1000 l vode u kojoj je otopljeno 2 kg soli. Odredite koncentraciju soli u g/l u ovoj otopini.

    Pretpostavimo da želimo iz ove otopine dobiti otopinu u kojoj će koncentracija soli iznositi 1 g/l. To možemo učiniti na dva načina:

    (a) U tank dolijevamo čistu vodu (pretpostavimo da je kapacitet tanka dovoljno velik). Izračunajte koliko litara čiste vode treba doliti. (Uputa: elementarno.)

    (b) U tank ulijevamo čistu vodu brzinom od 2 litre u sekundi i istovremeno (uz pretpostavku da se otopina i voda instantno i idealno miješaju) ispuštamo kroz ventil na dnu tanka novonastalu otopinu istom brzinom od 2 litre u sekundi. Odredite vrijeme koje je potrebno da postignemo željenu koncentraciju soli te količinu vode koju smo pritom ulili u tank. (Uputa: postupite kao u primjeru 4.7.)

11. Jezero ima volumen 6800 m^3. Voda utječe i istječe iz jezera istom brzinom od 170 litara u sekundi. S obzirom na sastav okolnog tla poznato je da je koncentracija izvjesne tvari otopljene u jezeru i u dolaznom vodenom toku $0,7$ mg/l. Pretpostavimo da se uslijed izvjesne havarije koncentracija otopine te tvari u jezeru poveća za 10%. Koliko će vremena proteći prije nego se koncentracija otopine vrati u ravnotežni položaj. (Uputa: 1 m^3 sadrži 1000 l vode.)

Napomene i komentari

5 Matrice i sustavi linearnih jednadžbi

5.1 Operacije s matricama

Promotrimo tri sustava s po dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & = & 2, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & = & 0. \end{array}$$

U prvom slučaju jedino rješenje je uređen par $(3,1)$, drugi sustav ima beskonačno mnogo rješenja; to su svi uređeni parovi oblika $(2t+1,t)$, $t \in \mathbb{R}$, a treći sustav nema rješenja. Dobro poznata analitičko-geometrijska interpretacija sustava linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice pokazuje da su to upravo svi slučajevi koji mogu nastupiti. U toj interpretaciji svaku jednadžbu shvaćamo kao jednadžbu pravca u ravnini. Tako rješavanje sustava svodimo na geometrijski problem nalaženja sjecišta dvaju pravaca. Jasno je da se dva pravca mogu sjeći u jedinstveno određenoj točki, mogu biti paralelni te stoga bez zajedničkih točaka i mogu se podudarati. Upravo to su situacije koje uočavamo, redom, u tri prethodno navedena sustava.

Općenito se u praksi prirodno pojavljuju i sustavi linearnih jednadžbi s više od dvije nepoznanice. U takvim situacijama očito se više ne možemo osloniti na analitičko geometrijsku interpretaciju i zato je nužno naći drugačije interpretacije i metode rješavanja.

Promotrimo ponovo prvi od navedenih sustava i riješimo ga na uobičajeni način. Najprije možemo od druge jednadžbe oduzeti prvu. Dobivamo $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ & - & 2x_2 & = & -2 \end{array}$. Podijelimo sad drugu jednadďbu s -2; dobivamo $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ & & x_2 & = & 1 \end{array}$. Na kraju, drugu jednadžbu oduzmimo od prve; dobivamo sustav $\begin{array}{rcr} x_1 & = & 3 \\ x_2 & = & 1 \end{array}$ u kojem se rješenje eksplicitno pojavljuje (iščitava): $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Jasno je da navedeni postupak možemo evidentirati tako da naznačimo što se u svakom pojedinom koraku događalo s koeficijentima sustava. Zapisujući samo koeficijente u odgovarajuću tablicu (i pamteći pozicije nepoznanica x_1 i x_2 te mjesto i ulogu slobodnih koeficijenata), naš postupak rješavanja može biti zapisan na sljedeći način:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Ovakav način označavanja prirodno nas dovodi do pojma matrice. Matrice se pojavljuju i u brojnim drugim situacijama.

Definicija 5.1 *Realna matrica tipa (m,n) je kolekcija od mn realnih brojeva organiziranih u m redaka i n stupaca. Skup svih realnih matrica tipa (m,n) označavamo s M_{mn}.*

Tipično, matricu $A \in M_{mn}$ zapisujemo u obliku

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Brojevi A_{ij} zovu se koeficijenti matrice. Često simbolički pišemo i $A \in M_{mn}$, $A = [A_{ij}]$ pri čemu je iz formata matrice $(m \times n)$ jasno da je ovdje $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Na primjer, za $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 8 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \in M_{32}$ imamo $A_{11} = 2$, $A_{12} = -3$ itd.

Matrične koeficijente je prirodno označavati s dva indeksa. Pritom prvi indeks pokazuje redak, a drugi indeks stupac u kojem se određeni koeficijent nalazi. Na taj način oznaka A_{ij} jednostavno pokazuje "adresu" pozicije u matrici na kojoj se taj koeficijent nalazi.

Za matrice $A = [A_{ij}]$ i $B = [B_{ij}]$ kažemo da su jednake ako su istog tipa i ako su im svi odgovarajući koeficijenti jednaki: $A_{ij} = B_{ij}$, $\forall i, j$.

Ukoliko je matrica A tipa (n, n) kažemo da je A kvadratna matrica (s n redaka i n stupaca). Skup svih kvadratnih matrica tipa (n, n) kratko označavamo s M_n.

Nadalje, često je korisno operirati i s jednostupčanim matricama. To su matrice tipa $(m, 1)$, a skup svih takvih matrica u skladu s općim sustavom označavanja bilježi se s M_{m1}. Analogno, M_{1n} predstavlja skup svih matrica sa samo jednim retkom i n stupaca. Posebno, kad je $n = 2$, imamo zapravo uređene parove realnih brojeva (s kojima uobičajeno operiramo kad u koordinatnom sustavu zapisujemo koordinate pojedinih točaka). Slično, za $n = 3$ govorimo o uređenim trojkama realnih brojeva. Treba primijetiti i da se u trivijalnom slučaju $m = n = 1$ zapravo radi o brojevima (te možemo pisati $M_1 = \mathbb{R}$).

U praksi se često susreću matrice različitih tipova poput, primjerice, $A = (1, \frac{2}{3}, -4, 5)$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 8 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ i sl. Potreba za matricama prirodno se javlja u svim situacijama u kojima se određeni podaci trebaju zapisati organizirano tako da iz zapisa možemo pročitati kronologiju kojom su ti podaci prikupljeni, ili ulogu koju ti podaci u našem razmatranju igraju ili bilo koju drugu značajku (karakter, hijerarhiju, ...) tih podataka.

Opišimo sada algebarske operacije s matricama: množenje matrice realnim brojem i zbrajanje matrica.

Definicija 5.2 *Neka je $A = [A_{ij}] \in M_{mn}$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Umnožak ili produkt αA se definira kao matrica istog tipa, $\alpha A \in M_{mn}$, čiji su koeficijenti definirani s $(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}$.*

Za $A = [A_{ij}], B = [B_{ij}] \in M_{mn}$, definira se zbroj kao matrica istog tipa, $A + B \in M_{mn}$, čiji su koeficijenti definirani s $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Obje operacije su definirane prirodno, "po koeficijentima". Na primjer,

$$(-2)\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da svaku matricu možemo množiti realnim brojem, dok se zbrajati mogu samo matrice istoga tipa. U oba slučaja rezultat je matrica istog tipa kao i matrice na kojima smo te operacije vršili.

U vezi s operacijom zbrajanja korisno je uočiti tzv. nul-matricu kao matricu čiji su svi koeficijenti jednaki 0, $0 \in M_{mn}$, $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. Primijetimo da nul-matrica može biti proizvoljnog tipa, no bez obzira na format koristimo istu oznaku. To ipak neće dovesti do zabune jer je uvijek iz konteksta jasno kojeg tipa je nul-matrica koja se u određenom računu pojavljuje.

Iz definicije zbrajanja je odmah jasno da vrijedi $A + 0 = A$ kao i $0 + A = A$ za svaku matricu A. Nadalje, za matricu $A = [A_{ij}] \in M_{mn}$ definiramo tzv. suprotnu matricu $-A \in M_{mn}$ čiji koeficijenti su definirani s $(-A)_{ij} = -A_{ij}$. Na primjer, za $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ imamo $-A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$. Jasno je da vrijedi $A + (-A) = 0$ i $-A + A = 0$, za svaku matricu A.

Svojstva operacija množenja matrica realnim brojem[8] i zbrajanja matrica navodimo u sljedećem teoremu.

Teorem 5.3 *Za operacije zbrajanja matrica i množenja matrica realnim brojem vrijedi:*

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall A, B, C \in M_{mn}$;
2. $A + B = B + A$, $\forall A, B \in M_{mn}$;
3. $A + 0 = A$, $\forall A \in M_{mn}$;
4. $-A + A = 0$, $\forall A \in M_{mn}$;
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $\forall A, B \in M_{mn}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
6. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\forall A \in M_{mn}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
7. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $\forall A \in M_{mn}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
8. $1 \cdot A$, $\forall A \in M_{mn}$.

Dokaz: Sve su tvrdnje zapravo očite. Formalni dokazi sastoje se od direktnih provjera koje izostavljamo. □

Svojstvo (1) se naziva asocijativnost zbrajanja matrica, a svojstvo (2) komutativnost. Svojstva (5) i (6) se nazivaju distributivnost u odnosu na matrični faktor i distributivnost u odnosu na skalarni faktor. Svojstvo (7) se naziva kvaziasocijativnost (prefiks "kvazi" odražava činjenicu da se u jednakosti pojavljuju dvije vrste množenja: množenje matrica skalarima i (u zagradi na desnoj strani jednakosti) međusobno množenje realnih brojeva.

[8] Običaj je da se ovom kontekstu realni brojevi nazivaju skalari. Često se zato kaže da αA predstavlja produkt matrice A i skalara α.

Inače, promatraju se i matrice s kompleksnim koeficijentima i tada ulogu skalara preuzimaju kompleksni brojevi. U toj situaciji definicije množenja skalarom i zbrajanja su iste. Ovdje ćemo se u našim razmatranjima ograničiti samo na realne matrice.

U osnovi, teorem tvrdi da za operacije s matricama vrijede "uobičajena računska pravila", analogna onima koja vrijede za zbrajanje i množenje brojeva. Korisno je primijetiti da se pravila (5) i (6), ako ih primjenjujemo čitajući jednakost s desna na lijevo prepoznaju kao "izlučivanje" na kakvo smo navikli pri računanju s brojevima. U daljnjem ćemo ova pravila koristiti prešutno bez posebnih komentara.

Uz množenje skalarima i zbrajanje, matrice se mogu i množiti. Međutim, množenje matrica je drugačije strukturirana operacija. Prije svega, matrice se mogu množiti tek ako su njihovi tipovi posebno usklađeni.

Definicija 5.4 *Za matrice $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{rs}$ kažemo da su ulančane ako je $n = r$. Drugim riječima, matrice A i B su ulančane ako je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B.*

Napomena 5.5 U definiciji ulančanih matrica bitan je poredak. Primijetimo, npr., da su matrice $A \in M_{34}$ i $B \in M_{42}$ ulančane, dok iste matrice B i A (dakle, u obratnom poretku) nisu ulančane.

Kvadratne matrice istog tipa $A, B \in M_n$ su uvijek ulančane u oba poretka.

Sad možemo definirati operaciju množenja matrica. Produkt AB će biti definiran samo u slučaju kad su matrice A i B ulančane.

Definicija 5.6 *Neka su $A = [A_{ij}] \in M_{mn}$ i $B = [B_{ij}] \in M_{ns}$. Tada se produkt matrica A i B definira kao matrica $AB \in M_{ms}$, pri čemu su koeficijenti $(AB)_{ij}$ matrice AB definirani s $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, s$.*

Smisao definicije je u tome da koeficijente produkta AB dobivamo množeći retke matrice A sa stupcima matrice B. Precizno, to znači sljedeće: i-ti redak matrice A glasi $[A_{i1}A_{i2}\ldots A_{in}]$, a j-ti stupac matrice B inosi $\begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix}$. Sada i-ti redak od A množimo s j-tim stupcem od B tako da množimo redom "član po član" i sve dobivene umnoške zbrojimo; rezultat $A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$ je, po definiciji, koeficijent na poziciji (i, j) u produktu AB.

Primjer 5.7 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$.

Odmah se može uočiti da je $A0 = 0$ i $0A = 0$ za svaku matricu A (pri čemu ovdje nul-matrica mora biti formatirana tako da ovi produkti budu definirani).

Nadalje, istaknimo da množenje matrica nije komutativna operacija. Naime, uzmemo li proizvoljne ulančane matrice A i B, prije svega B i A ne moraju biti ulančane, pa produkt BA onda nije niti definiran. Čak i kad su oba produkta definirana, rezultati općenito neće biti isti. Označimo li matrice iz prethodnog primjera s A i B vidimo da je

$AB \in M_2$. U ovom slučaju te su matrice ulančane i u obratnom poretku, no produkt BA je matrica tipa $(3,3)$ koja stoga nikako ne može biti jednaka AB.

U posebnoj situaciji kad su oba faktora kvadratne matrice istog tipa, recimo $A, B \in M_n$, oba produkta AB i BA su definirana i oba produkta su ponovo kvadratne matrice istog tipa (n,n). Međutim, čak ni tada ovi produkti neće općenito biti jednaki. Npr. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dok je $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

S druge strane, zanimljivo je da postoji matrica koja igra ulogu jedinice pri operaciji množenja. Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo kvadratnu matricu $I \in M_n$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ (jedinice na dijagonalnim mjestima $(1,1), (2,2), \dots, (n,n)$, a svi ostali koeficijenti su jednaki 0). Matrica I se naziva jedinična matrica n-tog reda. Sad je lako ustanoviti (provjerite!) da za svaku matricu $A \in M_{mn}$ vrijedi $IA = A$ i $AI = I$. Primijetimo da je matrica I koja se pojavljuje u prvoj jednakosti m-tog reda, dok matrica I koja množi A s desne strane n-tog reda[9].

U sljedećem teoremu navodimo svojstva množenja matrica.

Teorem 5.8 *Za sve matrice za koje su navedeni produkti definirani vrijedi:*

1. $A(B + C) = AB + AC$;
2. $(A + B)C = AC + BC$;
3. $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $IA = A$, $AI = A$;
5. $A(BC) = (AB)C$.

Dokaz: Formulacija "za koje su navedeni produkti definirani" znači da matrice koje se pojavljuju na lijevoj strani navedenih jednakosti moraju biti formatirane tako da navedene operacije imaju smisla. U svim takvim slučajevima, tvrdi se da je navedena jednakost točna. Na primjer, u prvoj jednakosti matrica A može biti proizvoljnog tipa (m,n). Matrice B i C moraju biti istog tipa da bi se mogle zbrojiti, a istog tipa će onda biti i njihov zbroj. S obzirom da A množi taj zbroj, jasno je da sada mora biti $B, C \in M_{ns}$ pri čemu s može biti proizvoljan prirodni broj.

Sami dokazi navedenih jednakosti svode se na direktnu provjeru. U prve četiri jednakosti ta je provjera sasvim lagana pa je izostavljamo. Dokažimo posljednju tvrdnju.

Neka je $A = [A_{ij}] \in M_{mn}$, $B = [B_{ij}] \in M_{ns}$, $C = [C_{ij}] \in M_{st}$. Uočimo da je tada $AB \in M_{ms}$, pa je produkt $(AB)C$ definiran i rezultat je matrica iz M_{mt}. Sasvim analogno se vidi da je i $A(BC) \in M_{mt}$. Zato preostaje samo vidjeti da su u matricama $(AB)C$ i $A(BC)$ svi odgovarajući koeficijenti jednaki.

[9] I ovdje, kao i kod nul-matrice, koristimo istu oznaku za matrice I različitih formata, a kontekst u kojem se I pojavljuje upućuje na format matrice I koja se pojavljuje u svakom pojedinom računu.

Odaberimo proizvoljne $1 \leq i \leq m$ i $1 \leq j \leq t$. Sada je

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{s} [AB]_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^{s} (\sum_{l=1}^{n} A_{il} B_{lk}) C_{kj},$$

a s druge strane imamo

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{p=1}^{n} A_{ip} [BC]_{pj} = \sum_{p=1}^{n} A_{ip} (\sum_{r=1}^{s} B_{pr} C_{rj}) = \sum_{r=1}^{s} (\sum_{p=1}^{n} A_{ip} B_{pr}) C_{rj},$$

odakle je očito da su dobiveni rezultati identični (do na izbor indeksa sumacije, što je irelevantno). Zamjena redoslijeda sumiranja (što je sadržaj posljednje jednakosti) moguća jer su sume konačne, a zbrajanje realnih brojeva komutativno i distributivno. $\square$

Napomena 5.9 Ako je $A \in M_n$ proizvoljna kvadratna matrica, definiramo potencije $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$ i, za proizvoljan $k \in \mathbb{N}$, $A^k = A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (k faktora).

Na primjer, za $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ imamo $A^2 = I$, $A^3 = A$, $A^4 = I$, itd.

Napomena 5.10 Na prvi pogled, množenje matrica se može učiniti neprirodnom i zamršenom operacijom. Pokazat će se, međutim, da je množenje matrica vrlo korisno te da se u mnogim situacijama sasvim prirodno pojavljuje.

Za sada, pokažimo to samo na primjeru sustava linearnih jednadžbi. Pogledajmo sustav $\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \end{array}$ i uvedimo matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Lako se provjeri da je sada matrična jednakost $AX = B$ jednostavan i kompaktan zapis polaznog sustava.

I općenito, ako bismo promatrali opći sustav linearnih jednadžbi koji se sastoji od m jednadžbi s n nepoznanica

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \ldots & + & A_{1n}x_n & = & B_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \ldots & + & A_{2n}x_n & = & B_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & \ldots \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \ldots & + & A_{mn}x_n & = & B_m \end{array}$$

pri čemu su A_{ij}, B_i zadani koeficijenti, možemo uvesti matrice

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn},$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in M_{n1}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \in M_{m1}.$$

Opet je lako ustanoviti (provjerite!) da matrična jednakost $AX = B$ predstavlja upravo polazni sustav linearnih jednadžbi. Preciznije, matrična jednadžba $AX = B$ ekvivalentna je zadanom sustavu linearnih jednadžbi.

Kad računamo s brojevima često se pojavljuje potreba za "dijeljenjem". Već smo istaknuli da dijeljenje nije neka nova operacija; stvarni sadržaj oznake $\frac{3}{8}$ je množenje broja 3 brojem 8^{-1} što je multiplikativni inverz broja 8 (pa, dakle, vrijedi $8 \cdot 8^{-1} = 1$). Prema aksiomu A7 znamo da svaki broj osim 0 ima multiplikativni inverz pa stoga smijemo "dijeliti" sa svakim brojem različitim od 0.

Po analogiji, možemo i za matricu A (ovdje ćemo se ograničiti samo na kvadratne matrice) pokušati potražiti njezin multiplikativni inverz.

Definicija 5.11 *Neka je $A \in M_n$. Kažemo da je matrica A regularna ako postoji matrica $B \in M_n$ takva da vrijedi $AB = BA = I$. U tom slučaju matrica B se označava s A^{-1} i naziva inverz matrice A.*

Ako za danu matricu A takva matrica B ne postoji, kaže se da je A singularna matrica.

Napomena 5.12 (a) Već smo spomenuli da je svaki realan broj $a \neq 0$ regularan (ima multiplikativni inverz). Kod matrica nije tako. Npr. lako se možemo uvjeriti da je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in M_2$ singularna. Zaista, kad bi postojala matrica $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ takva da vrijedi $AB = I$, izjednačavajući koeficijente na odgovarajućim matričnim mjestima dobili bismo jednadžbe $B_{11} + B_{21} = 1, B_{12} + B_{22} = 0, 2B_{11} + 2B_{21} = 0, 2B_{12} + 2B_{22} = 1$, koje su očito međusobno proturječne.

S druge strane, lako je uvidjeti da je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2$ regularna te da je $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ (provjerite!).

(b) Očito je I regularna matrica i $I^{-1} = I$ (uočite da isto vrijedi za broj 1 u polju realnih brojeva).

(c) Iz definicije je odmah jasno: ako je matrica A regularna, onda je i A^{-1} regularna matrica i njezin inverz je upravo A; dakle $(A^{-1})^{-1} = A$.

(d) Ako je matrica A regularna, njezin inverz je jedinstven. Zaista, pretpostavimo da za matricu A postoje matrice B i C takve da je $AB = BA = I$ i $AC = CA = I$. Sada umnožak BAC korištenjem asocijativnosti možemo izračunati na dva načina: s jedne strane imamo $(BA)C = IC = C$, a s druge $B(AC) = BI = B$. Zaključak: $B = C$.

(e) Ako su matrice A i B, obje n-tog reda, regularne, onda je i njihov produkt AB regularna matrica. Štoviše, tvrdimo da je $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Zaista, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. Sasvim analogno se vidi i da je $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$. Sad se lako vidi i da je produkt od k regularnih matrica, $k \in \mathbb{N}$, također regularna matrica.

Jedno od centralnih pitanja matričnog računa je karakterizacija regularnih matrica. Neformalno govoreći, pitanje glasi: kako prepoznati regularnu matricu. Preciznije, potrebno je naći nužne i dovoljne uvjete pod kojima je dana matrica regularna. Dodatno, kad je matrica regularna, potrebne su nam i metode za računanje njezinog inverza.

Jedan od važnih alata u karakterizaciji regularnih matrica je determinanata. Izlaganje opće teorije determinanti prelazi okvire ovih razmatranja. Zato ćemo se (na sasvim neformalnom nivou) ograničiti samo na izlaganje glavnih činjenica o determinantama kvadratnih matrica drugog reda.

Definicija 5.13 *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. *Determinanta matrice* A *je realan broj* $\det A$ *definiran s* $\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$.

Očito je iz definicije da vrijedi $\det 0 = 0$, $\det I = 1$, $\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -7$.

Neka svojstva determinante su očita (poput $\det(\alpha A) = \alpha^2 \det A$), no ovdje izostavljamo sustavni pregled svih činjenica o determinantama. Istaknut ćemo tek jedno od najvažnijih svojstava determinante:

Teorem 5.14 *Neka su* $A, B \in M_2$. *Tada je* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Dokaz: Neka je $A = [A_{ij}], B = [B_{ij}]$. Tada je

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix},$$

$$\det(AB) =$$

$$(A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21})(A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) - (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21})(A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) =$$

$$(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}) = \det A \cdot \det B.$$

□

Sad smo u mogućnosti dokazati željeni teorem kojim se karakteriziraju regularne matrice drugog reda.

Teorem 5.15 *Neka je* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \in M_2$. *Tada je* A *regularna ako i samo ako vrijedi* $\det A \neq 0$. *U tom slučaju je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}.$$

Dokaz: Pretpostavimo da je A regularna matrica. Tada postoji matrica B takva da je $AB = I$. Tada je $\det(AB) = \det I = 1$. Prema prethodnom teoremu odavde imamo $\det A \cdot \det B = 1$ što pokazuje da je nužno $\det A \neq 0$.

Obratno, ako je $\det A \neq 0$, pogledajmo matricu $B = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{bmatrix}$. Direktnom provjerom se vidi da za ovako definiranu matricu B vrijedi $AB = BA = I$; dakle, A je regularna i B je njezin inverz. □

Primjer 5.16 (a) Matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ je singularna jer je $\det A = 0$.

(b) Matrica $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ je regularna jer je $\det A = 22$. Prema formuli iz prethodnog teorema ovdje je $A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{1}{22} \\ -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$.

Sjetimo se da je, po definiciji, matrica A regularna ako postoji matrica B takva da $AB = BA = I$. S obzirom da množenje matrica općenito nije komutativno, ne može se a priori zaključiti da $AB = I$ povlači $BA = I$. Međutim, taj zaključak se može izvesti uz pomoć prethodnog teorema.

Korolar 5.17 *Neka za matricu $A \in M_2$ postoji matrica X takva da je $AX = I$. Tada je A regularna i $X = A^{-1}$.*

Dokaz: Zbog pretpostavke je $\det(AX) = \det I$. Iz prethodnog teorema izlazi $\det A \cdot \det I = 1$ odakle zaključujemo da je $\det A \neq 0$. Opet prema prethodnom teoremu zaključujemo da je A regularna matrica. Sad pomnožimo jednakost $AX = I$ s lijeve strane s A^{-1} pa dobivamo $A^{-1}AX = A^{-1}I$, tj. $X = A^{-1}$. $\square$

Napomena 5.18 Determinanta se općenito definira za kvadratne matrice bilo kojeg tipa. Opća definicija se može dati na više ekvivalentnih načina, no ni jedan nije sasvim jednostavan.

Navedimo samo formulu za determinantu matrice trećeg reda. Radi se o jednom od ekvivalentnih načina koji omogućuje da se determinanta matrice trećeg reda računa pomoću determinanti 2×2 matrica:

$$\det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} =$$

$$A_{11} \det \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} - A_{12} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{bmatrix} + A_{13} \det \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} =$$

$$A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{32}A_{23}) - A_{12}(A_{21}A_{33} - A_{31}A_{23}) + A_{13}(A_{21}A_{32} - A_{31}A_{22}).$$

Na primjer, primjenjujući navedenu formulu, lako se izračuna da je

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 2(5-0) - 3(0-0) + 4(0-5) = -10.$$

Može se dokazati da tvrdnja teorema 5.14 vrijedi za sve matrice $A, B \in M_n$; ta se tvrdnja naziva Binet-Cauchyjev teorem. I teorem 5.15 ima svoje poopćenje za kvadratne matrice n-tog reda.

Jedan od razloga zbog kojih te opće tvrdnje ovdje izostavljamo je i taj što ćemo u idućim točkama regularne matrice okarakterizirati drugim sredstvima. Također ćemo izvesti i algoritam za računanje inverzne matrice koji ne iziskuje upotrebu determinanti.

Primjer 5.19 Promotrimo populaciju u kojoj reprodukcija ovisi o dobi (jedinki koje se reproduciraju). Pretpostavimo da samo jedinke ženskog spola produciraju potomstvo, i to jednom godišnje. Pretpostavimo da vršimo evidenciju broja jedinki u populaciji nakon što završi sezona reprodukcije. Uzimamo da su jedinke rođene u toj sezoni tog trenutka u dobi 0. Nakon godinu dana, po isteku iduće sezone reprodukcije, ta će jedinka, ako preživi biti stara 1 godinu. Pretpostavit ćemo također da u toj populaciji sve jedinke žive najdulje do starosti 3 godine.

Označimo s $N_x(t)$ broj jedinki ženskog spola u toj populaciji koje su u trenutku t stare x godina. Imamo, dakle, brojeve $N_0(t)$, $N_1(t)$, $N_2(t)$ i $N_3(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$. Za svaki t možemo formirati jednostupčanu matricu

$$N(t) = \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix}.$$

Nadalje, neka od ukupnog broja ženskih jedinki starosti 0 njih 40% preživi iduću godinu, od svih starosti 1 neka iduću godinu preživi njih 30%, te neka od svih ženskih jedinki starosti 2 njih 10% preživi iduću godinu. Imamo, dakle, $N_1(t+1) = 0,4N_0(t)$, $N_2(t+1) = 0,3N_1(t)$, $N_3(t+1) = 0,1N_2(t)$.

Osim toga, pretpostavimo da je $N_0(t+1) = 2N_1(t) + 1,5N_2(t)$ (ova jednakost opisuje kumulativni učinak reprodukcije i preživljavanja novorođenih jedinki u prvoj godini života).

Sad dinamiku izmjene broja ženskih jedinki u promatranoj populaciji možemo izraziti u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \end{bmatrix}.$$

Kvadratna 4×4 matrica koja se pojavljuje u prethodnoj jednakosti naziva se Lesliejeva matrica i označava s L (uočimo da je u ovom modelu L neovisna o t). Sad prethodnu jednakost možemo pisati u obliku

$$N(t+1) = LN(t).$$

Za konkretan primjer pretpostavimo da u nekom trenutku t imamo $N_0(t) = 1000$, $N_1(t) = 200$, $N_2(t) = 100$, $N_3(t) = 10$. Množenjem matrice $N(t)$ matricom L dobivamo

$$\begin{bmatrix} N_0(t+1) \\ N_1(t+1) \\ N_2(t+1) \\ N_3(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 \\ 200 \\ 100 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 550 \\ 400 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Nakon još jedne iteracije dobili bismo

$$\begin{bmatrix} N_0(t+2) \\ N_1(t+2) \\ N_2(t+2) \\ N_3(t+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1.5 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 550 \\ 400 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 890 \\ 220 \\ 120 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Poopćimo li prethodna razmatranja dobivamo Lesliejevu matricu oblika

$$L = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \dots & F_{m-1} & F_m \\ P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Interpretacija ove matrice je potpuno analogna.

Zadaci: 12. domaća zadaća

1. Ispišite matrice $A = [A_{ij}], B = [B_{ij}] \in M_{23}$ ako je $A_{ij} = i + j$ i $B_{ij} = (-1)^{i+j}$.
2. Za kvadratnu matricu $A = [A_{ij}] \in M_n$ definiramo trag kao realan broj $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$. Izračunajte $\operatorname{tr} A$ ako je $A = [A_{ij}] \in M_3$, $A_{ij} = 2i - j$.
3. Izračunajte $\operatorname{tr} A$ ako je $A = [A_{ij}] \in M_n$, $A_{ij} = i + j$.
4. Neka je $D = \lambda I \in M_n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Pokažite da je $DA = AD$ za svaku matricu $A \in M_n$.

   Prepostavimo da je $D \in M_2$ matrica takva da vrijedi $AD = DA$ za svaku matricu $A \in M_2$. Dokažite da tada postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $D = \lambda I$.
5. Za matricu $A = [A_{ij}] \in M_{mn}$ neka je $T = [T_{ij}] \in M_{nm}$, $T_{ij} = A_{ji}$. Matrica T se zove transponirana matrica matrice A i označava se s A^t. Odredite transponiranu matricu A^t ako je (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, (b) $A = [A_{ij}] \in M_4$, $A_{ij} = \min\{i, j\}$.
6. Neka su $A, B \in M_2$. Dokažite da vrijedi $(\alpha A)^t = \alpha A^t$, za $\alpha \in \mathbb{R}$, te da je $(A+B)^t = A^t + B^t$ i $(AB)^t = B^t A^t$. (Napomena. Iste tvrdnje vrijede i općenito, ne samo za matrice tipa $(2, 2)$.)
7. Kažemo da je kvadratna matrica A simetrična ako vrijedi $A^t = A$. Odredite realan broj x tako da matrica A bude simetrična ako je (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}$, (b) $A = \begin{bmatrix} 6 & x \\ \frac{x+2}{x} & 1 \end{bmatrix}$.
8. Izračunajte $C = AB$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Uvjerite se da je $C = 5S_1 + 2S_2 + 4S_3$ ako smo sa S_1, S_2, S_3 označili stupce matrice A.

   Uvjerite se da analogna tvrdnja vrijedi i ako uzmemo $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$; i tada će biti $C = AB = 2S_1 + (-1)S_2 + (-4)S_3$. Poopćite!

9. Pokažite da je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ regularna pa joj izračunajte inverz.

10. Za koje x je matrica $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}$ regularna? Za sve takve x izračunajte A^{-1}.

11. Neka je u nekoj populaciji život i reprodukcija ženskih jedinki opisan Lesliejevom matricom
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$
Interpretirajte ovaj model (u duhu izlaganja u primjeru 5.19).

12. Neka je u nekoj populaciji život i reprodukcija ženskih jedinki opisan Lesliejevom matricom
$$\begin{bmatrix} 1.2 & 3.2 \\ 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$
Interpretirajte ovaj model. Nadalje, ako je $N_0(0) = 100$ i $N_1(0) = 0$, odredite $N(t)$ za $t = 1, 2, 3, \ldots, 6$.

5.2 Gaussova metoda eliminacije

Uvedimo najprije pojam elementarne transformacije matrice. Pokazat će se da upravo na elementarnim transformacija počiva opća metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi - Gaussova metoda eliminacije.

Definicija 5.20 *Neka je $A \in M_{mn}$. Elementarne transformacije redaka matrice A su:*

1. *međusobna zamjena dva retka matrice A;*
2. *množenje nekog retka matrice A skalarom $\lambda \neq 0$;*
3. *pribrajanje nekog retka matrice A, prethodno pomnoženog skalarom λ, nekom drugom retku matrice A.*

Pod množenjem retka skalarom λ podrazumijevamo množenje svih koeficijenata iz tog retka matrice skalarom λ. Analogno, i pribrajanje retka drugom retku vršimo "član po član".

Napomenimo da je uobičajeno operirati i s elementarnim transformacijama stupaca koje su definirane na sasvim analogan način. U našim razmatranjima ograničit ćemo se samo na transformacije redaka.

Primjer 5.21 U nizu

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

svaka matrica je iz prethodne nastala primjenom jedne od transformacija: najprije smo prvi redak množili s $\frac{1}{2}$, zatim smo prvi redak množili s -1 i pribrojili drugom, a na kraju smo zamijenili drugi i treći redak.

Kako se iz primjera naslućuje, sustavnom primjenom elementarnih transformacija danu matricu možemo prevesti u znatno jednostavniji oblik. U opisu Gaussove metode eliminacije kao univerzalne metode rješavanja sustava linearnih jednadžbi ključnu ulogu igra tzv. reducirani oblik matrice.

Definicija 5.22 *Reducirani oblik matrice opisan je sljedećim uvjetima:*

- *prvi ne-nul koeficijent (stožerni koeficijent) svakog retka jednak je 1. U stupcu tog koeficijenta svi ostali koeficijenti iznose 0.*
- *svaki stožerni koeficijent nalazi se desno od stožernih koeficijenata iznad njega.*
- *svi retci koji sadrže samo nul koeficijente nalaze se ispod redaka u kojima je bar jedan koeficijent različit od 0 (dakle, trivijalni retci, ako ih ima, nalaze se ispod netrivijalnih).*

Evo nekoliko primjera matrica u reduciranom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Važna je činjenica da se svaka matrica može prevesti u reducirani oblik primjenom konačnog broja elementarnih transformacija redaka. Preciznije to možemo izreći nakon što uvedemo sljedeći pojam.

Definicija 5.23 *Kažemo da su matrice istog tipa $A, B \in M_{mn}$ ekvivalentne (i pišemo $A \sim B$) ako se matrica B može dobiti primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka matrice A.*

Korisno je uočiti da iz $A \sim B$ slijedi i $B \sim A$. Primjenom istih onih transformacija kojima smo iz A dobili B, u obrnutom redoslijedu, iz B možemo rekonstruirati A.

Teorem 5.24 *Neka je $A \in M_{mn}$. Postoji matrica $B \in M_{mn}$ u reduciranom obliku takva da je $A \sim B$.*

Dokaz: Teorem ćemo dokazati konstruktivno. To znači da ćemo dokazujući teorem kreirati algoritam kojim ćemo kasnije u praksi svaku pojedinu matricu transformirati do reduciranog oblika.

(I) Neka je $A = [A_{ij}]$. Pogledajmo najprije A_{11}. Ako je $A_{11} = 0$ potražimo u prvom stupcu koeficijent različit od 0; neka je to A_{i1}. Sada zamijenimo prvi i i-ti redak. Na ovaj način dobivamo matricu ekvivalentnu s A koja u lijevom gornjem uglu ima koeficijent različit od 0. (Ako svi koeficijenti u prvom stupcu matrice A iznose 0, odmah prelazimo na korak (II).)

Ako koeficijent u lijevom gornjem uglu iznosi $\lambda \neq 0$, množimo prvi redak s $\frac{1}{\lambda}$ (to je transformacija (2)) i u lijevom gornjem uglu matrice dobivamo jedinicu. Primjenom transformacije (3) sad lagano "poništimo" sve ostale elemente u prvom stupcu. Konkretno, množimo prvi redak s $-A_{21}$ i dodajemo drugom retku; očito, na mjestu $(2, 2)$ dobit ćemo 0. Analogno nastavljamo dalje; množimo prvi redak s $-A_{31}$ i dodajemo trećem retku itd.

Nakon svega, dolazimo do matrice $B \in M_{mn}$ takve da je $A \sim B$ i

$$B = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1n} \\ 0 & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2n} \\ 0 & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & B_{m2} & B_{m3} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

Ako je A u prvom stupcu imala sve koeficijente jednake 0, tj. ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}$$

postupat ćemo u drugom koraku i u svim daljnjim koracima jednako kao što ćemo to činiti s matricom B. Zato ćemo daljnje korake i formulirati samo za matricu B.

(II) Željeli bismo da je $B_{22} \neq 0$. Ako je $B_{22} = 0$, zamjenom drugog i nekog "nižeg" retka u matrici B (pod niži podrazumijevamo i-ti, gdje je $i > 2$) dovedemo na mjesto $(2,2)$ u matrici B koeficijent različit od 0. Ako to nije moguće, onda je B oblika

$$B = \begin{bmatrix} 1 & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1n} \\ 0 & 0 & B_{23} & \dots & B_{2n} \\ 0 & 0 & B_{33} & \dots & B_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & B_{m3} & \dots & B_{mn} \end{bmatrix}$$

i odmah prelazimo na korak (III).

Ako smo uspjeli na mjesto $(2,2)$ dovesti koeficijent različit od 0, drugi redak tad pomnožimo s njegovom recipročnom vrijednošću (tako da na mjestu $(2,2)$ proizvedemo jedinicu), a onda, kao u koraku (I), primjenjujući transformaciju (3), poništimo sve ostale kooeficijente u drugom stupcu. Nakon svega, dobivamo matricu $C \in M_{mn}$ takvu da je $A \sim B \sim C$ i

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ 0 & 1 & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ 0 & 0 & C_{33} & \dots & C_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & C_{m3} & \dots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

(III) Postupak nastavimo na analogan način. U konačno koraka, dobivamo matricu u reduciranoj formi. □

Primjer 5.25 (a) Algoritam opisan u prethodnom dokazu primijenjen je već u primjeru 5.21. Da posljednju matricu u nizu zaista dovedemo u reducirani oblik potrebno je još treći redak pomnožiti s -2 i pribrojiti drugom te nakon toga drugi redak pomnožiti s -1 i pribrojiti prvom.

(b) Pogledajmo također niz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 5 & -12 & 12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & 11 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & -12 & 8 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nije teško rekonstruirati koje su elementarne transformacije provedene u svakom koraku, a krajnja matrica je zaista u reduciranom obliku.

Napomena 5.26 Reducirani oblik dane matrice je jedinstveno određen. (Uvjerite se u to! Uputa: ako su za danu matricu A matrice B i C obje u reduciranom obliku i takve da je $A \sim B$ i $A \sim C$, onda je i $B \sim C$.)

Sad smo spremni posvetiti se sustavima linearnih jednadžbi.

Opći sustav linearnih jednadžbi nad poljem $\mathbb{R}$ sastoji se od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica, $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & B_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & = & B_2 \\ \dots & & & & & & & & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & B_m \end{array}. \tag{12}$$

Skalari A_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$, zovu se koeficijenti sustava, a $B_1, \dots, B_m$ slobodni članovi.

Definicija 5.27 *Rješenje sustava (12) je svaka uređena n-torka realnih brojeva $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ za koju supstitucija $x_1 = \gamma_1, x_2 = \gamma_2, \dots, x_n = \gamma_n$ zadovoljava sve jednadžbe (tj. ta supstitucija sve jednadžbe prevodi u numeričke identitete).*

Naglasimo da je uređena n-torka $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ koja zadovoljava sve jednadžbe *jedno* rješenje (*ne n* rješenja). Tako npr. sustav $\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & x_2 & = & 1 \end{array}$ ima jedinstveno rješenje i ono glasi $(2, 1)$, a *komponenete* tog rješenja su $\gamma_1 = 2$ i $\gamma_2 = 1$.

Uz sustav (12) uobičajeno vežemo sljedeće matrice:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in X_n, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \in M_m,$$

$$A_p = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} & B_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} & B_m \end{bmatrix} \in M_{m,n+1}.$$

One se, redom, zovu matrica sustava, matrica nepoznanica, matrica slobodnih članova i proširena matrica sustava.

Uz pomoć uvedenih matrica sustav (12) možemo pisati (na temelju definicije množenja matrica) u ekvivalentnom obliku

$$AX = B. \tag{13}$$

Napomena 5.28 Sustav (12) i matrična jednadžba (13) ekvivalentni su, ne samo po zapisu, nego i u sljedećem smislu: uređena n-torka $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ zadovoljava (12) ako i samo ako jednostupčana matrica $\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$ zadovoljava (13). Drugim riječima, prirodna identifikacija $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \mapsto \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$ predstavlja bijekciju skupa svih rješenja sustava (12) na skup svih rješenja matrične jednadžbe (13).

U nastavku ćemo slobodno, bez eksplicitnog referiranja na prethodnu napomenu, koristiti i (12) i (13).

Definicija 5.29 *Kaže se da je sustav linearnih jednadžbi (12) homogen ako vrijedi $B_1 = \cdots = B_m = 0$. Opći oblik homogenog sustava je dakle*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & 0 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & = & 0 \\ \cdots & & & & & & & & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & 0 \end{array}, \tag{14}$$

odnosno

$$AX = 0\,. \tag{15}$$

Propozicija 5.30 *Homogeni sustav je uvijek rješiv. Ako su $C_1, C_2 \in M_{n1}$ rješenja homogenog sustava (15), onda je, za $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, i $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ rješenje istog sustava.*

Dokaz: Prva tvrdnja je očita jer svaki homogeni sustav ima bar (tzv.) trivijalno rješenje $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = (0, 0, \dots, 0)$.

Da bismo dokazali drugu tvrdnju dovoljno je vidjeti da je $A(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = 0$. Međutim, jer su po pretpostavci C_1 i C_2 rješenja, imamo $AC_1 = 0$ i $AC_2 = 0$ i sad prema teoremu 5.8 imamo $A(\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = \lambda_1 AC_1 + \lambda_2 AC_2 = 0$. $\square$

Uzmimo sada proizvoljni sustav linearnih jednadžbi $AX = B$. U opisu strukture skupa svih rješenja ovog sustava spretno je paralelno promatrati i pridruženi homogeni sustav (s istom matricom sustava A) $AX = 0$. Označimo s Ω skup svih rješenja tog homogenog sustava. Dodatno, pretpostavimo da imamo i jedno poznato rješenje, recimo C_0, polaznog sustava $AX = B$. U sljedećoj propoziciji pokazujemo da je time određen skup svih rješenja sustava $AX = B$.

Propozicija 5.31 *Neka je dan proizvoljan sustav $AX = B$, neka je C_0 bilo koje njegovo rješenje, te neka je Ω skup svih rješenja pridruženog homogenog sustava $AX = 0$. Tada je $C_0 + \Omega := \{C_0 + C \,:\, C \in \Omega\}$ skup svih rješenja sustava $AX = B$.*

Dokaz: Vrijedi, dakle, $AC_0 = B$. Jasno je da za proizvoljan $C \in \Omega$ imamo $A(C_0 + C) = AC_0 + AC = B + 0 = B$ pa je $C_0 + C$ rješenje sustava $AX = B$. Obratno, pretpostavimo da je C_1 neko rješenje sustava $AX = B$, dakle, $AC_1 = B$. Oduzmimo od toga jednakost $AC_0 = B$. Dobivamo $A(C_1 - C_0) = 0$, što pokazuje da je $C_1 - C_0$ rješenje pridruženog homogenog sustava. Zato postoji $C \in \Omega$ takav da $C_1 - C_0 = C$, tj. $C_1 = C_0 + C$. □

Propozicija ne govori o tome kako se mogu naći partikularno rješenje C_0 i skup Ω. Tvrdi se samo da je, ako poznajemo C_0 i Ω, kompletan skup rješenja jednak $C_0 + \Omega$.

Primjer 5.32 Pogledajmo sustav $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{array}$.

Ovdje možemo uzeti $C_0 = (2, -1, 0)$.

Promotrimo sad pridruženi homogeni sustav $\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$.

Kad zbrojimo prve dvije jednadžbe nalazimo $x_1 = 0$. Uvrštavanjem u sve tri jednadžbe dobivamo $x_2 + x_3 = 0$. Zato x_3 možemo odabrati proizvoljno: $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Tada je $x_2 = -t$, pa je opće rješenje pridruženog homogenog sustava $(0, -t, t) = t(0, -1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. Zato je $\Omega = \{t(0, -1, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$ te je $C_0 + \Omega = \{(2, -1, 0) + t(0, -1, 1),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Gaussova metoda eliminacije je algoritam kojim rješavamo sustave linearnih jednadžbi. Kako smo vidjeli u prethodnoj propoziciji, to se svodi na nalaženje jednog partikularnog rješenja zadanog sustava $AX = B$ i na određenje skupa Ω svih rješenja pridruženog homogenog sustava $AX = 0$. Jedno od vrijednih svojstava Gaussove metode je činjenica da u primjeni nije potrebno unaprijed utvrđivati je li zadani sustav uopće rješiv. Naime, iz opisa metode bit će vidljivo da eventualna nerješivost sustava u izvjesnom trenutku u postupku rješavanja postaje očita.

Opis Gaussove metode započinjemo jednom "strateškom" definicijom.

Definicija 5.33 *Dva sustava linearnih jednadžbi su ekvivalentna ako imaju isti broj nepoznanica i isti skup rješenja.*

U pozadini ove definicije je ideja da od danog sustava prijeđemo na neki ekvivalentan, ali što jednostavniji, tako da mu rješenja budu lako dokučiva. Uočimo da broj jednadžbi ovdje nije relevantna činjenica. To je i intuitivno jasno, jer danom sustavu uvijek možemo dodati neku od njegovih jednadžbi ili njihovih kombinacija čime se broj jednadžbi mijenja, a skup rješenja evidentno ostaje isti. U drugu ruku, uočimo li u danom sustavu da su npr. dvije jednadžbe proporcionalne, očito je da jednu od njih možemo izostaviti bez ikakvih posljedica.

Prethodna definicija odmah otvara pitanje prepoznavanja, odnosno produciranja sustava koji su ekvivalentni zadanome.

Definicija 5.34 *Elementarne transformacije sustava linearnih jednadžbi su:*

1. *zamjena poretka dviju jednadžbi,*

2. *množenje neke jednadžbe skalarom* $\lambda \neq 0$,

3. *pribrajanje neke jednadžbe pomnožene skalarom* λ *nekoj drugoj jednadžbi sustava.*

Propozicija 5.35 *Primjenom konačnog broja elementarnih transformacija na dani sustav linearnih jednadžbi dobiva se ekvivalentan sustav.*

Dokaz: Dovoljno je pokazati da su sustavi $AX = B$ i $A_1X = B_1$ ekvivalentni, gdje ovaj drugi nastaje iz prvog primjenom samo jedne od gornjih transformacija. Za to je pak dovoljno vidjeti da je proizvoljno rješenje od $AX = B$ ujedno i rješenje od $A_1X = B_1$; obratna inkluzija tada slijedi iz činjenice da se i $AX = B$ dobiva iz $A_1X = B_1$ primjenom istovrsne transformacije.

Ako smo $A_1X = B_1$ dobili iz $AX = B$ primjenom transformacije (1) ili (2) tvrdnja je potpuno trivijalna. Preostaje provjeriti učinak transformacije (3). Uzmimo da smo i-tu jednadžbu u $AX = B$ pomnožili s λ i dodali k-toj te na taj način dobili sustav $A_1X = B_1$. Neka je $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ proizvoljno rješenje od $AX = B$. Kako se polazni i dobiveni sustav razlikuju samo u k-toj jednadžbi, jedino treba provjeriti da $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ zadovoljava k-tu jednadžbu sustava $A_1X = B_1$. No, to je gotovo očito:

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda A_{ij} + A_{kj})\gamma_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\gamma_j + \sum_{j=1}^{n} A_{kj}\gamma_j = \lambda B_i + B_k \,.$$

□

Napomena 5.36 Uočimo da su elementarne transformacije sustava zapravo elementarne transformacije redaka proširene matrice A_p.

Na tehničkom planu to znači da za zadani sustav možemo formirati njegovu proširenu matricu A_p te izvoditi elementarne transformacije redaka te matrice. U svakom trenutku iz transformirane matrice A_p' možemo rekonstruirati njoj pripadajući sustav jednadžbi, a propozicija 5.35 jamči da će dobiveni sustav biti ekvivalentan polaznome.

Prijeđimo sada na opis Gaussove metode eliminacije. Neka je dan sustav

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & \cdots & + & A_{1n}x_n & = & B_1 \\ A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & \cdots & + & A_{2n}x_n & = & B_2 \\ \ldots & & & & & & & & \\ A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & \cdots & + & A_{mn}x_n & = & B_m \end{array} . \tag{16}$$

Primjenom teorema 5.24 matricu A_p možemo elementarnim transformacijama svesti na njezin reducirani oblik[10]. Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je taj reducirani oblik

[10] U stvari, smisao je u tome da tražimo reducirani oblik matrice sustava A; pritom račun vodimo za proširenu matricu A_p.

$$A'_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & A'_{1,r+1} & \cdots & A'_{1n} & | & B'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & A'_{2,r+1} & \cdots & A'_{2n} & | & B'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & A'_{r,r+1} & \cdots & A'_{rn} & | & B'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & B'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & B'_m \end{bmatrix}.$$

Pripadajući sustav glasi:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1+ & \cdots & & + & A'_{1,r+1}x_{r+1}+ & \cdots & +A'_{1n}x_n = & B'_1 \\ & x_2+ & \cdots & + & A'_{2,r+1}x_{r+1}+ & \cdots & +A'_{2n}x_n = & B'_2 \\ & & & & & & \cdots & \\ & & & x_r+ & A'_{r,r+1}x_{r+1}+ & \cdots & +A'_{rn}x_n = & B'_r \\ 0\cdot x_1+ & 0\cdot x_2+ & \cdots & +0\cdot x_r+ & 0\cdot x_{r+1}+ & \cdots & +0\cdot x_n = & B'_{r+1} \\ \cdots & & & & & & & \\ 0\cdot x_1+ & 0\cdot x_2+ & \cdots & +0\cdot x_r+ & 0\cdot x_{r+1}+ & \cdots & +0\cdot x_n = & B'_m \end{array}. \tag{17}$$

Prema *propoziciji 5.35*, dobiveni sustav (17) je ekvivalentan polaznom sustavu (16).

Sada iz izgleda sustava (17), odnosno iz matrice A'_p, odmah uviđamo da je (17) rješiv ako i samo ako je $B'_{r+1} = \ldots = B'_m = 0$.

Ako, dakle, za bar jedan i, $r+1 \le i \le m$, vrijedi $B'_i \neq 0$, zadani sustav nema rješenja.

Pretpostavimo sada da je $B'_{r+1} = \ldots = B'_m = 0$. Tada dobivena matrica A'_p ima oblik

$$A'_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & A'_{1,r+1} & \cdots & A'_{1n} & | & B'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & A'_{2,r+1} & \cdots & A'_{2n} & | & B'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & A'_{r,r+1} & \cdots & A'_{rn} & | & B'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde odmah vidimo da je $C_0 = \begin{bmatrix} B'_1 \\ B'_2 \\ \vdots \\ B'_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ jedno partikularno rješenje.

Preostaje naći skup Ω svih rješenja pripadnog homogenog sustava. To također možemo iščitati iz gornje matrice; pritom treba zamišljati da je $B'_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$, jer su u polaznom pridruženom homogenom sustavu svi slobodni članovi bili jednaki 0. Sad iz matrice A'_p nalazimo sljedeća rješenja pridruženog homogenom sustava:

$$C_1 = \begin{bmatrix} -A'_{1,r+1} \\ -A'_{2,r+1} \\ \vdots \\ -A'_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -A'_{1,r+2} \\ -A'_{2,r+2} \\ \vdots \\ -A'_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, C_{n-r} = \begin{bmatrix} -A'_{1,n} \\ -A'_{2,n} \\ \vdots \\ -A'_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da $C_1, \ldots, C_{n-r}$ jednostavno nastaju iz odgovarajućih stupaca matrice A'_p. Međutim, za razliku od stupaca matrice A'_p koji imaju m komponenti, $C_1, \ldots, C_{n-r}$ imaju n komponenti (tj. pripadaju skupu M_{n1}, kao što i treba biti.

Da su $C_1, \ldots, C_{n-r}$ zaista rješenja pridruženog homogenog sustava vidi se direktnom provjerom. Prema propoziciji 5.30 sada je $\lambda_1 C_1 + \lambda_1 C_2 + \ldots + \lambda_{n-r} C_{n-r}$ također rješenje tog homogenog sustava, za svaki izbor skalara $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$.

Tvrdimo da je time opisan kompletan skup Ω, tj. da je

$$\Omega = \{\lambda_1 C_1 + \lambda_1 C_2 + \ldots + \lambda_{n-r} C_{n-r} : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}\}.$$

Da to dokažemo, pogledajmo proizvoljno rješenje pridruženoga homogenog sustava $C = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$. Eksplicitno, to znači:

$$\begin{array}{ccccccccc} \gamma_1 + & \cdots & \cdots & \cdots & +A'_{1,r+1}\gamma_{r+1}+ & \cdots & +A'_{1n}\gamma_n = & 0 \\ & \gamma_2 + & \cdots & \cdots & +A'_{2,r+1}\gamma_{r+1}+ & \cdots & +A'_{2n}\gamma_n = & 0 \\ & & & & & & \cdots & \\ & & & \gamma_r & +A'_{r,r+1}\gamma_{r+1}+ & \cdots & +A'_{rn}\gamma_n = & 0 \end{array}.$$

Sad tvrdimo da je $C = \gamma_{r+1} C_1 + \gamma_{r+2} C_2 + \ldots + \gamma_n C_{n-r}$. Da bismo to dokazali, treba samo usporediti sve komponente. Međutim, prethodni skup jednakosti daje upravo jednakost prvih r komponenti, dok su jednakosti ostalih $n-r$ komponenti trivijalne.

Iz svega rečenog (i iz propozicije 5.31) slijedi: opće rješenje dobivenog, a time i polaznog sustava je dano s $C_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i C_i$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r} \in \mathbb{R}$.

Napomena 5.37 Prethodni postupak potpuno opisuje metodu rješavanja i skup rješenja svakog sustava linearnih jednadžbi. S obzirom na opći oblik rješenja, kaže se da rješenje ovisi o $n-r$ slobodnih parametara; to su skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-r}$. Smisao je u tome da ti skalari mogu biti uzeti potpuno proizvoljno i za svaki izbor njihovih vrijednosti dobije se jedno rješenje sustava.

Primjer 5.38 Riješimo sustav

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & + & & - & x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & + & 5x_5 & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 12x_4 & + & 12x_5 & = & -1 \end{array}.$$

Transformirajući proširenu matricu sustava A_p dobivamo sljedeći niz ekvivalentnih matrica, odnosno sustava:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & -1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & -12 & 12 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & 11 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -5 & -7 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & -15 & 11 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 0 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -12 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -12 & 8 & -4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Odavde vidimo da rješenje ovisi o dva slobodna parametra. Pišemo li rješenja kao jednostupčane matrice, dobivamo

$$C_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ te } C_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Opće rješenje danog sustava je, dakle, $C = C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Uočimo da ima situacija kad se slobodni parametri ne pojavljuju. U oznakama iz prethodnog opisa metode, to je onda i samo onda kad je $n = r$. U takvim slučajevima skup Ω je jednočlan (i sastoji se samo od trivijalnog, nul-rješenja), a skup svih rješenja sustava $AX = B$ je onda također jednočlan i svodi se na C_0.

Primjer 5.39 Riješimo sustav $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \end{array}$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 5 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 3 & -3 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -11 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right].$$

Vidimo da je ovdje pridruženi homogeni sustav ima samo trivijalno rješenje. Zato je rješenje zadanog sustava jedinstveno i iznosi $C_0 = (19, -8, -3)$.

Kad je matrica sustava kvadratna (tj. kad imamo sustav s istim brojem jednadžbi i nepoznanica) Gaussova metoda eliminacije otkriva jednostavan nužan i dovoljan uvjet pod kojim će rješenje sustava $AX = B$ biti jedinstveno. Prije nego ga iskažemo, uočimo da je rješenje tog sustava jedinstveno ako i samo ako pridruženi homogeni sustav $AX = 0$ ima jedinstveno (dakle, samo trivijalno) rješenje. Sljedeći korolar pokazuje da je prethodni primjer u tom smislu tipičan.

Korolar 5.40 *Neka je $A \in M_n$. Homogeni sustav $AX = 0$ ima samo trivijalno rješenje $X = 0$ ako i samo je reducirani oblik matrice A jedinična matrica $I \in M_n$.*

U idućoj točki pokazat ćemo da je reducirani oblik kvadratne matrice A jedinična matrica ako i samo ako je A regularna. To će, zajedno s prethodnim korolarom, dati: za $A \in M_n$ homogeni sustav $AX = 0$ ima samo trivijalno rješenje ako i samo ako je A regularna matrica.

Zadaci: 13. domaća zadaća

1. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 3x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & 4x_2 & = & -4 \end{array}$.

2. U ovisnosti o k riješite sustav $\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & & 3x_2 & = & 5 \\ 4x_1 & - & 6x_2 & = & k \end{array}$.

3. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array}$.

4. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$.

5. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 11 \end{array}$.

6. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$.

7. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 6 \end{array}.$

8. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & = & -1 \end{array}.$

9. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}.$

10. Riješite sustav $\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & 13x_3 & = & -32 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 8 \end{array}.$

5.3 Rang i inverz matrice. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori.

Podsjetimo se da na skupu M_{mn} svih matrica tipa (m, n) imamo definirane operacije zbrajanja i množenja realnim brojevima (skalarima). Svojstva tih dviju operacija nabrojana su u teoremu 5.3. U osnovi, teorem 5.3 pokazuje da u skupu M_{mn} vrijede uobičajena računska pravila. Okolnost da je skup M_{mn} snabdjeven spomenutim operacijama koje zadovoljavaju standardna računska pravila svrstava M_{mn} u skupinu matematičkih struktura koje se nazivaju vektorski prostori.

Za prototip vektorskog prostora možemo uzeti skup svih radijvektora u ravnini u kojoj smo odabrali i fiksirali jedan pravokutni koordinatni sustav. Po definiciji, radijvektor je orijentirana dužina čija početna točka je ishodište koordinatnog sustava. I radijvektore znamo množiti realnim brojevima te međusobno zbrajati (po zakonu paralelograma). Nije teško ustanoviti da i skup svih radijvektora u ravnini s tim dvjema operacijama ima sva svojstva nabrojana u teoremu 5.3. To pokazuje da se u raznim situacijama pojavljuje identična struktura - neovisno o prirodi objekata s kojima operiramo.

Neformalno govoreći, *vektorski prostor* je bilo kakav skup V na kojem su definirane dvije operacije:

- zbrajanje, gdje je za svaka dva elementa $v, w \in V$ definiran njihov zbroj $v + w \in V$ (dakle, V treba biti zatvoren na operaciju zbrajanja);
- množenje skalarom, gdje je za svaki $v \in V$ i za svaki skalar (tj. realan broj) α definiran produkt αv (V treba biti zatvoren i na operaciju množenja skalarima).

Nadalje, te dvije operacije na skupu V trebaju zadovoljavati uobičajena računska pravila (koja smo već upoznali):

1. $v + w = w + v$, $\forall v, w \in V$;
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$;
3. postoji element $0 \in V$ (kojeg zovemo nul-vektorom) takav da vrijedi $v + 0 = v$, $\forall v \in V$;
4. za svaki $v \in V$ postoji element $-v \in V$ (kojeg zovemo aditivnim inverzom) takav da je $-v + v = 0$;
5. $\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall v, w \in V$;
6. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$;
7. $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$;
8. $1v = v$, $\forall v \in V$.

Već smo naglasili: skup M_{mn} je primjer vektorskog prostora, za sve $m, n \in \mathbb{N}$. Postoje i brojni drugi primjeri. U svim slučajevima, elementi vektorskog prostora se nazivaju vektori. U svakom pojedinom primjeru nije važna priroda elemenata skupa V, već su važna njihova algebarska *svojstva*. To je primjer apstrakcije kakve su i inače prisutne u matematici (poput apstrakcije koju činimo kad operiramo s prirodnim brojevima - broj dva, kao i svaki drugi prirodan broj je sasvim apstraktna tvorevina).

U tom duhu, i kad govorimo o konkretnom vektorskom prostoru, npr. M_{31}, (pa znamo da se radi o konkretnim objektima - u ovom slučaju jednostupčanim matricama s tri komponente) njegove elemente nazivamo vektorima. Štoviše, formulacija poput "promotrimo vektor $(3,-1,2)$" implicitno naglašava da tu uređenu trojku želimo promotriti upravo u kontekstu činjenice da je skup $M_{13}=\mathbb{R}^3$ vektorski prostor.

Ovdje ćemo se u našim razmatranjima ograničiti na vektorske prostore matrica. U stvari, najvažniji će nam biti prostori jednostupčanih matrica M_{n1} i prostori uređenih n-torki realnih brojeva $\mathbb{R}^n = M_{1n}$[11].

S apstraktne točke gledišta zapravo i nema razlike između ta dva prostora. Naime, preslikavanje $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ očito realizira prirodnu identifikaciju ova dva prostora. Ipak, u nastojanju da budemo precizni, i dalje ćemo činiti formalnu razliku između jednostupčanih matrica i uređenih n-torki.

Mnogi vektorski prostori su sadržani u drugim, većim vektorskim prostorima. U takvim situacijama govorimo o vektorskim prostorima i njihovim potprostorima.

Definicija 5.41 *Neka je V vektorski prostor. Njegov podskup $W \subseteq V$ se naziva potprostor od V ako je i W sam za sebe vektorski prostor uz operacije koje su naslijeđene iz V.*

Svaki vektorski prostor V ima dva trivijalna, sasvim nezanimljiva potprostora. To su sam prostor V i tzv. nul-prostor $\{0\}$. Činjenica je da je $\{0\}$ zaista vektorski prostor jer je zadovoljeno svih 8 uvjeta iz definicije; zato ga u formalnom smislu ne smijemo ignorirati unatoč njegovoj trivijalnosti.

Na primjer, podskup $W = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ je zaista potprostor od $\mathbb{R}^3$ jer je očito da W, zajedno s operacijama nad uređenim trojkama koje su naslijeđene iz $\mathbb{R}^3$, zadovoljava svih 8 svojstava iz definicije vektorskog prostora.

Isto vrijedi za podskup $W = \left\{ \begin{bmatrix} 3x \\ 5x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{21}$; opet je očito da je ovaj skup W potprostor od M_{21}.

Skup $Z = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x+1 \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_{21}$ nije potprostor od M_{21} jer nije vektorski prostor. Naime, Z ne sadrži nul-vektor, a to je jedan od 8 uvjeta koji moraju biti ispunjeni da bismo mogli govoriti o vektorskom prostoru. Štoviše, ovdje nisu ispunjeni čak ni osnovni preduvjeti jer zbrajanje i množenje skalarima nije na Z dobro definirano. Naime, zbroj dva elementa iz Z u ovom slučaju nije element od Z (pogledajte $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$). Isto tako, niti umnožak elementa od Z skalarom α neće više biti član skupa Z.

[11] Nećemo inzistirati na matričnom formalizmu, nego ćemo skup jednoretčanih matrica označavati s $\mathbb{R}^n$, a elemente tog skupa zvati uređenim n-torkama realnih brojeva, a ne matricama.

Hoće li dani podskup W vektorskog prostora V biti i potprostor od V, ovisi zapravo samo o tome je li W zatvoren na operacije koje su definirane u V.

Propozicija 5.42 *Neka je V vektorski prostor i $W \subseteq V$. Tada je W potprostor od V ako i samo ako je W zatvoren na operacije zbrajanja i množenja skalarom, tj. ako vrijedi*

1. $\forall x, y \in W,\ x + y \in W;$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in W, \alpha x \in W.$

Dokaz: Ako je W potprostor od V onda je po definiciji W i sam za sebe vektorski prostor pa su ovi uvjeti nužno ispunjeni (uz još 8 zahtjeva iz definicije).

Obratno, ako su ispunjena ova dva uvjeta, onda je W snabdjeven potrebnim operacijama te time postaje kandidat za vektorski prostor. Preostaje provjeriti da W ispunjava svih 8 zahtjeva iz definicije vektorskog prostora. Međutim, svi ti zahtjevi su ispunjeni čak i za sve vektore iz V (jer V jest vektorski prostor), pa zato iste jednakosti očito vrijede i za sve vektore iz podskupa W. Potencijalni problem može se kriti u zahtjevu (3) jer mi doduše znamo da postoji nul-vektor u V, no ne vidi se a priori da je $0 \in W$. Analogno, za bilo koji $x \in W$ mi znamo da negdje u V postoji njegov aditivni inverz $-x$, a nama sad treba preciznija informacija, naime da je $-x \in W$. No rješenje oba problema lako slijedi iz zatvorenosti skupa W na množenje skalarima. Naime, za $x \in W$, imamo $0x \in W$ i $(-1)x \in W$; dakle, $0 \in W$ i $-x \in W$. $\square$

Primjer 5.43 Promotrimo skup $W \subseteq \mathbb{R}^3$ definiran s $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. Tvrdimo da je W potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Da se u to uvjerimo trebamo samo provjeriti uvjete iz prethodne propozicije.

Uzmimo $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in W$. Sada je $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$. Da bi vektor $x + y$ pripadao skupu W treba vrijediti $x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$. Međutim, $x_1 + y_1 - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3) = 0 + 0 = 0$, pri čemu predzadnja jednakost slijedi iz pretpostavke da vektori x i y leže u W.

Potpuno analogno se pokaže da je i $\alpha x \in W$, za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ i sve $x \in W$.

Primjer 5.44 Uzmimo proizvoljnu matricu $A \in M_{mn}$ i promotrimo homogen sustav $AX = B$ te skup $\Omega \subseteq M_{n1}$ svih rješenja tog sustava. Propozicija 5.30 sad pokazuje da je Ω potprostor vektorskog prostora M_{n1}. Preciznije, prema drugoj tvrdnji te propozicije imamo $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \in \Omega$ za svaki izbor $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i sve $C_1, C_2 \in \Omega$. Uzmemo li $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, odavde dobivamo uvjet (1) iz propozicije 5.42, dok (2) slijedi ako odaberemo $\lambda_2 = 0$.

Zbog ove činjenice često se i inače, izvan ovog konteksta, kaže kako je Ω *prostor* rješenja homogenog sustava.

Primijetimo: ako je matrica sustava A kvadratna i ako je njen reducirani oblik jedinična matrica, prostor rješenja Ω sustava $AX = 0$ je nul-prostor: $\Omega = \{0\}$. Upravo to je sadržaj korolara 5.40.

Promotrimo sada proizvoljan vektorski prostor V. Za skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i vektore $x, y \in V$ vektor $\alpha x + \beta y$ se naziva linearna kombinacija (ili, potpunije, linearna kombinacija vektora x i y s koeficijentima α i β). Općenitije, ako za $k \in \mathbb{N}$ imamo $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, vektor $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$ se naziva linearna kombinacija.

Pogledajmo sada proizvoljan konačan skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, u V. Željeli bismo naći skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0. \tag{18}$$

Očito je da je jedna mogućnost $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$. Nazovimo ovo rješenje jednadžbe (18) trivijalnim. Zanima nas ima li ta jednadžba i drugih, netrivijalnih rješenja.

To, naravno, ovisi o vektorima $v_1, \ldots, v_k$. Na primjer, lako je utvrditi da za vektore $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$ jednakost $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$ može biti zadovoljena samo za trivijalan izbor skalara $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. S druge strane, za vektore $v_1 = (1, 1, -2), v_2 = (-1, 2, 3), v_3 = (2, -1, -5)$ imamo $1v_1 + (-1)v_2 + (-1)v_3 = 0$; dakle jednadžba (18) ovdje ima i netrivijalno rješenje.

Definicija 5.45 *Kažemo da je konačan skup vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V linearno nezavisan ako jednadžba (18) ima samo trivijalno rješenje. Eksplicitno, skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ je linearno nezavisan ako vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

U suprotnom kažemo da je skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ linearno zavisan.

Intuitivno govoreći, linearna nezavisnost nekog skupa znači da njegovi elementi zauzimaju različite "smjerove u prostoru". To je jasno ako prostor $\mathbb{R}^2$ vizualiziramo kao prostor radijvektora u ravnini pri čemu uređen par (x_1, x_2) interpretiramo kao koordinate završne točke nekog radijvektora.

Ponekad se govori o linearno nezavisnim, odnosno zavisnim vektorima. Ipak, formulacija u kojoj se govori o linearno zavisnom ili nezavisnom skupu je preciznija.

Nadalje, evidentno je da je svaki skup koji sadrži nul-vektor automatski linearno zavisan.

Primjer 5.46 Neka je $n \in \mathbb{N}$. Pogledajmo vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ i u njemu vektore $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$ i općenito, za $1 \leq k \leq n$, $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 na k-toj komponenti, 0 na svim ostalim komponentama).

Skup $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ je linearno nezavisan u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

Zaista, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Termin linearna nezavisnost, odnosno zavisnost je opravdan sljedećom korisnom propozicijom čija tvrdnja, opisno govoreći, glasi: skup je linearno zavisan ako i samo ako je u njemu bar jedan vektor prikaziv kao linearna kombinacija ostalih vektora.

Propozicija 5.47 *Skup $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ u vektorskom prostoru V je linearno zavisan ako i samo ako postoji indeks j, $1 \leq j \leq k$ takav da vrijedi $v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i v_i + \sum_{i=j+1}^{k} \lambda_i v_i$ za neke skalare $\lambda_i \in \mathbb{R}$.*

Dokaz: Ako imamo $v_j = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i v_i + \sum_{i=j+1}^{k} \lambda_i v_i$ onda je $\sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i v_i + (-1) v_j + \sum_{i=j+1}^{k} \lambda_i v_i = 0$ pa vidimo da jednadžba (18) ima netrivijalno rješenje (netrivijalno je jer je barem koeficijent uz vektor v_j različit od 0). Zato je, po definiciji, naš skup linearno zavisan.

Obratno, ako je skup $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linearno zavisan, postoje skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ koji nisu svi jednaki 0, a takvi da vrijedi $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0$. Ukoliko je koeficijent $\alpha_j \neq 0$, odavde slijedi

$$v_j = -\sum_{i=1}^{j-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i - \sum_{i=j+1}^{k} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i.$$

□

Sada smo spremni za definiciju ranga matrice.

Neka je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}$ proizvoljna matrica. Označimo njezine retke s $R_1, R_2, \dots, R_m$. Dakle, $R_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $1 \leq i \leq m$. Uočimo da svi retci R_i pripadaju vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ pa možemo razmatrati linearnu zavisnost/nezavisnost skupa $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$. Ako je taj skup zavisan, možemo pokušati odrediti maksimalan broj njegovih linearno nezavisnih vektora.

Definicija 5.48 *Rang matrice $A \in M_{mn}$ (oznaka: $r(A)$) je maksimalan broj linearno nezavisnih elemenata u skupu njezinih redaka $\{R_1, R_2, \dots R_m\}$.*

Primjer 5.49 (a) Iz primjera 5.46 direktno zaključujemo da za jediničnu matricu $I \in M_n$ vrijedi $\mathrm{r}(a) = n$ jer su retci matrice I upravo vektori e_i.

(b) Jednako očito, za nul-matricu bilo kojeg tipa vrijedi $\mathrm{r}(0) = 0$.

(c) Pogledajmo matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$. Jasno je da su njezini retci R_1 i R_2 linearno nezavisni (provjerite!). S druge strane, zbog $R_3 = 2R_1 + 3R_2$, skup $\{R_1, R_2, R_3\}$ je linearno zavisan. Zaključak: broj linearno nezavisnih elemenata u skupu $\{R_1, R_2, R_3\}$, što je po definiciji $\mathrm{r}(A)$, u ovom slučaju iznosi 2.

Napomena 5.50 Standardna definicija ranga matrice je drugačija: obično se rang matrice definira kao broj njezinih linearno nezavisnih stupaca. Može se pokazati (i to je jedan od dubljih rezultata linearne algebre) da su te dvije definicije ekvivalentne. "Stupčana" definicija ima bitnih teorijskih prednosti, no one ovdje nisu toliko važne. U drugu ruku, ubrzo će se pokazati da nam je "retčana" definicija ovdje mnogo prikladnija.

Nije uvijek sasvim očito koliko iznosi rang proizvoljne matrice A. Zato je poželjno naći metode koje će nam olakšati računanje ranga. U tom smislu osobito je koristan sljedeći teorem.

Teorem 5.51 *Neka je $A \in M_{mn}$ proizvoljna matrica, te neka je matrica $B \in M_{mn}$ nastala iz A primjenom jedne od elementarnih transformacija redaka. Tada je $r(A) = r(B)$.*

Dokaz: Iako je tvrdnja teorema intuitivno jasna (pa je u nju lagano povjerovati), egzaktan dokaz ovdje izostavljamo. Dok je formalni argument sasvim lagan u slučaju da je B nastala iz A primjenom transformacija (1) ili (2), dokaz za slučaj primjene transformacije (3) je zamršeniji. $\square$

Podsjetimo se da su matrice $A, B \in M_{mn}$ ekvivalentne ($A \sim B$) ako se jedna iz druge može izvesti primjenom konačnog broja elementarnih transformacija. Uzastopnom primjenom prethodnog teorema odmah dobivamo

Korolar 5.52 *Neka su $A, B \in M_{mn}$ ekvivalentne matrice. Tada je $r(A) = r(B)$.*

Prema teoremu 5.24 svaka je matrica ekvivalentna svom reduciranom obliku. Zato iz prethodnog korolara odmah zaključujemo:

Korolar 5.53 *Neka je $A_{red} \in M_{mn}$ reducirani oblik matrice $A \in M_{mn}$. Tada je $r(A) = r(A_{red})$.*

Pogledajmo sljedeće tri matrice, sve tri u reduciranom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očito je da rang sve tri matrice iznosi 3. Nije koincidencija da u sva tri slučaja i broj netrivijalnih redaka ovih matrica iznosi 3.

Teorem 5.54 *Neka je r broj netrivijalnih redaka u reduciranom obliku $A_{red} \in M_{mn}$ matrice A. Tada je $r(A) = r$.*

Dokaz: Prema prethodnom korolaru dovoljno je dokazati da je $\mathrm{r}(A_{red}) = r$. Po definiciji reduciranog oblika matrice, pretpostavka znači da su retci $R_1, R_2, \ldots, R_r$ matrice A_{red} netrivijalni, dok su $R_{r+1}, \ldots, R_m$ nul-retci.

Jasno je da je broj linearno nezavisnih elemenata u skupu $\{R_1, \ldots, R_m\}$ zapravo jednak broju linearno nezavisnih elemenata u skupu $\{R_1, \ldots, R_r\}$. Tvrdimo, međutim, da je čitav skup $\{R_1, \ldots, R_r\}$ linearno nezavisan. Pretpostavimo suprotno; tada bi neki redak, recimo R_k, $1 \le k \le r$, bio linearna kombinacija preostalih elemenata tog skupa:

$$R_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i R_i + \sum_{i=k+1}^{r} \alpha_i R_i.$$

Po definiciji reduciranog oblika matrice, prvi netrivijalni koeficijent u retku R_k je jednak 1; recimo da se on pojavljuje u j-tom stupcu. Opet po definiciji reduciranog oblika matrice, svi ostali koeficijenti u j-tom stupcu matrice A su jednaki 0. Zato je prethodna jednakost nemoguća. $\square$

U praksi rang matrice određujemo upravo na temelju prethodnog korolara: matricu svedemo na reducirani oblik i očitamo broj netrivijalnih redaka u njemu.

Primjer 5.55

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle je $\mathrm{r}(A) = 2$.

Prethodna diskusija pokazuje da su elementarne transformacije i u ovom kontekstu efikasan alat. Zato je korisno promotriti elementarne transformacije još jednom, ovog puta iz drugog rakursa.

Definicija 5.56 *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Elementarne matrice n-tog reda su*

$$E_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \ i, j = 1, 2, \ldots, n, \ i \neq j;$$

$$E_{i,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & & & \dots & 1 \end{bmatrix},\ i = 1, 2, \dots, n,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$E_{i,j,\lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},\ i, j = 1, 2, \dots, n,\ i \neq j,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Napomena 5.57 Podrazumijevamo da je u matrici $E_{i,j,\lambda}$ skalar λ na mjestu (i, j) (pa je u navedenoj definiciji matrica $E_{i,j,\lambda}$ prikazana u slučaju kad je $j < i$).

Važno je uočiti da su sve elementarne matrice regularne. Lako se provjeri da vrijedi $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$, $E_{i,\lambda}^{-1} = E_{i,\frac{1}{\lambda}}$, $E_{i,j,\lambda}^{-1} = E_{i,j,-\lambda}$.

Sljedeći teorem otkriva ulogu elementarnih matrica.

Teorem 5.58 *Množenjem proizvoljne matrice $A \in M_{mn}$ s elementarnim matricama s lijeve strane realiziraju se elementarne transformacije redaka matrice A.*

Pritom je $E_{ij}A$ matrica koja nastaje zamjenom i-tog i j-tog retka u A, $E_{i,\lambda}A$ je matrica koju dobivamo tako da i-ti redak u A množimo s λ, a umnožak $E_{i,j,\lambda}A$ je matrica koja se dobije kad se i-tom retku matrice A pribroji njezin j-ti redak pomnožen s λ.

Dokaz: Treba prvo uočiti da su sve navedene elementarne matrice iz prostora M_m (da bi navedeni produkti bili definirani).

Tvrdnja se dokazuje direktnom provjerom. Radi jednostavnosti, demonstrirajmo navedene tvrdnje u slučaju $m = 2$.

Uzmimo proizvoljnu matricu $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix}$. Sada je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \dots & \lambda a_{2n} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & \dots & a_{2n} + \lambda a_{1n} \end{bmatrix}.$$

Za proizvoljan $m \in M_{mn}$ provjera je potpuno identična. $\square$

Sve do sada razmatrali smo rang proizvoljnih matrica. U nastavku ćemo se ograničiti na kvadratne matrice. Pokazat će se je rang matrice vrlo koristan alat u ispitivanju regularnosti matrica i određivanju inverza.

Već smo uspjeli karakterizirati regularne matrice pomoću determinante (no dokaz smo proveli samo za matrice tipa $(2, 2)$). U sljedećem teoremu regularne matrice ćemo karakterizirati pomoću ranga.

Teorem 5.59 *Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$.*

Dokaz: Pretpostavimo najprije da je $r(A) = n$. Prema teoremu 5.54 to znači da matrica A_{red} ima točno n netrivijalnih redaka. Po definiciji reduciranog oblika matrice to znači da je $A_{red} = I \in M_n$. Dakle je $A \sim I$.

Ovo znači da se matrica A može dobiti iz jedinične matrice I primjenom konačnog broja elementarnih transformacija. Prema prethodnom teoremu zato je $A = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 I$, pri čemu su $E_1, \dots, E_p$ prikladno odabrane elementarne matrice. (Konkretno, E_1 je elementarna matrica koja realizira onu transformaciju koju smo prvu primijenili na matricu I, nakon toga primijenila se neka druga transformacija kojoj odgovara matrica E_2 itd.)

Odavde i iz napomene 5.12(e) slijedi da je A, kao produkt regularnih matrica, i sama regularna.

Preostalo je dokazati: ako je $\mathrm{r}(A) < n$ onda je A singularna. Uzmimo zato da vrijedi $\mathrm{r}(A) < n$. To znači, prema teoremu 5.54, da matrica A_{red} ima barem jedan nul-redak. Sada znamo, prema definiciji reduciranog oblika matrice, da je posljednji redak A_{red} nul-redak.

Kao i u prvom dijelu dokaza, imamo $A = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A_{red}$ pri čemu su $E_1, \dots E_p$ prikladno odabrane elementarne matrice. Pretpostavimo sad suprotno našoj tvrdnji, da je A regularna i pokažimo da to vodi na kontradikciju. Pomnožimo jednakost $A = E_p E_{p-1} \dots E_2 E_1 A_{red}$ matricom E_p^{-1} s lijeva. Dobivamo $E_p^{-1} A = E_{p-1} \dots E_2 E_1 A_{red}$. Ovu jednakost sad pomnožimo, opet s lijeva, matricom E_{p-1}^{-1} i analogno nastavimo dalje. Nakon provedenih p koraka dobivamo $E_1^{-1} \dots E_{p-1}^{-1} E_p^{-1} A = A_{red}$. S desne strane ove jednakosti imamo umnožak regularnih matrica; zato je, prema napomeni 5.12(e) taj umnožak regularna matrica. Dakle, i matrica A_{red} je regularna. To znači da postoji kvadratna matrica B takva da je $A_{red} B = I$. Međutim, zadnji redak matrice A_{red} (a onda i matrice $A_{red} B$) je nul-redak. Zato je $(A_{red} B)_{nn} = 0$. Kontradikcija. $\square$

Zabilježimo odmah i sljedeći važan korolar koji se odnosi na homogene sustave linearnih jednadžbi.

Korolar 5.60 *Neka je $A \in M_n$. Homogen sustav jednadžbi $AX = 0$ ima jedinstveno (samo trivijalno) rješenje ako i samo ako je matrica A regularna.*

Dokaz: Tvrdnja slijedi izravno iz korolara 5.40 i prethodnog teorema (i njegovog dokaza). $\square$

Prethodni teorem ne daje nam samo novi način prepoznavanja regularnih matrica, nego i vrlo učinkovitu i jednostavnu metodu invertiranja regularnih matrica.

Pretpostavimo da je matrica $A \in M_n$ regularna. Prema teoremu 5.59 (vidite i dokaz), tada je $r(A) = n$ i $A \sim I$. Slično kao u prethodnom dokazu sad možemo zaključiti da se I može dobiti iz A primjenom konačnog broja elementarnih transformacija. Imamo, dakle, $I = E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 A$, pri čemu smo učinili t transformacija, a matrice E_i su elementarne matrice kojima su (upravo tim redom) te transformacije redaka realizirane.

Matrica $E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1$ je zbog napomene 5.12(e) regularna. Zato prethodna jednakost pokazuje da su A i $E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1$ jedna drugoj inverzne matrice. Vrijedi, dakle, $A^{-1} = E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1$, što možemo pisati i kao $A^{-1} = E_t \cdot \ldots \cdot E_2 E_1 I$. Sad, međutim, u svjetlu teorema 5.54, zadnju jednakost možemo pročitati na sljedeći način: ako na matricu I primijenimo točno one iste transformacije redaka, i to u istom poretku kojima smo iz matrice A dobili I, rezultat će biti upravo A^{-1}!

Opisana metoda traženja inverzne matrice A^{-1} naziva se Gauss-Jordanova metoda invertiranja matrice.

U praksi nije potrebno voditi zapisnik o učinjenim transformacijama. Zadanoj matrici čiji inverz tražimo (čak i ako ne znamo unaprijed da je regularna), računat ćemo rang transformirajući njezine retke, a svaku transformaciju koju izvodimo odmah ćemo, paralelno, učiniti i nad jediničnom matricom. Izađe li da je rang dane matrice $A \in M_n$ manji od n, ovaj paralelni postupak je bio uzaludan. Ako je pak zadana matrica regularna, njezin rang je nužno jednak n, u konačno mnogo koraka prevest ćemo tu matricu u jediničnu, a paralelni konačni rezultat (tj. matrica koju smo dobili istim koracima iz I) je tada traženi inverz od A.

Primjer 5.61 Odredimo, ako postoji, inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Formirajmo odmah "duet" od matrica A i I: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (koje smo odijelili iscrtkanom linijom) i transformirajmo retke lijeve strane (to je zadana matrica A) s namjerom da dođemo do I, a iste te tranformacije usput izvedimo i na desnoj strani.

Započet ćemo tako da prvi redak pomnožimo s -1 pa ga dodamo drugom retku:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

(sad zamijenimo drugi i treći redak)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \text{ (od prvog retka oduzmemo drugi) } \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

(sad od drugog retka oduzmemo treći pomnožen s 2; te prvom retku dodamo treći pomnožen s 2)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Iz prethodne diskusije sada slijedi da je $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Za kraj razmotrimo još ukratko *problem svojstvenih vrijednosti.*

Neka je $A \in M_n$ proizvoljna kvadratna matrica. Za svaki vektor (jednostupčanu matricu) $x \in M_{n1}$ možemo promatrati produkt $Ax \in M_{n1}$. U mnogim primjenama pokazuje se važnim pronaći one vektore x za koje vrijedi $Ax = \lambda x$ za neki skalar λ. Smisao je da želimo naći one vektore x koji pomnoženi matricom A "ne mijenjaju smjer"; tj. takve x da Ax i x budu proporcionalni.

Odmah je jasno da će za svaku matricu i svaki skalar λ jednakost $Ax = \lambda x$ biti zadovoljena uzmemo li $x = 0$. No takvo rješenje smatramo trivijalnim. Htjeli bismo potražiti druga, netrivijalna rješenja.

Definicija 5.62 *Neka je $A \in M_n$. Skalar λ se naziva svojstvena vrijednost matrice A ako postoji vektor $x \in M_{n1}$, $x \neq 0$, takav da vrijedi $Ax = \lambda x$.*

Svaki takav vektor se onda naziva svojstven vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Primjer 5.63 Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Kako je $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, zaključujemo da je skalar $\lambda = 2$ svojstvena vrijednost ove matrice te da je vektor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ svojstveni vektor matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti 2.

Napomena 5.64 Ako imamo svojstvenu vrijednost λ matrice A i pridruženi svojstveni vektor x, vidimo da je, prema svojstvima matričnog množenja, i $A(\alpha x) = \alpha(Ax) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$. Ovo pokazuje da je i αx pridruženi svojstven vektor, za svaki $\alpha \neq 0$. Zaključujemo da svojstven vektor pridružen nekoj svojstvenoj vrijednosti nije jedinstveno određen.

Nije a priori jasno ima li svaka matrica svojstvenih vrijednosti. Da bismo to utvrdili, korisno je jednakost $Ax = \lambda x$ napisati u obliku $Ax = \lambda I x$, odnosno $(A - \lambda I)x = 0$. Imamo, dakle, posla s homogenim sustavom jednadžbi. Matrica sustava je $A - \lambda I$ (pri čemu nam je skalar λ još uvijek nepoznat), a željeli bismo da taj sustav ima netrivijalno rješenje $x \neq 0$. Očito, sad smo u prilici primijeniti korolar 5.60.

Teorem 5.65 *Neka je* $A \in M_n$. *Skalar* λ *je svojstvena vrijednost matrice* A *ako i samo ako je matrica* $A - \lambda I$ *singularna.*

Dokaz: Prema korolaru 5.60, homogen sustav $(A - \lambda I)x = 0$ ima i netrivijalnih rješenja ako i samo ako je matrica sustava $A - \lambda I$ singularna. □

Regularnost, odnosno singularnost matrice općenito znamo prepoznati iz njezinog ranga. Ako je matrica A drugog reda, onda možemo upotrijebiti i determinantu, odnosno teorem 5.15. Tako dobivamo sljedeći rezultat (koji je istinit i za matrice n-tog reda).

Korolar 5.66 *Neka je* $A \in M_2$. *Skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *je svojstvena vrijednost matrice* A *ako i samo je* $det(A - \lambda I) = 0$.

Napomena 5.67 Neka je $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ proizvoljna kvadratna matrica drugog reda. Tada je $A - \lambda I = \begin{bmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \lambda \end{bmatrix}$ pa je $\det(A - \lambda I) = (A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda) - A_{21}A_{12} = \lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12})$.

Sad prema prethodnom korolaru zaključujemo: skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ je svojstvena vrijednost matrice A ako i samo je λ rješenje kvadratne jednadžbe $\lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + (A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}) = 0$.

Posebno, odavde odmah slijedi da kvadratna matrica drugog reda može imati najviše dvije svojstvene vrijednosti. Osim toga, ako navedena jednadžba nema realnih nul-točaka, matrica A nema svojstvenih vrijednosti.

Primjer 5.68 (a) Neka je $A = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$. Prema prethodnoj napomeni, da bismo našli svojstvene vrijednosti, treba riješiti jednadžbu $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$. Slijedi da su skalari $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 5$ svojstvene vrijednosti ove matrice.

(b) Pogledajmo $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. Postupajući kao u prethodnom primjeru dobivamo kvadratnu jednadžbu $\lambda^2 - \sqrt{2}\lambda + 1 = 0$ koja nema realnih nul-točaka. Zato ova matrica nema svojstvenih vrijednosti.

Može se pokazati da je ovaj primjer samo poseban slučaj mnogo općenitije činjenice: ako je $\varphi \in (0, \pi)$ onda matrica $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ nema svojstvenih vrijednosti. (Provjerite!)

Kad odredimo svojstvene vrijednosti dane matrice, nalaženje pridruženih svojstvenih vektora se svodi na rješavanje homogenog sustava linearnih jednadžbi $(A - \lambda I)x = 0$.

Primjer 5.69 Uzmimo matricu $A = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$ iz prethodnog primjera i njezinu svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 2$. Trebamo riješiti homogen sustav čija matrica je $A - 2I = \begin{bmatrix} -6 & -9 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$.

Odmah je jasno da je reducirani oblik ove matrice $A' = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ pa je rješenje $x = t \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. Tako nalazimo da je vektor $x = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ pridruženi svojstveni vektor. No, i tx, za svaki $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, je također netrivijalno rješenje našeg sustava, pa je i svaki od tih vektora pridruženi svojstveni vektor. Ovo je u skladu s napomenom 5.64.

Na identičan način izračuna se da je $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 5$. Kao i prije zaključujemo da i svaki vektor oblika ty za $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, ima isto svojstvo.

U nastavku ćemo se, jednostavnosti radi, ograničiti na kvadratne matrice drugog reda. Već smo vidjeli da matrica $A \in M_2$ može imati najviše dvije različite svojstvene vrijednosti. Pretpostavimo da je tako; neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice A, te neka su v_1, v_2 njima pridruženi svojstveni vektori. Vidjet ćemo da skup $\{v_1, v_2\}$ ima zanimljiva svojstva.

Propozicija 5.70 *Neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice $A \in M_2$, te neka su v_1, v_2 njima pridruženi svojstveni vektori. Tada je skup $\{v_1, v_2\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz: Pretpostavimo da je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$. Pomnožimo li ovu jednakost s A, dobivamo $A(\alpha_1 v_1) + A(\alpha_2 v_2) = 0$. Kad iskoristimo pretpostavku, odavde imamo $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 = 0$. Sad možemo polaznu jednakost pomnožiti s λ_1 i oduzeti od posljednje. Rezultat je $\alpha_2 \lambda_2 v_2 - \alpha_2 \lambda_1 v_2 = 0$, odnosno $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) v_2 = 0$. Jer je $v_2 \neq 0$, slijedi $\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$, a kako je po pretpostavci i $\lambda \neq \lambda_2$, slijedi $\alpha_2 = 0$. Uvrštavanjem u polaznu jednakost sad odmah slijedi i $\alpha_1 = 0$. □

Zadržimo prethodne oznake. Dodatno, neka je $v_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} V_{12} \\ V_{22} \end{bmatrix}$. Uvedimo i matricu $V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$.

Pokušajmo proizvoljan vektor $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ prikazati kao linearnu kombinaciju vektora v_1 i v_2. Tražimo, dakle, koeficijente x_1 i x_2 takve da vrijedi $b = x_1 v_1 + x_2 v_2$. Izjednačavajući koeficijente dobivamo sustav

$$\begin{array}{rcrcl} V_{11}x_1 & + & V_{12}x_2 & = & b_1 \\ V_{21}x_1 & + & V_{22}x_2 & = & b_2 \end{array}.$$

U matričnom obliku, taj sustav ima zapis $Vx = b$. Jer su vektori v_1 i v_2 linearno nezavisni, matrica V ima rang 2 pa je regularna. Naš problem ima, dakle, jedinstveno rješenje i ono glasi $x = V^{-1}b$. Tako smo dokazali

Teorem 5.71 *Neka su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice $A \in M_2$, te neka su v_1, v_2 njima pridruženi svojstveni vektori. Tada svaki vektor $b \in M_{n1}$ ima jedinstven prikaz u obliku $b = x_1v_1 + x_2v_2$.*

Primjer 5.72 Uzmimo matricu $A = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$ iz primjera 5.69 i njezine svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$. Izračunali smo da su pridruženi svojstveni vektori $v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Prema prethodnom teoremu sada se svaki vektor $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in M_{21}$ može na jedinstven način prikazati kao $b = x_1v_1 + x_2v_2$. Koeficijente x_1 i x_2 lako dobivamo rješavajući 2×2 sustav jednadžbi kao u diskusiji prije teorema. U ovom slučaju se dobiva

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (-2b_1 - 2b_2) \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + (-2b_1 - 3b_2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Prethodni teorem pokazuje se osobito korisnim u situacijama kad treba računati potencije matrice A. Ilustrirajmo to sljedećim primjerom.

Primjer 5.73 Za matricu $A = \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$ iz prethodnog primjera i vektor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ izračunajmo $A^8 b$.

Prvo primijetimo da vrijedi $Av_1 = 2v_1$ odakle je $A^2v_1 = A(2v_1) = 2Av_1 = 4v_1$. Sad nije teško ustanoviti da je i općenito $A^k v_1 = 2^k v_1$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Posebno, $A^8 v_1 = 2^8 v_1$. Sasvim analogno vidimo i da je $A^8 v_2 = 5^8 v_2$.

Nadalje, iz prethodnog primjera znamo da za naš zadani vektor b imamo $b = -4v_1 - 5v_2$. Zbog distributivnosti množenja matrica odavde je

$$A^8 b = -4 \cdot 2^8 v_1 - 5 \cdot 5^8 v_2 = \begin{bmatrix} 6 \cdot 2^8 - 5^9 \\ -4 \cdot 2^8 + 5^9 \end{bmatrix}.$$

Primjer 5.74 Pogledajmo Lesliejevu matricu $L = \begin{bmatrix} 1.5 & 2 \\ 0.08 & 0 \end{bmatrix}$ s istom interpretacijom kao u primjeru 5.19.

Izračunajmo svojstvene vrijednosti ove Lesliejeve matrice. Dobivamo jednadžbu $\lambda^2 - 1.5\lambda - 0.16 = 0$ odakle nalazimo $\lambda_1 = 1.6$ i $\lambda_2 = -0.1$.

Lako je naći i pridružene svojstvene vektore: dobiva se $v_1 = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$ (za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 1.6$), te $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ (za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = -0.1$).

Pretpostavimo da je $N(0) = \begin{bmatrix} 105 \\ 1 \end{bmatrix}$. Kao i prije, sad možemo računati $N(1) = LN(0)$, $N(2) = LN(1) = L^2N(0)$ i, općenito, $N(t) = L^tN(0)$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Ovdje, međutim, možemo postupiti točno kao u prethodnom primjeru jer matrica L ima dvije različite svojstvene vrijednosti. Lako se izračuna

$$N(0) = \begin{bmatrix} 105 \\ 1 \end{bmatrix} = 5v_1 + v_2 = 5\begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Odavde je $N(t) = L^t N(0) = L^t(5v_1 + v_2) = 5L^t v_1 + L^t v_2$ odakle je

$$N(t) = 5 \cdot 1,6^t \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix} + (-0.1)^t \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Primjer 5.75 Uzmimo opet Lesliejevu matricu drugog reda $L = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 \\ P_0 & 0 \end{bmatrix}$ (usp. primjer 5.19). Prema korolaru 5.66 matrica L ima dvije različite svojstvene vrijednosti čim je $F_0^2 + 4P_0F_1 > 0$ jer je $\det(L - \lambda I) = \lambda^2 - F_0\lambda - P_0F_1$. Pretpostavimo da je tako.

U takvoj situaciji izlazi da je veća svojstvena vrijednost uvijek pozitivna (čim je $F_0 > 0$). Pokažimo sada da ta veća svojstvena vrijednost igra specijalnu ulogu.

Neka je λ_1 veća svojstvena vrijednost te neka je v_1 pripadajući svojstveni vektor (u prethodnom primjeru imali smo $\lambda_1 = 1,6$ i $v_1 = \begin{bmatrix} 20 \\ 1 \end{bmatrix}$).

Pretpostavimo da je $N(0) = v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$. Računajući kao u prethodnom primjeru sad dobivamo $N(t) = \lambda_1^t v_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1^t\alpha \\ \lambda_1^t\beta \end{bmatrix}$.

Promotrimo sada, u trenutku t, u ukupnoj populaciji udio $p(t) = \frac{N_0(t)}{N_0(t)+N_1(t)}$ jedinki starosti 0. Iz prethodne relacije za $N(t)$ dobivamo

$$p(t) = \frac{\lambda_1^t\alpha}{\lambda_1^t\alpha + \lambda_1^t\beta} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Zaključujemo da je promatrani udio stabilan, tj. neovisan o t. U tom smislu kažemo da početni vektor $N(0)$ generira stabilnu starosnu distribuciju. Pokazali smo, dakle, da $N(0) = v_1$ generira stabilnu starosnu distribuciju. Primijetimo da isti efekt postižemo i ako umjesto vektora v_1 uzmemo neki drugi svojstveni vektor tv, $t \in \mathbb{R}$. Moramo samo osigurati, što je jasno iz prirode ovog problema, da obje komponente vektora tv_1 budu pozitivne.

Zadaci: 14. domaća zadaća

1. Pokažite da su vektori (x, y) i $(\lambda x, \lambda y)$ U $\mathbb{R}^2$ linearno zavisni, za svaki skalar λ.
2. Ispitajte linearnu zavisnost skupa $\{(1, 1, 3), (-5, 1, 2), (1, 0, 1)\}$ u prostoru $\mathbb{R}^3$.
3. Neka je u nekom vektorskom prostoru V skup $\{x, y\}$ linearno nezavisan. Pokažite da su tada linearno nezavisni i skupovi (a) $\{x + y, x - y\}$, (b) $\{2x + y, 3x - y\}$.

4. Odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Odredite rang matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & -9 & -8 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

6. Odredite inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Odredite, ako postoji, inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Odredite, ako postoji, inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 8 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

9. Izračunajte svojstvene vektore i svojstvene vrijednosti matrice (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $B = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, (c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

10. Za $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ odredite svojstvene vrijednosti i pridružene svojstvene vektore te izračunajte $A^{10}x$ za $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

11. Za $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ odredite svojstvene vrijednosti i pridružene svojstvene vektore te izračunajte $A^{10}x$ za $x = \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \end{bmatrix}$.

12. Neka je $L = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0.3 & 0 \end{bmatrix}$ Lesliejeva matrica za populaciju s dvije starosne klase. Odredite obje svojstvene vrijednosti, pridružene svojstvene vektore i nađite $N(0)$ koji generira stabilnu dobnu distribuciju.

13. Neka je $L = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 0.1 & 0 \end{bmatrix}$ Lesliejeva matrica za populaciju s dvije starosne klase. Odredite obje svojstvene vrijednosti, pridružene svojstvene vektore i nađite $N(0)$ koji generira stabilnu dobnu distribuciju.

Napomene i komentari